BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1963

MÜNCHEN 1964

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkungen über normale Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. I

Von Georg Aumann in München

Vorgelegt am 3. Mai 1963

1. Aus der klassischen Funktionentheorie ist bekannt, daß im Falle der gleichmäßigen Konvergenz ein Integral der Form

$$\iint e^{(p+iq)z} g(p, q)\, dp\, dq, \tag{0}$$

worin p und q reelle Parameter bezeichnen, die einen 2-dimensionalen Bereich durchlaufen, und $g(p, q)$ eine komplex-wertige Funktion ist, eine analytische Funktion von z darstellt. Im folgenden wird gezeigt, daß in Verallgemeinerung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gewisse Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen unter Heranziehung der Matrizenschreibweise analoge Darstellungen von Lösungen zulassen; die Gleichungen sind von der Bauart

$$\frac{\partial U}{\partial t} = B_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \ldots + B_m \frac{\partial U}{\partial x_m}, \tag{1}$$

worin U einen von den unabhängigen Veränderlichen $t, x_1, \ldots x_m$ abhängigen (Spalten-) Vektor und $B_1, \ldots, B_m$ konstante quadratische Matrizen der Dimension n bedeuten. Dabei sind die B_j *untereinander vertauschbar* und *höchstens eine davon singulär.* Das Resultat ergibt sich durch den Ansatz nach der Methode der „Trennung der Veränderlichen“, hier allerdings in matrizieller Form.

Auch für eine Gleichung der Gestalt

$$\frac{\partial U}{\partial t} = B_0 U + B_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \ldots + B_m \frac{\partial U}{\partial x_m} \tag{1*}$$

lassen sich auch ohne Vertauschbarkeitsbedingungen an die B_j, aber bei *Vollnormalität*, d. h. alle $B_1, \ldots, B_m$ sind nicht singulär, Lösungen bestimmen, die Parameter in Gestalt von Matrizen enthalten und mittels des Superpositionsprinzips zu allgemeineren Lösungen der Gleichung (1*) führen. Ob damit schon die allgemeinste Lösung gewonnen werden kann, bleibt eine noch offene Frage.

2. Sucht man nach einer partikulären Lösung von (1) in der Form

$$U = Y_0(t)\, Y_1(x_1) \ldots Y_m(x_m)\, V$$

mit untereinander und auch mit den B_j vertauschbaren Matrizen Y_k, die außerdem nicht singulär sind, und konstantem aber beliebigem Vektor V, so kommt man auf

$$Y_0' Y_0^{-1} = B_1 Y_1' Y_1^{-1} + \ldots + B_m Y_m' Y_m^{-1},$$

was, falls etwa $B_2, \ldots, B_m$ nicht singulär sind, dazu zwingt, $B_j Y_j' Y_j^{-1} = C_j$ zu setzen, wo C_j eine konstante Matrix bezeichnet, d. h. $Y_j' = B_j^{-1} C_j Y_j$ für $j = 2, \ldots, m$, ferner $Y_1' Y_1^{-1} = C_1$ und $Y_0' Y_0^{-1} = B_1 C_0$, so daß

$$B_1 C_0 = B_1 C_1 + C_2 + \ldots + C_m \tag{2}$$

gilt und die C_k untereinander und mit den B_j und Y_k vertauschbar sind.

Die Vertauschbarkeitsbedingungen werden durch den folgenden *Hilfssatz* vereinfacht:

Sind A und B konstante und miteinander vertauschbare Matrizen, so ist jede Lösung der Matrix-Differentialgleichung $\frac{dY}{dt} = AY$ mit B vertauschbar. (Beweis. Es sei Y die „Fundamentallösung" dieser Differenzialgleichung, $Y(0) = E$ (= Einheitsmatrix), d. h. $Y = e^{At}$. $Y_1 = BY - YB$ erfüllt wegen $AB = BA$ selbst diese Differentialgleichung, hat also die Form YC mit einer konstanten Matrix C. Da für $t = 0$ $Y_1 = 0$, so ist $C = 0$).

Die angesetzte partikuläre Lösung von (1) hat damit die Form

$$U = e^{B_1 C_0 t + C_1 x_1 + B_2^{-1} C_2 x_2 + \ldots + B_m^{-1} C_m x_m} V,$$

und nach dem Hilfssatz ist die Vertauschbarkeit erfüllt, soferne die C_k *untereinander und mit den* B_j *vertauschbar* sind.

