BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1963

MÜNCHEN 1964

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die Darstellung analytischer Mengen

Von Otto Forster und Karl Josef Ramspott

in München

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 8. November 1963

L. Kronecker [13] stellte 1882 den Satz auf, daß jede algebraische Menge im K^n (dabei sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper) sich als Nullstellengebilde von $n + 1$ Polynomen darstellen läßt. Lange glaubte man einem von K. Th. Vahlen [22] 1891 angegebenen Beispiel, das zeigen sollte, daß man im allgemeinen nicht mit weniger Polynomen auskommt. Erst 50 Jahre später zeigte O. Perron [15], daß das Vahlensche Beispiel nicht stichhaltig war. M. Kneser [12] bewies 1960, daß man für $n \leq 3$ tatsächlich nur n Polynome braucht. Für $n \geq 4$ ist das Problem noch offen.

Einen dem Satz von Kronecker entsprechenden Satz in der Funktionentheorie bewies 1956 H. Grauert [7]: Jede analytische Menge in einem n-dimensionalen holomorph-vollständigen komplexen Raum (insbesondere im C^n) läßt sich als Nullstellengebilde von höchstens $n + 1$ holomorphen Funktionen darstellen. Grauert vermutete sogleich, daß man die Schranke auf n verbessern könne. Wir beweisen die Vermutung in einer etwas verschärften Form durch vollständige Induktion nach der Dimension des komplexen Raums. Beim Induktionsanfang wird benützt, daß für jeden eindimensionalen, holomorph-vollständigen (nicht notwendig singularitätenfreien) komplexen Raum X die Cohomologiegruppe $H^2(X, Z)$ verschwindet. Der Beweis kann auf den algebraischen Fall nicht übertragen werden.

Im C^n ist bekanntlich jede rein $(n - 1)$-dimensionale analytische Menge schon das Nullstellengebilde einer einzigen holomorphen Funktion. Geht man zu n-dimensionalen holomorph-vollständigen Mannigfaltigkeiten über, so stimmt das im allgemeinen nicht mehr. Wir beweisen, daß man dann aber mit höchstens $1 + [n/2]$ holomorphen Funktionen auskommt. Diese Tatsache ergibt sich als Folgerung aus einem allgemeineren Satz über den Modul der holomorphen Schnitte eines komplex-analytischen Vektorraumbündels über einer Steinschen Mannigfaltigkeit.

Bezeichnungen:

C Körper der komplexen Zahlen
C^* multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen $\neq 0$
R Körper der reellen Zahlen
Z additive Gruppe der ganzen rationalen Zahlen
$GL(n, C)$ Gruppe der n-reihigen nichtsingulären Matrizen mit komplexen Koeffizienten
$[r]$ für reelles r die größte ganze Zahl $\leq r$.

I

Unter einem komplexen Raum verstehen wir einen im Sinne von J. P. Serre (vgl. [18] und [9]). Mit $\mathfrak{H}(X) := H^0(X, \mathcal{O})$ bezeichnen wir die Algebra der auf dem komplexen Raum X mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}$ holomorphen Funktionen, versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz. In dieser Topologie ist $\mathfrak{H}(X)$ vollständig. Hat X abzählbare Topologie, so ist $\mathfrak{H}(X)$ als Vektorraum über C sogar ein Fréchetraum [9].

Ein komplexer Raum X heißt holomorph-vollständig oder Steinsch, wenn er holomorph-separabel und holomorph-konvex ist. Er heißt holomorph-separabel, wenn zu jedem Punktepaar $x_1 \neq x_2$ aus X ein $f \in \mathfrak{H}(X)$ existiert mit $f(x_1) \neq f(x_2)$; holomoph-konvex, wenn es zu jeder Punktfolge $x_1, x_2, \ldots$ ohne Häufungspunkt auf X ein $f \in \mathfrak{H}(X)$ gibt mit $\lim\sup |f(x_\nu)| = \infty$. Nach H. Grauert [6] besitzt jede Zusammenhangskomponente eines holomorph-separablen Raums eine abzählbare Topologie.

