BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1963

MÜNCHEN 1964

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Theorie der nahezu kommensurablen Bewegung der Planetoiden des Hecuba-Typus im Raum

Von Alexander Wilkens in München

Vorgelegt am 8. November 1963

In zwei früheren Abhandlungen, veröffentlicht in den „Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften": 1959, S. 61–101 habe ich eine Theorie der ebenen Bewegung der Planetoiden des Hestia-Typus des Sonnensystems entwickelt, d. h. derjenigen Planetoiden, deren mittlere Bewegung zu der des großen Planeten Jupiter nahezu im Verhältnis 3 : 1 (Hestia-Typus) steht, unter Berücksichtigung der säkularen und der entsprechenden kritischen Glieder. Weiter behandelte ich in einer 2. Abhandlung in den Sitzungsberichten vom Jahre 1960, S. 227–249 das entsprechende ebene Problem im Falle des Hecuba-Typus, bei dem das Verhältnis der mittleren Bewegungen des Planeten zu Jupiter nahezu 2 : 1 beträgt, so daß die kritischen Glieder der Störungsfunktion schon in den Termen 1. Grades der Exzentrizitäten, im erstgenannten Falle erst in den Termen 2. Grades auftreten. In der nun hier folgenden 3. Abhandlung gehe ich von der bisher ebenen Bewegung auf die räumliche Bewegung über, zuerst im Falle des Hecuba-Typus, dann in einer 4. Abhandlung im Falle des Hestia-Typus.

In der Theorie wollen wir in bezug auf die Entwicklung der Störungsfunktion R diejenige Form wählen, die Le Verrier in den „Mémoires", Bd. 10 der „Annales de l'Observatoire de Paris" vorgeschlagen hat, d. h. die klassische Form der Störungsfunktion nebst ihrer Entwicklungsform, aber doch noch in einer besonderen Form, wenn wir die Jupiter-Bahn als Grundebene wählen. Dann reduziert sich die gegenseitige Bahn-Neigung J bei Le Verrier zwischen Jupiter- und Planetoiden-Bahn, indem die Jupiterbahn die Neigung $i' = 0$ hat, auf die Abhängigkeit von I, der Bahn-Neigungsdifferenz zwischen beiden Bahnen, die wir mit i bezeichnen wollen. Dann reduziert sich der Bahnneigungs-Parameter $\eta = \sin \frac{1}{2} J$ bei Le Verrier auf

$$(1) \qquad \eta = \frac{1}{2} i,$$

wobei i also die allgemein kleine Bahn-Neigung des Planetoiden gegen die Jupiterbahn als Fundamentalebene fixiert, wenn wir noch von Gliedern 3. Grades in i absehen. Das nun infolge der genäherten Kommensurabilität kritische, also ausschlaggebende Winkel-Argument beim Hecuba-Problem hat die folgende Form:

$$(2) \qquad \zeta = 2l' - l - \tau \text{ resp. } \zeta' = 2l' - l - \tau',$$

wo $\tau = \Omega + \sigma$ resp. $\tau' = \Omega' + \sigma'$, wo σ und σ' die Abstände des sphärischen Bahn-Schnittpunktes von Planetoid und Jupiter vom aufsteigenden Knoten von Jupiter resp. dem Planetoiden bedeuten. Fällt nun der Schnittpunkt beider Bahnen, wenn $i' = 0$ wird, in die Ekliptik = Jupiterbahn, so reduziert sich τ auf Ω und ebenso wird $\tau' = \Omega'$, so daß ζ und ζ' übergehen in (2a) $\zeta = 2l' - l - \Omega$. Die dann nur von den Parametern i und Ω abhängende Störungsfunktion hat dann bei der räumlichen Bewegung im Hecuba-Problem die folgende Form:

$$(3) \qquad R = m' \left[\frac{1}{2} A^0 - \frac{1}{2} \eta^2 \cdot B^1 + \frac{1}{2} \eta^2 B^3 \cos 2\zeta + \ldots \right],$$

wo $\eta^2 = \frac{1}{4} i^2$ und wo das Argument die folgende Form hat:

$$(3a) \qquad 2\zeta = 4l' - 2l - 2\Omega,$$

und wo die Koeffizienten A^i, B^i die bekannten Laplaceschen Transzendenten sind und überall die Gaußsche Konstante $k^2 = 1$ sein soll, so daß die Zeiteinheit $\frac{1}{k} = 58.1335$ mittlere Tage fixiert.

Da die mittlere Länge des Planetoiden:

$$(4) \qquad l = \varepsilon + \int n \cdot dt,$$

wo ε die mittlere Länge der Epoche und n die mittlere Bewegung fixieren, so führt die Gleichung (2a): $\zeta = 2l' - l - \Omega$ bei Differentiation nach der Zeit in bezug auf das im Hecuba-Falle bei

Betrachtung der Bahn-Neigung und auf das in der Störungsfunktion allein auftretende Vielfache 2ζ auf die folgende Differentialgleichung:

$$(5) \quad \frac{d(2\zeta)}{dt} = 2\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d}{dt}(4l' - 2l - 2\Omega) = \\ = 4n' - 2n - 2\cdot\frac{d\varepsilon}{dt} - 2\frac{d\Omega}{dt}.$$