Superposition liefert nun die allgemeinere Lösung

$$U = \int\limits_{(C)} e^{B_1 C_0 t + C_1 x_1 + B_2^{-1} C_2 x_2 + \ldots} V(C)\, dC, \tag{3}$$

worin $C = (C_0, C_1, \ldots, C_m)$ ein System von Matrizen bezeichnet, wie es durch die Gleichung (2) und durch die eben genannten Vertauschbarkeitsbedingungen festgelegt ist, $V(C)$ einen von C abhängigen Vektor und dC das Volumelement im Variabilitätsbereich (C) der C.

Die fraglichen Vertauschbarkeitsbedingungen für die Parametermatrizen C_j lassen sich z. B. dadurch realisieren, daß man sie unter Einhaltung der Bedingung (2) im kommutativen Ring der Polynome in $B_1, \ldots, B_m$ variieren läßt.

Wenn $m > 1$, macht (2) überhaupt keine Schwierigkeit; man setzt einfach $C_m = B_1 C_0 - B_1 C_1 - C_2 - \ldots - C_{m-1}$ und läßt die $C_0, \ldots, C_{m-1}$ frei im genannten Ring laufen. Wenn $m = 1$ und $\det B_1 \neq 0$, hat man $C_0 = C_1$ und kann

$$C_0 = p_0 + p_1 B_1 + \ldots + p_h B_1^h$$

mit beliebigen $p_0, \ldots, p_h$ setzen, wo $h + 1$ den Grad des Minimalpolynoms von B_1 bezeichnet, und erhält ein $(h + 1)$-dimensionales Integral für (3). Falls $\det B_1 = 0$ ist das konstante Glied des Minimalpolynoms von B_1 Null und beim Ansatz von C_0 und C_1 als Polynome in B_1 stellen sich $h + 2$ willkürliche Parameter für die Parametermatrizen ein und demgemäß ein $(h + 2)$-dimensionales Integral in (3).

Bemerkungen. 1. Es ist klar, daß anstelle der Integration in (3) auch eine endliche oder unendliche Reihe von partikulären Integralen treten kann.

2. Mit (3) ist das *Anfangswertproblem* gelöst, wenn es möglich ist, $U(0, x_1, \ldots, x_m)$, d. h. U für $t = 0$, in der Form

$$\int e^{C_1 x_1 + B_2^{-1} C_2 x_2 + \cdots} V(C)\, dC$$

mit einem passenden $V(C)$ darzustellen (Integralgleichung!).

3. Für die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* ist $n = 2$, $m = 1$ und $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $1 + B_1^2 = 0$ die Minimalgleichung, und die mit B_1 vertauschbaren Matrizen sind gerade alle Polynome $p + qB_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$. Schreiben wir, um die üblichen Bezeichnungen zu erhalten, $t = x$, $x_1 = y$ und $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, so liefert (3) die Formel

$$(3') \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \iint e^{C_0 (B_1 x + E y)} \begin{pmatrix} u_0(p, q) \\ v_0(p, q) \end{pmatrix} dp\, dq.$$

Wegen der Isomorphie der Matrizen $\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$ mit den komplexen Zahlen $p + iq$, ist auch die obige Exponentialfunktion eine solche Matrix, so daß man schreiben kann
(T bezeichne den Übergang zur transponierten Matrix)

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} = \iint (e^{\cdots})^T \begin{pmatrix} u_0 & v_0 \\ -v_0 & u_0 \end{pmatrix} dp\, dq,$$

oder in komplexer Zusammenfassung $u + iv = w$, $u_0 + iv_0 = w_0$ $p + iq = s$, $x + iy = z$

$$w = \iint e^{-i\bar{s}z}\, w_0(s)\, dp\, dq,$$

was mit geringfügigen Änderungen in die in **1.** genannte Gestalt gebracht werden kann.

Auch der allgemeinere Fall $n = 2$, $m = 1$ mit $B_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ und $\det B_1 \neq 0$ führt auf das 2-dimensionale Integral (3′), wobei zwecks Erfüllung der Vertauschbarkeitsbedingungen im Falle $a =$ bzw. $\neq d$

$$C_0 = \begin{pmatrix} p & qb \\ qc & p \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} = \begin{pmatrix} p & \frac{p-q}{a-d}\, b \\ \frac{p-q}{a-d}\, c & q \end{pmatrix}$$

zu setzen ist. Den Sonderfall det $B_1 = 0$ erledigt man hier am bequemsten durch eine Transformation $U \to TU$, die B_1 in die Normalform $TB_1T^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ überführt, was eine Zerfällung des transformierten Differentialgleichungssystems bedeutet.