Eine analytische Teilmenge X' eines komplexen Raumes X kann in natürlicher Weise wieder als komplexer Raum aufgefaßt werden. Ist X holomorph-vollständig, so auch X', und die holomorphen Funktionen auf X' ergeben sich als Beschränkung der holomorphen Funktionen auf X, d. h. $\mathfrak{H}(X') = \mathfrak{H}(X) \mid X'$. Ist

$M \subset \mathfrak{H}(X)$ irgend eine Menge von holomorphen Funktionen auf dem komplexen Raum X, so bezeichnen wir mit $V(M)$ ihr Nullstellengebilde:

$$V(M) := \{x \in X : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in M\}.$$

Ist A eine analytische Teilmenge von X, so ist

$$\mathfrak{J}(A) := \{f \in \mathfrak{H}(X) : f \mid A = 0\}$$

ein abgeschlossenes Ideal von $\mathfrak{H}(X)$. Ist X holomorph-vollständig, so gilt $V(\mathfrak{J}(A)) = A$, vgl. [4].

Satz 1. *Es sei X ein holomorph-vollständiger, n-dimensionaler komplexer Raum und $\mathfrak{a}$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathfrak{H}(X)$. Dann gibt es n Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{a}$ mit*

$$V(f_1, \ldots, f_n) = V(\mathfrak{a}).$$

Bemerkungen: 1. Der Satz gilt auch für jeden holomorph-prävollständigen Raum, d. h. jeden komplexen Raum X, für den $\mathfrak{H}(X)$ eine Steinsche Algebra ist, wie man durch Übergang zur Holomorphiehülle erkennt (vgl. [5]). Dazu zählen insbesondere alle Gebiete im C^n.

2. Nach dem vorher Gesagten folgt aus dem Satz, daß man in einem n-dimensionalen holomorph-vollständigen Raum X jede analytische Menge als Nullstellengebilde von n Funktionen darstellen kann. Der Satz sagt insofern mehr aus, als vom Ideal $\mathfrak{a}$ nicht verlangt wird, daß es das Ideal aller holomorphen Funktionen sei, die auf $V(\mathfrak{a})$ verschwinden. Diese Verschärfung ist notwendig, um den folgenden Induktionsbeweis durchführen zu können.

Beweis durch vollständige Induktion nach der Dimension von X. Man überlegt sich leicht, daß man dabei voraussetzen darf, daß X abzählbare Topologie hat.

Induktionsanfang. X ist ein eindimensionaler holomorph-vollständiger Raum. Es seien X_ν die höchstens abzählbar unendlich vielen irreduziblen Komponenten von X, die nicht ganz in $V(\mathfrak{a})$ enthalten sind. Auf jedem X_ν zeichne man einen Punkt x_ν

aus, der nicht in $V(\mathfrak{a})$ liegt. $\mathfrak{F}_\nu$ sei die Menge aller Funktionen aus $\mathfrak{a}$, die in x_ν nicht verschwinden. $\mathfrak{F}_\nu$ ist eine offene und dichte Teilmenge von $\mathfrak{a}$, da ihr Komplement ein echter abgeschlossener Untervektorraum von $\mathfrak{a}$ ist. Da $\mathfrak{a}$ ein vollständiger metrisierbarer Vektorraum ist, folgt aus dem Baireschen Dichtesatz [3], daß $\bigcap \mathfrak{F}_\nu$ dicht in $\mathfrak{a}$ liegt. Es gibt also ein $f \in \bigcap \mathfrak{F}_\nu \subset \mathfrak{a}$, das auf keinem der X_ν identisch verschwindet. Deshalb ist $V(f) = V(\mathfrak{a}) \cup B$, wo B nur aus isolierten Punkten besteht und $V(\mathfrak{a}) \cap B$ leer ist. Es sei $U_1 := X - V(\mathfrak{a})$ und $U_2 := X - B$. $\{U_1, U_2\}$ ist eine offene Überdeckung von X. Mit Hilfe dieser Überdeckung konstruieren wir ein holomorphes C^*-Bündel mit der Übergangsfunktion $g_{12} := f \mid U_1 \cap U_2$. Da $H^2(X, Z) = 0$, wie man durch Übergang zur Normalisierung erkennt (siehe auch [1]), ist dieses Bündel trivial [17]. Es gibt also nirgends verschwindende holomorphe Funktionen h_i in U_i mit $h_1 = g_{12} h_2$ in $U_1 \cap U_2$. Wir können deshalb durch