Zwecks Integration nach der Zeit ist in dieser letzten Darstellung zuerst noch der Term $\frac{d\varepsilon}{dt}$ als Funktion der Bahnelemente und der Zeit t zu untersuchen, ausgehend von der entsprechenden Gleichung auf Grund der Variation der Konstanten, wonach (s. Tisserands Traité de Mécanique Céleste, Bd. 1, pg. 169:

$$(6) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \sqrt{1-e^2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2\cdot e}\cdot\frac{\partial R}{\partial e} + \\ + \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i}.$$

Im Falle kleiner Bahn-Neigung i, wie wir sie voraussetzen wollen, beschränkt sich die rechte Seite von (6) bei der vorausgesetzten allgemeinen Beschränkung auf die Terme 2. Grades in i, auf den folgenden Ausdruck in bezug auf den letzten Term von (6): $\frac{1}{2}\frac{1}{na^2}\cdot i\cdot\frac{\partial R}{\partial i}$ wo $\frac{\partial R}{\partial i}$ nach (3), wenn $\eta = \frac{1}{2}i$ gesetzt wird, vom 1. Grade in i wird, also der Term $i\cdot\frac{\partial R}{\partial i}$ vom 2. Grade in i wird, also berücksichtigen ist, so daß der Nenner $\sqrt{1-e^2}$ in (6) ohne Entwicklung gleich 1 zu setzen bleibt. Weiter ergibt sich in bezug auf den vorletzten Term in (6) bei Entwicklung des Faktors von $\frac{\partial R}{\partial e}$ der Gesamtkoeffizient: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{na^2}e\frac{\partial R}{\partial e}$, der in 1. Näherung ein Term in e^1 allein ist, der in unserem Problem nicht in Frage kommt. Schließlich enthält der 1. Term von (6): $-2\sqrt{a}\frac{\partial R}{\partial a}$ wegen R nach (3) säkulare wie kritische Glieder vom 2. Grade der Neigung, wobei der nur von a abhängige rein säkulare Teil-Term wegzulassen ist, da er bei Integration bereits in der beobachteten mittleren Bewegung enthalten ist: im übrigen bleibt noch folgendes zu berücksichtigen, wenn wir $\frac{\partial R}{\partial a}$ explizit fixieren:

$$(7) \qquad \frac{\partial R}{\partial a} = \frac{1}{2}\, m' \left[\frac{dA^0}{da} + \eta^2 \left(-\frac{dB^1}{da} + \frac{dB^3}{da} \cos 2\,\zeta\right]\right),$$

wo also noch $\frac{dA^0}{da}$ nach i^2 zu entwickeln bleibt, sobald a weiter unten als Funktion von i entwickelt sein wird. Weiter ist der von der räumlichen Bewegung, d. h. zugleich von η und ζ abhängende Term der Störungsfunktion nach (3):

$$(8) \qquad \Delta R = \frac{1}{2}\, m' \cdot B^3\, \eta^2 \cos 2\zeta, \text{ wo } \zeta = 2l' - l - \Omega,$$

woraus in bezug auf die Ableitungen nach l und Ω folgt:

$$(9) \qquad \frac{\partial R}{\partial l} = \frac{\partial R}{\partial \Omega},$$

wonach ein Integral ableitbar sein muß, weil diese Ableitungen zu den zeitlichen Ableitungen der Elemente a und in i Beziehung stehen müssen. Zunächst ist nämlich die zeitliche Ableitung von a bekanntlich:

$$(10) \qquad \frac{(d\sqrt{a})}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \lambda};$$

weiter ist $\tau' = \tau + (\tau' - \tau)$, wo $\tau' - \tau$ bei kleinen Bahn-Neigungen eine kleine Größe 2. Ordnung in i und i' ist (s. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, Bd. 1, S. 295, Formel [6]). Dann ist weiter in bezug auf die Differentialgleichung der Neigung i gemäß der Theorie der Variation der Konstanten:

$$(11) \qquad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{\sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\, i\right)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right).$$

Der vorletzte Term dieser Gleichung in bezug auf: $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\, i \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega}$ ist mindestens vom 1. Grade in i, ebenso wie in e, also mindestens vom 2. Grade: $i \cdot e$. und entfällt wegen derAbhängigkeit von $e\ i$; der letzte Term in bezug auf $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ ist in bezug auf die kritischen Terme $4l' - 2l - 2\tau$ der Störungsfunktion mindestens vom 2. Grade in $\eta = \frac{1}{2}\, i$, also der Gesamt-Term: $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\, i\right) \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ vom 3. Grade, deshalb also wegfallend. Es verbleibt in (11) nur der erste Term: $\frac{1}{i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega}$, der vom 1. Grade in i ist, weil $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ vom 2. Grade in η resp. i ist. Da weiter in unserem Falle nach (2): $\zeta = 2\,l' - l - \Omega$, folglich $\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{\partial R}{\partial l}$, so ergibt sich nach (11) und dann mittels (10) die neue Gleichung:

$$(12) \quad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial l} = -\frac{1}{i\sqrt{a}} \frac{d(\sqrt{a})}{dt} = -\frac{1}{i} \frac{d[ln(\sqrt{a})]}{dt}$$