4. Die Matrizenrechnung ist mit Vorteil auch anwendbar bei der Reduktion eines Systems

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B_0\, u + B_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + B_m \frac{\partial u}{\partial x_m} \tag{4}$$

(u ein Vektor), soferne B_0 mit $B_1, \ldots, B_m$ vertauschbar ist. Bezeichnet $Y(t)$ die Fundamentallösung von $Y' = B_0 Y$, so transformiere man

$$u = Y(t)U.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von Y mit den $B_1, \ldots, B_m$ erhält man für U eine Gleichung der Form (1).

5. Auf einen etwas anderen Ansatz zur Gewinnung von Lösungen von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sei noch hingewiesen. Wir betrachten das System

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_1^l H_i U K_i + \sum_1^m B_j \frac{\partial U}{\partial x_j}, \tag{5}$$

worin U, H_i, K_i, B_j quadratische Matrizen und, von U abgesehen, konstant sind. Falls *alle B_j nicht singulär* sind („Vollnormalität"), ergeben sich auf folgende Weise Lösungen des Systems: Man setzt

$$U = W(x_1, \ldots, x_m)\, Z(t)$$

mit W und Z als Matrizen und läßt Z das gewöhnliche System

$$Z' = C_1 Z$$

erfüllen, wobei C_1 eine konstante Matrix bezeichnet, die mit allen K_i vertauschbar ist. Dann ist auch Z mit allen K_i vertauschbar, und unser Ansatz für U befriedigt (5), wenn noch

$$W C_1 = \sum H_i W K_i + \sum B_j \frac{\partial W}{\partial x_j}, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = B_1^{-1} W C_1 - \sum B_1^{-1} H_i W K_i - \sum_{2}^{m} B_1^{-1} B_k \frac{\partial W}{\partial x_k}, \tag{6}$$

d. h. wenn W einer Gleichung der Art (5) aber mit einer unabhängigen Veränderlichen weniger genügt. Fortsetzung des Verfahrens führt schließlich auf ein gewöhnliches System der Bauart

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \sum_i \tilde{H}_i V \tilde{K}_i.$$

Wenn die K_i untereinander vertauschbar sind – von den H_i und den B_j werden hier keine Vertauschbarkeitseigenschaften verlangt –, so kann man die hinzutretenden konstanten Matrizen (Parametermatrizen) $C_1, C_2, \ldots, C_m$ aus dem Polynomring der K_i wählen und ist der Mehrparametrigkeit der gewonnenen Lösung sicher; im übrigen kann man für diese C_j zumindest pE setzen, so daß bei jedem Reduktionsschritt mindestens ein Parameter hinzukommt. Dieses Verfahren gibt uns die Möglichkeit in die Hand, auch ohne Vertauschbarkeit der $B_0, B_1, \ldots, B_m$, soferne nur die $B_1, \ldots, B_m$ alle nicht singulär sind, zu größeren Lösungsmannigfaltigkeiten von (4) zu gelangen. Wir setzen

$$u = W(x_1, \ldots, x_m)\, z\,(t)$$

(W Matrix, z Vektor) mit $z' = Cz$, wo C eine beliebige konstante Matrix bezeichnet, und mit

$$WC = B_0 W + \sum B_j \frac{\partial W}{\partial x_j},$$

was eine Gleichung der Art (5) ist.

6. Die hier entwickelte matrizielle Behandlung scheint mir eine angemessene Methode beim Studium der Struktur der Lösungen von Systemen der Art (4) zu sein; dabei dürften die genannten Bedingungen der Nicht-Singularität und der Vertauschbarkeit

eine wichtige Rolle spielen. Von größtem Interesse ist natürlich die noch offene Frage, ob die hier aufgezeigten Lösungen so allgemein sind, daß damit die Gesamtheit aller Lösungen erfaßt wird. Möglicherweise sind dabei die Aufintegrationen im Sinne der Superposition, wie z. B. in der Formel (3), zu ersetzen durch Stieltjes-Integrale bzgl. allgemeiner vektorwertiger Maße. Dies legt schon eine diesbezügliche Betrachtung des „2-dimensionalen Laplace-Integrals“ (0) nahe. Hierüber soll eine folgende Note berichten.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1964

Band/Volume: 1963

Autor(en)/Author(s): Aumann Georg

Artikel/Article: Bemerkungen über normale Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 7-13