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) h_2(x) & \text{für } x \in U_2 \\ h_1(x) & \text{für } x \in U_1 \end{cases}$$

eine in ganz X holomorphe Funktion f_1 definieren, für die gilt $V(f_1) = V(\mathfrak{a})$. Da $\mathcal{O}_x f_1 \subset \mathcal{O}_x \mathfrak{a}$ für alle $x \in X$, ($\mathcal{O}_x$ ist der Halm der Strukturgarbe $\mathcal{O}$ von X), und $\mathfrak{a}$ ein abgeschlossenes Ideal ist, folgt nach einem Satz von H. Cartan $f_1 \in \mathfrak{a}$. Damit ist die Induktionsbasis gewonnen.

Induktionsschritt. Der Satz sei schon bewiesen für alle holomorph-vollständigen Räume der Dimension $< n$ und X sei n-dimensional ($n \geq 2$). Wie oben beweist man, daß es eine Funktion $f_n \in \mathfrak{a}$ gibt, die auf keiner irreduziblen Komponente von X, die nicht ganz in $V(\mathfrak{a})$ liegt, identisch verschwindet. Deshalb ist $V(f_n) = V(\mathfrak{a}) \cup X'$ mit einer höchstens $(n-1)$-dimensionalen analytischen Menge X'. Die Beschränkung $f \to f \mid X'$ liefert einen surjektiven Homomorphismus $\mathfrak{H}(X) \to \mathfrak{H}(X')$. Daher ist $\mathfrak{a}' := \mathfrak{a} \mid X'$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathfrak{H}(X')$, vgl. [5]. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $n-1$ Funktionen $f'_1, \ldots, f'_{n-1} \in \mathfrak{a}'$ mit $V(f'_1, \ldots, f'_{n-1}) = V(\mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}) \cap X'$. Wählen wir nun Funktionen $f_\nu \in \mathfrak{a}$ mit $f_\nu \mid X' = f'_\nu$, ($\nu = 1, \ldots, n-1$), so gilt $V(f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n) = V(\mathfrak{a})$, q. e. d.

II

Der Beweis des Satzes 1 läßt sich nicht auf den algebraischen Fall übertragen, da man sicher nicht in einer beliebigen n-dimensionalen affin-algebraischen Varietät jede algebraische Teilmenge durch n morphe Funktionen beschreiben kann, (jedoch immer durch $n + 1$). Wir geben eine eindimensionale affin-algebraische Mannigfaltigkeit und eine algebraische Teilmenge davon an, die nicht als Nullstellengebilde einer einzigen morphen Funktion auftritt. Unter einer affin-algebraischen Mannigfaltigkeit über dem Körper C verstehen wir dabei eine singularitätenfreie algebraische Teilmenge X eines C^k. Die Strukturalgebra $\mathfrak{R}(X)$ von X (= Algebra der morphen Funktionen auf X) ist die Beschränkung der Polynome im C^k auf X, d. h. es ist $\mathfrak{R}(X) \cong C[x_1, \ldots, x_k]/\mathfrak{J}(X)$, wo $\mathfrak{J}(X)$ das Ideal aller auf X verschwindenden Polynome bezeichnet.