oder (13) $d\,(\ln \sqrt{a}) = -\frac{1}{2}\,d(i^2)$, also bei Integration mit dem gesuchten Resultat der Darstellung von a als $f(i)$, indem bei Integration erhalten wird: $\ln (a) = -\frac{1}{2}\,(i^2 - i_*^2)$ mit i_* als Integrationskonstante, so daß folglich weiter: $\ln \left(\sqrt{a}\right) = -\frac{1}{2}\,(i^2 - i_*^2)$ mit i_* als Integrationskonstante, womit der Endausdruck für a erhalten wird: (14) $a = a_* \cdot E^{-i^2}$, mit $a_* = E_*^{i^2}$, so daß schließlich weiter die Darstellung von a als Funktion von i lautet: (15) $a = a_*\,(l - i^2)$, womit also a als Funktion von i definitiv dargestellt ist, bis zum 2. Grade von i einschließlich. Ist zur Zeit der Epoche $t = t_0 : a = a_0$, so folgt zur Darstellung von a_* durch a_0 nach (15) : (16) $a_* = \frac{a\,o}{1 - i_0^2} = a_0\,(1 + i_0^2 + \ldots)$. Analog folgt weiter in bezug auf die mittlere Bewegung n: (17): $n = \frac{1}{a^{3/2}} = n_*\,(1 + \frac{3}{2}\,i^2)$, wo $n_* = \frac{1}{a_*^{3/2}}$ und ferner nach (17) n_* als Funktion des Anfangswertes $n_0 : n_* = n_0\,(1 - \frac{3}{2}\,i_0^2 \ldots)$, so daß immer $n_* < n_0$, also $a_* > a_0$.

Nach der obigen Darstellung und ersten Integration der großen Halbachse als Funktion der Bahn-Neigung i ergibt sich nun die Frage nach dem weiteren Wege der Integration zur Darstellung der übrigen Elemente als Funktion der Bahn-Neigung, und zwar zuerst in bezug auf den kritischen Winkel ζ. Um auch diese Variable als Funktion von i zu erhalten, haben wir von der dazu nötigen Relation $\frac{d\zeta}{di}$ auszugehen, indem wir also bilden:

$$(18) \qquad \frac{d\zeta}{di} = \frac{\frac{d\zeta}{dt}}{\frac{di}{dt}} = \frac{Z(i,\zeta)}{N(i,\zeta)},$$

so daß zunächst die Funktionen Z und N zu bilden sind, und zwar unmittelbar auf Grund der Differentialgleichungen für $\frac{d\zeta}{dt}$ und $\frac{di}{dt}$. Zuerst ist dann:

$$(19) \quad Z = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d}{dt}(2l' - l - \Omega), \text{ wo } l = \varepsilon + \int n \cdot dt,$$

wo im vorliegenden Untersuchungsfalle in bezug auf die nur säkularen und langperiodischen Störungen der Neigung und des Knotens in der Störungsfunktion nur Argumente der Form: $A = 2\zeta = 4l' - 2l - 2\Omega$ auftreten, so daß

$$(20) \qquad \frac{dA}{dt} = 2\frac{d\zeta}{dt} = 4 \cdot n' - 2 \cdot n - 2\frac{d\varepsilon}{dt} - 2\frac{d\Omega}{dt},$$

wobei n bereits in (17) mittels $n = n_* \left(1 + \frac{3}{2} i^2\right)$ als Funktion von i dargestellt wurde; ferner folgt noch nach der Darstellung von $\frac{d\varepsilon}{dt}$ in (6) nach der Darstellung von R in (3) rechter Hand in bezug auf den Term:

$$(21\,\mathrm{a}) \; \frac{1}{2}A^0 = \frac{1}{2}\left[A^0(a_*) + (a - a_*)\left(\frac{dA^0}{da}\right)_* + \frac{(a-a_*)^2}{2!}\left(\frac{d^2A^0}{da^2}\right)_* + \ldots\right],$$

so daß analog direkt folgt:

$$(21\,\mathrm{b}) \quad \frac{1}{2}\frac{dA^0}{d\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dA^0}{da}\right)_* + (a - a_*)\left(\frac{d^2A^0}{da^2}\right)_* + \ldots\right].$$

Nach (6) lautet dann der 1. Teil von $\frac{d\varepsilon}{dt}$, da $\frac{1}{na} = \sqrt{a}$:

$$(22) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = 1.\text{Teil} = -2\sqrt{a}\,\frac{\partial R}{\partial a} = 2\sqrt{a_*}\left(1 - \frac{1}{2}i^2\right)\frac{\partial R}{\partial a},$$

wo $\frac{R\partial}{\partial a}$ gemäß (7) fixiert ist, so daß schließlich, geordnet nach i^2, unter Weglassung des konstanten Teils, weil dieser in dem beobachteten n enthalten ist:

$$(23) \quad \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_1 = \sqrt{a_*} \cdot m' \cdot i^2 \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{dB^1}{da}\right)_* + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{dB^3}{da}\right)_* \cos 2\zeta - \frac{1}{2}\left(\frac{dA^0}{da}\right)_* - a_*\left(\frac{d^2A^0}{da^2}\right)_*\right].$$