Beispiel 1: *Es sei W die durch die Gleichung*

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \quad g_2, g_3 \in C \text{ mit } g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0,$$

beschriebene singularitätenfreie irreduzible algebraische Kurve im C^2. *Dann gibt es einen Punkt P auf W, so daß jedes Polynom, das in P verschwindet, noch eine weitere, von P verschiedene Nullstelle auf W hat.*

Bemerkung. Es gibt jedoch (nach Satz 1) eine holomorphe Funktion im C^2, die auf W nur in P verschwindet.

Beweis. Bekanntlich läßt sich W durch die Weierstraßsche $\wp$-Funktion und ihre Ableitung uniformisieren, siehe etwa [11]. D. h. es gibt Perioden $\omega_1, \omega_2 \in C^*$ mit nichtreellem Quotienten, so daß die durch

$$x = \wp\,(t; \omega_1, \omega_2)$$
$$y = \wp'\,(t; \omega_1, \omega_2)$$

definierte Abbildung Φ die komplexe Ebene, vermindert um die Punkte des Gitters $\Gamma := Z\omega_1 + Z\omega_2$, auf die Kurve W abbildet, und daß dabei nur Punkte, die bezüglich Γ äquivalent sind, in den selben Punkt übergeführt werden. Es bezeichne $\mathfrak{P}(\Gamma)$ die

Algebra derjenigen bzgl. Γ doppeltperiodischen Funktionen, die höchstens in den Gittereckpunkten Pole haben. Da $\wp, \wp' \in \mathfrak{P}(\Gamma)$ und jedes $f \in \mathfrak{P}(\Gamma)$ als Polynom in $\wp$ und $\wp'$ geschrieben werden kann, bildet die zu Φ transponierte Abbildung ${}^t\Phi$ die Algebra $\mathfrak{R}(W)$ isomorph auf $\mathfrak{P}(\Gamma)$ ab. Es sei jetzt $t_0 = r_1\omega_1 + r_2\omega_2$ mit beliebigen reellen Zahlen r_1 und r_2, wovon aber wenigstens eine irrational sein soll. Eine Funktion $f \in \mathfrak{P}(\Gamma)$ mit der genauen Nullstellenmenge $t_0 + \Gamma$ müßte dort Nullstellen etwa k-ter Ordnung, folglich in den Punkten von Γ Pole k-ter Ordnung haben. Eine solche elliptische Funktion kann aber nur existieren, wenn $kt_0 \in \Gamma$ (das ist ein Spezialfall des Abelschen Theorems [2]). t_0 wurde aber so gewählt, daß $kt_0 \notin \Gamma$. Daher gibt es auch keine Funktion $g \in \mathfrak{R}(W)$, die $P := \Phi(t_0)$ als einzige Nullstelle auf W hat, q. e. d.

In diesem Zusammenhang ist vielleicht noch erwähnenswert, daß jedes Ideal von $\mathfrak{R}(W)$ durch zwei Funktionen erzeugt werden kann, da $\mathfrak{R}(W)$ ein Dedekindscher Ring ist [19].

III

Der Satz 1 kann nicht verbessert werden, wenn man keine zusätzlichen Voraussetzungen über die zu beschreibende analytische Menge A macht. Denn wenn A irreduzible Komponenten der Codimension n enthält, kann A nicht Nullstellengebilde von weniger als n Funktionen sein. Man könnte jedoch vermuten, daß man zur Beschreibung einer analytischen Menge, deren irreduzible Komponenten alle eine Codimension $\leq n - 1$ haben, nur $n - 1$ Funktionen braucht. Daß eine solche Vermutung jedoch falsch ist, zeigt folgendes Gegenbeispiel (vgl. [21]).

Beispiel 2. Es sei X der holomorph-vollständige Raum $C^* \times C^*$ mit den Koordinaten z, w und A die irreduzible eindimensionale analytische Teilmenge von X, die durch die mehrdeutige Gleichung $z = w^i$ definiert wird ($i = \sqrt{-1}$). Dann hat jede auf X holomorphe Funktion, die auf A verschwindet, noch weitere Nullstellen.

B e w e i s. Es bezeichne D den durch die analytische Menge A mit der Vielfachheit 1 definierten Divisor auf X. Gäbe es ein

$f \in \mathfrak{H}(X)$ mit $V(f) = A$, so würde f etwa den Divisor D^k $(k > 0)$ lösen. Das charakteristische Element $h(D^k) = kh(D)$ $\in H^2(X, Z)$ wäre deshalb null [17]. Da $H^2(X, Z)$ unendlich zyklisch ist, müßte auch $h(D)$ verschwinden. $h(D)$ ist jedoch ein erzeugendes Element von $H^2(X, Z)$ [21], Widerspruch!

Mit der Darstellung 1-codimensionaler analytischer Mengen werden wir uns in Abschnitt V beschäftigen. Dazu brauchen wir einen Satz über holomorphe Geradenbündel, den wir gleich allgemeiner für Vektorraumbündel im folgenden Abschnitt beweisen.

IV

Es sei F ein holomorphes (= komplex-analytisches) Vektorraumbündel (siehe [20] und [10]) über der Steinschen Mannigfaltigkeit X mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}$, und $\mathcal{F}$ die zugehörige $\mathcal{O}$-Modulgarbe der Keime der holomorphen Schnitte von F. Mit $\mathfrak{M}(F) := H^0(X, \mathcal{F})$ bezeichnen wir den $\mathfrak{H}(X)$-Modul der holomorphen Schnitte von F. Nach den Theoremen A und B der analytischen Garbentheorie [4] erzeugt ein System $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{M}(F)$ genau dann über $\mathfrak{H}(X)$ den Modul $\mathfrak{M}(F)$, wenn es für jedes $x \in X$ über $\mathcal{O}_x$ den Halm $\mathcal{F}_x$ erzeugt.

Satz 2. *Es sei X eine n-dimensionale Steinsche Mannigfaltigkeit und F ein holomorphes d-dimensionales Vektorraumbündel über X. Dann besitzt der $\mathfrak{H}(X)$-Modul $\mathfrak{M}(F)$ ein Erzeugendensystem aus $r = d + [n/2]$ Elementen.*

Bemerkung. Wie aus dem folgenden Beweis hervorgeht, kann die Zahl r durch $d + [q/2]$ ersetzt werden, wenn bekannt ist, daß für jedes $p > q$ und jede abelsche Gruppe G die Cohomologiegruppe $H^p(X, G)$ verschwindet.

Beweis. L_{rd} sei die komplexe Mannigfaltigkeit aller komplexen Matrizen mit d Zeilen und r Spalten vom Rang d. Die Gruppe $GL(d, C)$ wirkt darauf durch Linksmultiplikation. Ist daher das Bündel F, dessen Faser wir uns als Raum der d-dimensionalen Spaltenvektoren vorstellen, bezüglich einer Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i, i \in I\}$ durch die holomorphen Übergangsfunktionen $g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(d, C)$ gegeben, so definieren dieselben Übergangsfunktionen auch ein holomorphes L_{rd}-Bündel L. Wir werden zeigen, daß L einen holomorphen Schnitt besitzt. Dazu genügt es nach [8] oder [16] zu beweisen, daß L einen stetigen Schnitt hat. Wir brauchen dafür Hilfsmittel aus der Hindernistheorie.

Ein kurvenzusammenhängender topologischer Raum Y heiße asphärisch bis zur Dimension q, wenn die Homotopiegruppen $\pi_k(Y)$ für $k < q$ verschwinden und $\pi_q(Y)$ abelsch ist. (Für $q > 1$ ist π_q immer abelsch.) Dann gilt folgender Satz (vgl. [20]):

Es sei X ein triangulierbarer topologischer Raum und für jede abelsche Gruppe G und jedes $p > q$ verschwinde die Cohomologiegruppe $H^p(X, G)$. Dann besitzt jedes Faserbündel über X mit kurvenzusammenhängender Strukturgruppe, dessen Faser Y asphärisch bis zur Dimension q ist, einen Schnitt.