Es fehlt dann noch die Behandlung des letzten, 3. Termes von (6) in bezug auf:

$$\text{(24)} \qquad \text{pars}\ \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\, i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i},$$

wo nach der Darstellung von R in (3) zunächst folgt:

$$\text{(25)} \qquad \frac{\partial R}{\partial i} = m' \left[\frac{1}{4}\, i \cdot B^3 \cdot \cos 2\,\zeta - \frac{1}{4}\, i\, B^1\right],$$

d. h. ein Term 1. Grades in i; die Koeffizienten B^1 und B^3 brauchen nicht noch nach i^2 entwickelt zu werden, entsprechend dem Integral: $a = a_* (1 - i^2)$, weil alsdann Terme 3. Grades in $\frac{\partial R}{\partial i}$ erscheinen würden, die vernachlässigt werden. Dann aber reduziert sich pars 2 von $\frac{d\varepsilon}{dt}$ gemäß (24) auf:

$$\text{(26)} \qquad \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_3 = \frac{1}{8}\, m' \,[B^3_* \cos 2\zeta - B^1_*] \cdot \frac{i^2}{\sqrt{a_*}},$$

wo der Nenner $\sqrt{1-e^2}$ weggefallen ist, weil sonst Terme in $i^2 \cdot e^2$ entstanden wären, die vernachlässigt werden, abhängig vom 4. Grade, noch mit e^2 behaftet. Schließlich ist dann $\frac{d\varepsilon}{dt}$ durch die Zusammenfassung: $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_3}{dt}$ fixiert.

Zur Darstellung von $\frac{d\zeta}{dt}$ fehlt nun noch die Darstellung von $\frac{d\Omega}{dt}$, fixiert durch die Differentialgleichung (s. Tisserand: Traité de Mécanique Céleste, Bd. 1, S. 169:

$$\text{(28)} \qquad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{n a^2 \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}},$$

wo der Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = 1 + \frac{1}{2} e^2 + \ldots$, ferner der Faktor: $\frac{1}{i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} =$ o. Grad in i, so daß folglich die Terme in e^2 wegfallen. Weiter ist der Divisor $n \cdot a^2 = \sqrt{a}$, wo wieder nach: (15) $a = a_* \cdot (1 - i^2)$, ferner bei Entwickelung: $\frac{1}{\sin i} = \frac{1}{i}\left(1 + \frac{1}{6}\, i^2 + \ldots\right)$, also folglich: $\frac{1}{n a^2 \sin i} = \frac{1}{i \sqrt{a_*}} \left(1 + \frac{2}{3}\, i^2 + \ldots\right)$, so daß schließlich die Differentialgleichung für die Knotenlänge die folgende Form annimmt:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a_*}}\left(1 + \frac{2}{3}i^2\right)\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial R}{\partial i}. \tag{29}$$

Da nun die rechte Seite dieser Gleichung wie im Falle der früheren Elemente bis zum 2. Grade in i zu entwickeln ist, haben wir den Faktor $\frac{1}{i}\frac{\partial R}{\partial i}$ noch bis zu den Termen 2. Grades darzustellen, in R selbst also bis zu den Termen 4. Grades von i zu entwickeln, nachdem wir früher schon die Terme 2. Grades der Störungsfunktion fixiert haben (siehe die Darstellung in (3)). Die Zusatz-Terme 4. Grades der Störungsfunktion lauten nun nach den „Recherches Astronomiques" von Le Verrier in den „Annales de l'Observatoire de Paris", Bd. 10, S. 38 in bezug auf die Terme 4. Grades:

$$R_4 = +\frac{1}{2}G^0\cdot\eta^4 - L^4\cdot\eta^4\cos 2\zeta + \frac{3}{8}C^6\eta^4\cos 4\zeta, \tag{30}$$

wobei die Koeffizienten G^0, L^4, C^6 von Le Verrier in den „Annales de l'Observatoire de Paris" Tome 10, pg. 32 als Funktionen der Laplaceschen Transcendenten definiert worden sind, also:

$$G^0 = \frac{3}{4}(C^2 + 2C^0),\ L^4 = \frac{3}{4}(C^2 + C^4),\ C^6 = \frac{1}{a'}\alpha^2\cdot e^6, \tag{30a}$$

so daß also die Berechnung der Koeffizienten C^0, C^2, C^4, C^6 mittels e^0, e^2, e^4, e^6 als Funktionen von $\alpha = \frac{a\,x}{a^*}$ (a' = halbe große Achse der Jupiterbahn), also nach den Formeln von Le Verrier im 10. Bande der „Recherches etc.", S. 10–32, oder auch nach der Veröffentlichung des Verfassers im 166. Bande der „Astron. Nachrichten", Nr. 14 (Jahrgang 1904) berechnet werden können.

Auf Grund der Definitionen der beiden Teile von R nach (3) und (30) mit Rücksicht darauf, daß die Laplaceschen Transcendenten B^k von a, also nach (15) von der Neigung i abhängig sind, so daß $\frac{da}{dt} = -2i\,a_*\cdot\frac{di}{dt}$ folgt zunächst:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial i} = &-\frac{1}{4}i\cdot B^1 + \frac{1}{4}i\cdot B^3\cos 2\zeta - \frac{1}{8}i^2\frac{dB^1}{di} + \frac{1}{8}i^2\left(\frac{dB^3}{di}\right)\cdot\cos 2\zeta\\ &+\frac{1}{8}G^0\cdot i^3 - \frac{1}{4}L^4\cdot i^3\cos 2\zeta + \frac{1}{32}C^6\cdot i^3\cos 4\zeta.\end{aligned} \tag{31}$$