Diesen Satz wenden wir an. Für eine Steinsche Mannigfaltigkeit X verschwinden nach [1] die Cohomologiegruppen $H^p(X, G)$ für $p > n$. Da man jede Matrix aus L_{rd} eindeutig als Produkt einer d-reihigen positiv-definiten hermiteschen Matrix mit einer $(d \times r)$-Matrix schreiben kann, deren Zeilen d unitär-orthogonale Vektoren sind, ist L_{rd} homöomorph zu $R^{d^2} \times W_{rd}$, wo W_{rd} die Stiefel-Mannigfaltigkeit der unitär-orthogonalen d-Beine im C^r ist. W_{rd}, also auch L_{rd}, ist asphärisch bis zur Dimension $2(r-d) + 1$, siehe [20]. Es ist $2(r-d) + 1 = 2[n/2] + 1 \geq n$, der Satz mit $q = n$ also anwendbar.

L besitzt also einen stetigen und somit auch einen holomorphen Schnitt. Betrachtet man in jeder Faser die r Spalten einzeln, so erhält man r holomorphe Schnitte $f_1, \ldots, f_r$ des ursprünglichen Vektorraumbündels F. Da die Spalten einer Matrix aus L_{rd} über C den ganzen Raum der d-dimensionalen Spaltenvektoren aufspannen, erzeugen $f_1, \ldots, f_r$ in jedem Punkt $x \in X$ über $\mathcal{O}_x$ den ganzen Halm $\mathcal{F}_x$. (Das folgt z. B. aus [14], Satz 5.1.) Daraus folgt die Behauptung unseres Satzes 2.

Aus Satz 2 folgt z. B., daß es auf einer n-dimensionalen Steinschen Mannigfaltigkeit X stets $r = \binom{n}{p} + \left[\frac{n}{2}\right]$ holomorphe Differentialformen $\omega_1, \ldots, \omega_r$ vom Grade p gibt, so daß sich jede in einem holomorph-vollständigen, offenen Teilraum Y von X holomorphe p-Form ω schreiben läßt als $\omega = f_1\omega_1 + \ldots + f_r\omega_r$, wo $f_1, \ldots, f_r$ in Y holomorphe Funktionen sind.

V

Ist X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und A eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge von X, so gibt es eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i,\ i \in I\}$ von X und holomorphe Funktionen f_i auf U_i, die in $U_i \cap A$ von 1. Ordnung und sonst nirgends verschwinden. In $U_i \cap U_j$ sind daher die Quotienten f_j/f_i holomorph und nirgends null. Durch die Übergangsfunktionen $g_{ij} := f_j/f_i$ wird daher ein holomorphes Geradenbündel F über X definiert. Ein holomorpher Schnitt von F wird repräsentiert durch eine Kollektion h_i von holomorphen Funktionen auf U_i mit $h_i = g_{ij}\, h_j$ in $U_i \cap U_j$. Ein solcher Schnitt liefert durch die Definition

$$h(x) := f_i(x)\, h_i(x) \text{ für } x \in U_i,$$

(die von i unabhängig ist), eine auf A verschwindende holomorphe Funktion h. Ist umgekehrt $f \in \mathfrak{H}(X)$ mit $f|A = 0$, so gewinnt man einen Schnitt von F, wenn man in U_i setzt $h_i := f/f_i$. Man sieht so, daß der Modul $\mathfrak{M}(F)$ der holomorphen Schnitte von F in natürlicher Weise dem Ideal $\mathfrak{I}(A)$ der auf A verschwindenden holomorphen Funktionen isomorph ist. Deshalb folgt aus Satz 2

Satz 3. *Es sei A eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in der n-dimensionalen Steinschen Mannigfaltigkeit X. Dann läßt sich A als genaues Nullstellengebilde von $r = 1 + [n/2]$ auf X holomorphen Funktionen darstellen. Diese r Funktionen lassen sich sogar so wählen, daß sie das Ideal $\mathfrak{I}(A)$ aller auf A verschwindenden holomorphen Funktionen erzeugen.*

Bemerkungen. 1. Wie Beispiel 2 zeigt, kann man ohne weitere Voraussetzungen über X die Zahl r zumindest für $n \leq 3$ nicht verkleinern. Jedoch kann man wie in Satz 2 die Zahl r durch $1 + [q/2]$ ersetzen, wenn $H^p(X, G) = 0$ für $p > q$. Ist $H^2(X, Z) = 0$, so kann man $r = 1$ setzen [17].