Infolge der Abhängigkeit der von $a = a_* (1 - i^2)$ abhängenden Funktionen B_i^k ergibt sich weiter bei Potenz-Entwicklung bis i^2 einschließlich:

$$B^k = B_*^k - a_* \cdot i^2 \left(\frac{dB^k}{da}\right)_*, \tag{32}$$

so daß:

$$\frac{dB^k}{di} = -2 a_* i \left(\frac{dB^k}{da}\right)_*, \tag{33}$$

und folglich weiter gemäß (31) die neue Form erhalten wird:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\frac{\partial R}{\partial i} = &-\frac{1}{4} B^1 + \frac{1}{4} B^3 \cdot \cos 2\zeta - \frac{1}{8} i \frac{dB^1}{di} + \frac{1}{8} i \frac{dB^3}{di} \cos 2\zeta \\ &+ \frac{1}{8} G_0 \cdot i^2 - \frac{1}{4} L^4 \cdot i^2 \cdot \cos 2\zeta + \frac{3}{32} C^6 i^2 \cos 4\zeta.\end{aligned} \tag{34}$$

Die Substitution von $a = a_* (1 - i^2)$ ergibt dann die folgende Darstellung für die noch in (34) bis zur 2. Potenz in i benötigten Differenzen:

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4} B^1 + \frac{1}{4} B^3 \cos 2\zeta = \\ &= -\frac{1}{4}\left\{B_*^1 - B_*^3 \cos 2\zeta - a_* \cdot i^2 \left[\left(\frac{dB^1}{da}\right)_* - \left(\frac{dB^3}{da}\right)_* \cos 2\zeta\right]\right.\end{aligned} \tag{35a}$$

Analog folgt entsprechend für das 2. Differenzenpar in (34) gemäß (33a):

$$-\frac{1}{8} i \frac{dB^1}{di} + \frac{1}{8} i \frac{dB^3}{di} \cos 2\zeta = \frac{1}{4} a_* \cdot i^2 \left[\left(\frac{dB^1}{da}\right)_* - \left(\frac{dB^3}{da}\right)_* \cos 2\zeta\right]. \tag{35a}$$

Die restlichen Terme in (34) bleiben, weil schon vom 2. Grade in i, unverändert, wobei also: $G^0 = G_*^0$, $L^4 = L_*^4$ und $C_6 = C_*^6$ zu setzen ist, womit die Darstellung (34) von $\frac{1}{i}\frac{\partial R}{\partial i}$ als Potenzreihe nach i bis i^2 vollzogen ist.

Der Übergang von $\frac{d\Omega}{dt}$ auf die definittive Form nach (29) mit Rücksicht auf den Faktor $1 + \frac{2}{3} i^2$ als Potenzreihe nach i auf Grund obiger Darstellungen von (35a), (35b) und (35c) ergibt dann die neue Darstellung:

$$(36)\quad \begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} = \frac{m'}{\sqrt{a_*}}\Big\{&-\frac{1}{4}\left(B_*^1 - B_*^3 \cos 2\zeta\right) + \frac{1}{2} a_* \cdot i^2 \left[\left(\frac{dB^1}{da}\right)_* - \left(\frac{dB^3}{da}\right)_* \cos 2\zeta\right] + \\ &+ i^2 \left[\frac{1}{8} G^0 - \frac{1}{4} L^4 \cos 2\zeta + \frac{3}{32} C^6 \cos 4\zeta - \frac{1}{6}\left(B_*^1 - B_*^3 \cos 2\zeta\right)\right]\Big\}.\end{aligned}$$

Zusammenfassend können wir der neuen Darstellung von $\frac{d\Omega}{dt}$ die allgemeine Form geben:

$$(36a)\qquad \frac{d\Omega}{dt} = m_0 + m_2 \cdot i^2,$$

wo die Koeffizienten m_0 und m_2 direkt aus (36) ablesbar und später in (48) fixiert sind. Damit ist nun der letzte Term in (19): $\frac{d\zeta}{dt}$ d. h. $\frac{d\Omega}{dt}$ als Funktion von i dargestellt, so daß zur Darstellung von (18) $\frac{d\zeta}{di}$ noch die Darstellung von $\frac{di}{dt} = N$ verbleibt, und zwar auf Grund von (3) und (11), so daß man die folgende Gleichung erhält, unter Vernachlässigung der Terme 3. Grades in i:

$$(37)\qquad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{4}\, m'\, \frac{1}{\sqrt{a_*}}\, i \cdot B^3 \cdot \sin 2\zeta,$$

während die weiteren Terme bereits vom 3. Grade in i, also zu vernachlässigen sind. Weiter verbleibt die Darstellung von $\frac{d\zeta}{dt}$ nach (19), auf deren rechter Seite alle Terme bereits als Funktionen von i und ζ dargestellt worden sind; unter Zerlegung noch von $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_3}{dt}$ gemäß (23) und (26) folgt alsdann als Darstellung von $\frac{d\zeta}{dt}$:

$$(38)\quad \begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt} = 2n' - n_*\left(1 + \frac{3}{2} i^2\right) - m' \sqrt{a_*} \cdot i^2 \Big[&\frac{1}{2}\left(\frac{dA^0}{da}\right)_* \\ &+ \frac{1}{4}\left(\frac{dB^1}{da}\right)_* - \frac{1}{4}\left(\frac{dB^3}{da}\right)_* \cos 2\zeta + \\ &+ a_*\left(\frac{d^2A^0}{da^2}\right)_* + \frac{1}{8}\frac{1}{a_*} B_*^3 \cos 2\zeta - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{a_*} B_*^1\Big] - \frac{d\Omega}{dt},\end{aligned}$$

wo $\frac{d\Omega}{dt}$ in (36) bereits dargestellt worden ist. Somit ist es nun möglich, gemäß (10) die Differentialgleichung

$$\frac{d\zeta}{di} = \frac{Z}{N} = F(i, \zeta) \tag{39}$$

zu bilden, als Grundlage zur Darstellung von ζ als Funktion von i, wo wir (39) mit Rücksicht auf Form und Lösung noch die folgende Darstellung geben wollen:

$$N \frac{d\zeta}{di} = Z; \tag{40}$$

dabei ist nach (11) und (3) unter Wegfall von i^3:

$$\left\{\begin{aligned} N &= \frac{di}{dt} = -\frac{1}{ina^2}\frac{\partial R}{dl} = -\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^3 i \sin 2\zeta \\ Z &= \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d}{dt}[2l' - l - \Omega] = 2n' - n - \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\Omega}{dt}, \end{aligned}\right. \tag{41}$$

wo $\frac{d\varepsilon}{dt} = \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_1 + \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_3$ und $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$ und $\frac{d\varepsilon_3}{dt}$ nach (23) und (26) fixiert worden sind. Bemerkenswert ist, daß $\frac{d\Omega}{dt}$ in (36) mit einem Term in $i^2 \cdot \cos 4\zeta$ behaftet ist.

Damit sind auf Grund der Darstellung (41) die Koeffizienten N und Z soweit entwickelt, daß wir die Gleichung (40) nunmehr in bezug auf $\frac{d\zeta}{di}$ auf die Endform bringen können, die den Typus der Differentialgleichung und damit ihre Lösung erkennen lassen wird, um zunächst ζ als Funktion von i darzustellen. Da nun N bereits in (41) dargestellt wurde, verbleibt noch die explizite von $Z = \frac{d\zeta}{dt}$, wobei nach (23) und (26) bereits $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_3}{dt}$ dargestellt wurden und ferner nach (15) unmittelbar folgt:

$$n = n_*\left(1 + \frac{3}{2} i^2\right) \text{ (s. 17).}$$

Weiter handelt es sich nun um die Aufstellung der aus der Differentialgleichung (18) folgenden weiteren Gleichung:

$$N \frac{d\zeta}{dt} = Z = 2n' - n - \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\Omega}{dt}, \tag{42}$$

oder weiter nach Substitution der Darstellungen von N und Z nach (41):

$$(43)\qquad -\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}\cdot B^3\cdot i\cdot\sin 2\zeta = 2n' - n - \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\Omega}{dt},$$

wo zuerst als Funktion von i und ζ zu substituieren ist: $n = n_*\left(1+\frac{3}{2}i^2\right)$ und ferner in $\frac{d\varepsilon}{dt}$ nach (22) resp. nach (23) und (26) der konstante Teil von $\frac{d\varepsilon}{dt}$ wegzulassen ist, weil dieser konstante Teil schon in der beobachteten Länge enthalten ist mittels des beobachteten n, so daß nach (23) und (26) die folgenden Terme in i^2 verbleiben:

$$(44)\qquad \begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt} = m'\cdot i^2\Big\{&\frac{1}{2}\sqrt{a_*}\left(\frac{dA^0}{da}\right)_* + a_*^{3/2}\left(\frac{d^2A^0}{da^2}\right)_* + \frac{1}{4}\sqrt{a_*}\left(\frac{dB^1}{da}\right)_* - \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{a_*}}B_*^1 +\\ &+\left[\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{a_*}}B_*^3 - \frac{1}{4}\sqrt{a_*}\left(\frac{dB^3}{da}\right)_*\right]\cos 2\zeta\Big\}.\end{aligned}$$

Weiter befindet sich die definitive Darstellung von $\frac{d\Omega}{dt}$ schon in (36) resp. (36a), womit nun alle Terme in (43) als Funktionen von ζ und i fixiert sind. Setzen wir noch im linken Faktor von (43): $\sin 2\zeta\cdot d\zeta = -\frac{1}{2}d(\cos 2\zeta)$, so erhalten wir die neue Darstellung der Hauptgleichung:

$$(45)\qquad +\frac{1}{8}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}B^3\frac{d(\cos 2\zeta)}{di} = 2n' - n - \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\Omega}{dt},$$

wo nun rechts eine Zusammenfassung der Terme vorzunehmen ist, zuerst in bezug auf die Darstellung von $n = n_*\left(1+\frac{3}{2}i^2\right)$, dann weiter (44) entsprechend:

$$(46)\qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = i^2(k_1 + k_2\cos 2\zeta),$$

wo die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$(46\text{a})\qquad \begin{cases} k_1 = m'\left[\frac{1}{4}\sqrt{a_*}\left(\frac{dB^1}{da}\right)_* + a_*^{3/2}\left(\frac{d^2A^0}{da^2}\right)_* + \frac{1}{2}\sqrt{a_*}\left(\frac{dA^0}{da}\right)_*\right] \\ k_2 = m'\left[\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{a_*}}B_*^3 - \frac{1}{4}\sqrt{a_*}\left(\frac{dB^3}{da}\right)_*\right].\end{cases}$$