2. Wie Satz 3 beweist man auch folgende Verallgemeinerung: Ist D ein holomorpher Divisor auf einer n-dimensionalen Steinschen Mannigfaltigkeit, so besitzt das Ideal $\mathfrak{I}(D)$ aller holo-

morphen Funktionen, die Vielfaches von D sind, ein Erzeugendensystem aus $r = 1 + [n/2]$ Funktionen.

VI

Aus der großen Anzahl der im Zusammenhang mit unserem Thema offenen Fragen formulieren wir noch als einfaches Beispiel folgendes

Problem. Kann jede rein eindimensionale analytische Menge A im C^3 als Nullstellengebilde zweier holomorpher Funktionen dargestellt werden? Setzt man zusätzlich voraus, daß A singularitätenfrei und die Antwort auf die erste Frage ja ist, kann man dann die zwei Funktionen so wählen, daß sie das Ideal aller Funktionen, die auf A verschwinden, erzeugen?

Das entsprechende Problem in der algebraischen Geometrie ist ebenfalls noch ungelöst.

Literatur

[1] A. Andreotti and R. Narasimhan: A topological property of Runge pairs. Ann. of Math. 76 (1962) 499–509.

[2] H. Behnke und F. Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Berlin: Springer, 2. Aufl. 1962.

[3] N. Bourbaki: Topologie générale. Paris: Hermann 1953.

[4] H. Cartan: Variétés analytiques et cohomologie. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953, pp. 41–55.

[5] O. Forster: Primärzerlegung in Steinschen Algebren. Erscheint in Math. Ann.

[6] H. Grauert: Charakterisierung der holomorph-vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. 129 (1955) 233–259.

[7] H. Grauert: Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die Kählersche Metrik. Math. Ann. 131 (1956) 38–75.

[8] H. Grauert: Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. Math. Ann. 135 (1958) 263–273.

[9] H. Grauert und R. Remmert: Komplexe Räume. Math. Ann. 136 (1958) 245–318.

[10] F. Hirzebruch: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Erg. der Math. 9. Berlin: Springer, 2. Aufl. 1962.

[11] A. Hurwitz und R. Courant: Funktionentheorie. Berlin: Springer, 3. Aufl. 1929.

[12] M. Kneser: Über die Darstellung algebraischer Raumkurven als Durchschnitte von Flächen. Arch. Math. 11 (1960) 157–158.

[13] L. Kronecker: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. J. reine angew. Math. 92 (1882) 1–123.

[14] M. Nagata: Local rings. New York: Interscience 1962.

[15] O. Perron: Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker. Math. Z. 47 (1941) 318–324.

[16] K. J. Ramspott: Über die Homotopieklassen holomorpher Abbildungen in homogene komplexe Mannigfaltigkeiten. Sb. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl., 1962, 57–62.

[17] J. P. Serre: Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953, pp. 57–68.

[18] J. P. Serre: Géométrie algébrique et géométrie analytique. Ann. Inst. Fourier 6 (1955/56) 1–42.

[19] J. P. Serre: Corps locaux. Paris: Hermann 1962.

[20] N. Steenrod: The topology of fibre bundles. Princeton: University Press 1951.

[21] K. Stein: Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen zu vorgegebenen Nullstellenflächen. Math. Ann. 117 (1941) 727 bis 757.

[22] K. Th. Vahlen: Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumcurven. J. reine angew. Math. 108 (1891) 346–347.