Ferner wird nach (36):

$$\frac{d\Omega}{dt} = m_0 + i^2 \cdot m_2, \tag{47}$$

wo:

$$m_0 = \frac{m'}{\sqrt{a_*}}\left[-\frac{1}{4} B_*^1 + \frac{1}{4} B_*^3 \cos 2\zeta\right] \tag{47a}$$

$$m_2 = \frac{m'}{\sqrt{a_*}}\left[-\frac{1}{6} B_*^1 + \frac{1}{6} B_*^3 \cos 2\zeta + \frac{1}{2} a_* \left(\frac{dB}{da}\right)_* - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} a_* \left(\frac{dB^3}{da}\right)_* \cos 2\zeta + \frac{1}{8} G_*^0 - \frac{1}{4} L_*^4 \cos 2\zeta + \frac{3}{32} C_*^6 \cos 4\zeta\right], \tag{47b}$$

so daß, wenn weiter:

$$m_0 = m_0' + m_0'' \cdot \cos 2\zeta \text{ und } m_2 = m_2' + m_2'' \cdot \cos 2\zeta + m_2''' \cdot \cos 4\zeta, \tag{48}$$

die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned}
m_0' &= -\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^1, \quad m_0'' = \frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^3, \\
m_2' &= +\frac{m'}{\sqrt{a_*}}\left[-\frac{1}{6} B_*^1 + \frac{1}{2} a_* \left(\frac{dB^1}{da}\right)_* + \frac{1}{8} G_*^0\right] \\
m_2'' &= -\frac{m'}{\sqrt{a_*}}\left[\frac{1}{4} L_*^4 + \frac{1}{6} B_*^3 - \frac{1}{2} a_*, \left(\frac{dB^3}{da}\right)_*\right], \\
m_2''' &= \frac{3}{32}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} C_*^6 .
\end{aligned} \tag{49}$$

Jetzt bleibt weiter in Hinsicht auf die Differentialgleichung (40) $N\frac{d\zeta}{di} = Z$ die Darstellung der Funktion Z auf Grund der Definition von Z in dem Gleichungs-System (41), wobei zuerst nach früherer Darstellung $n = n_*\,(1 + \frac{3}{2}\,i^2)$ und die beiden anderen Summanden als Funktion von i und ζ schon oben fixiert wurden, indem nach (46) $\frac{d\varepsilon}{dt} = (k_1 + k_2 \cos\zeta)\,i^2$, wo die Koeffizienten k_1 und k_2 dort (46a) ebenfalls definiert sind, so daß schließlich $\frac{d\Omega}{dt}$ nach (47) zu substituieren bleibt.

Folglich lautet dann die Darstellung von Z nach (41) und (46) wie folgt, indem $Z = 2n' - n - \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\Omega}{d\cdot}$, also bei Substitution von $\frac{d\varepsilon}{dt}$ und $\frac{d\Omega}{dt}$ nach (46) und (47):

$$(51\,\mathrm{a})\quad Z = \frac{d\zeta}{dt} = 2n' - n_*\left(1 + \frac{3}{2}i^2\right) - i^2(k_1 + k_2 \cdot \cos 2\zeta) - (m_0 + m_2 i^2),$$

wo k_1 und k_2 bereits in (46a) definiert wurden, wobei noch vermerkt sei, daß m_2 nach (48) auch noch einen Term in $\cos 4\zeta$ enthält. Folglich können wir Z weiter die neue Form geben:

$$(51\,\mathrm{b})\quad Z = \frac{d\zeta}{dt} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \cos 2\zeta + \alpha_2 i^2 + \alpha_3 i^2 \cdot \cos 2\zeta + \alpha_4 i^2 \cos 4\zeta,$$

wo die Koeffizienten αi ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) mit Rücksicht auf $a = a_*(1 - i^2)$ von $\frac{a_*}{a'} = \alpha_*$ abhängige Konstanten bedeuten, wobei a' die Halbachse der Jupiterbahn, so daß für $t = t_0$: $a_* = \frac{a_0}{1 - i_0^2}$, wenn wieder a_0, i_0 die für $t = t_0$ gültigen Werte von a und i bedeuten; zu beachten ist dabei, daß dann der Faktor $\alpha_0 : \alpha_0 = 2n' - n_* - \frac{d\varepsilon}{dt}$ (konstanter Teil) $- \frac{d\Omega}{dt}$ (konstanter Teil), wobei aber der konstante Teil von $\frac{d\varepsilon}{dt}$ wegfällt, weil schon verbunden mit dem beobachteten n, ferner der konstante Teil von $\frac{d\Omega}{dt}$ nach (47) aus $m_0 + i^2 \cdot m_2$ stammt, wonach der konstante Teil beträgt: $-\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^1$; folglich lauten die Koeffizienten α_i wie folgt, noch versehen mit dem Faktor $1/F$, wo (51c) $F = \frac{1}{8}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}$:

$$(52)\quad \begin{cases} \frac{1}{F}\alpha_0 = \frac{1}{F}\left[2n' - n_* + \frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^1,\right] \\ \frac{1}{F}\alpha_1 = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{F}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^3,\ \frac{1}{F}\alpha_2 = -\frac{1}{F}\left(\frac{3}{2}n_* - k_1 - m_2\right) \\ \frac{1}{F}\alpha_3 = \frac{1}{F}(-k_2 - m_2''),\ \frac{1}{F}\cdot\alpha_4 = -\frac{3}{32}m' C_*^6, \end{cases}$$

womit nun die Koeffizienten der rechten Seite von Z (51b) dargestellt sind.

Nach dieser Darstellung von N und Z betrachten wir nun die aus (41) folgende Differentialgleichung:

$$(53) \qquad N \cdot \frac{d\zeta}{dt} = Z,$$

wo N in (41) und Z in (51 b) als Funktionen von i und ζ dargestellt worden sind, so daß die Gleichung (53) die Basis-Gleichung zur Darstellung von ζ als Funktion von i darstellt und deswegen nun in bezug auf die Lösung von ζ als Funktion von i zu untersuchen bleibt. Setzen wir deshalb abkürzend: (54) $\cos 2\zeta = y$ und $i = x$, so erhalten wir nach (41) und (51 b) die Differentialgleichung, noch $\cos (4\zeta) = 2y^2 - 1$ setzend:

$$(54) \quad x \frac{dy}{dx} = \frac{1}{F} [\alpha_0 + \alpha_1 \cdot y + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 \cdot x^2 \cdot y + \alpha_4 x^2 (2y^2 - 1)],$$

oder wenn wir, da rechts nur x^2 auftritt, die linke Seite entsprechend transformieren können, indem $x \frac{dy}{dx} = 2x^2 \cdot \frac{dy}{d(x^2)}$, so folgt eine nur x^2 enthaltende Differential-Gleichung, und wenn wir noch $i^2 = x^2 = z$ setzen, die ganze Gleichung durch 2 dividieren und die neuen Koeffizienten:

$$(55) \frac{1}{2}\frac{\alpha_0}{F} = \beta_0, \frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{F} = \beta_1, \frac{1}{2F}(a_2 - a_4) = \beta_2, \frac{1}{2}\frac{\alpha_3}{F} = \beta_3, \frac{1}{2}\frac{\alpha_4}{F} = \beta_4$$

setzen, so erhalten wir die Endgleichung:

$$(56) \quad z \cdot \frac{dy}{dz} = \beta_0 + \beta_1 \cdot y + \beta_2 \cdot z + \beta_3\, z \cdot y + \beta_4 \cdot z y^2 + \ldots,$$

wo $z = i^2$ bei Kleinheit der Bahn-Neigungen einen immer kleinen Parameter 2. Ordnung darstellt, so daß damit das Hecuba-Problem auf eine Riccatische Differentialgleichung reduziert ist. Hinzuzufügen ist noch, daß $y = \cos 2\zeta$ absolut ebenfalls eine Größe stets $\leqq 1$ ist. In bezug auf die Frage der Lösung der Gleichung (56) können wir die Gleichung (56) noch auf eine andere Form, nämlich die von Briot-Bouquet bringen, wenn wir noch setzen:

$$(57) \qquad \beta_0 + \beta_1 \cdot y = u,$$

damit die Konstante, d. h. β_0 in (56) zum Verschwinden kommt, wobei zunächst noch $dy = \frac{1}{\beta_1} du, y = \frac{u - \beta_0}{\beta_1}$, so daß bei Substitution in (56) die rechts homogene neue Gleichung entsteht, dargestellt nach Potenzen von z und u:

$$(58)\qquad z\frac{du}{dz} = z\cdot l_1 + u\cdot l_2 + z\cdot u\cdot l_3 + z\cdot u^2\cdot l_4 + \ldots,$$

wobei bemerkenswert ist, daß diese Gleichung (58) eine Analogie zur Gleichung (27), pg. 238 in meiner Abhandlung über das „ebene“ Hecuba-Problem ist, behandelt in den Sitzungsberichten 1960, S. 227–228, wo nur anstelle von z und u die entsprechenden Größen x und y angewandt wurden. Die Koeffizienten l_i in der Gleichung (58) hier haben nun die folgende Bedeutung:

$$(58\text{a})\qquad \begin{cases} l_1 = \beta_1\cdot\beta_2 - \cdot\,\beta_0\,\beta_3 + \dfrac{\beta_4}{\beta_1}\,\beta_0^2 & l_2 = \beta_1 \\ l_3 = \beta_3 - 2\,\dfrac{\beta_0\,\beta_4}{\beta_1} & l_4 = \dfrac{\beta_4}{\beta_1} \end{cases}$$

wo die Koeffizienten β_i soeben schon in (55a) definiert worden sind.

Die Lösung der Differentialgleichung (58) ist nun bekanntlich eine Potenzreihe von u nach z, so daß also:

$$(59)\qquad u = \delta_1\,z + \delta_2\,z^2 + \ldots,$$

aber gemäß dem Theorem von Briot-Bouquet darf l_2 keine positive ganze Zahl sein, d. h. gemäß (58a): β_1 darf keine positive ganze Zahl sein, also darf, da $\beta_1 = \frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{F}$, der Faktor $\frac{\alpha_1}{F}$ keine positive grade Zahl sein, was allgemein erfüllt sein dürfte, zumal α_1 und F_1 transzendente Größen sind. Dann aber ist die Lösung der Differentialgleichung (58) nach Briot-Bouquet eine Potenzreihe von u nach z, so daß also:

$$(60)\qquad u = \delta_1\cdot z + \delta_2 z^2 + \ldots$$

Die Substitution dieser Lösung in die Differential-Gleichung (58) ergibt beim Vergleich gleichhoher Potenzen von $z = i^2$ die folgende sukzessive Darstellung der gesuchten Koeffizienten δ_1, δ_2 usw.:

$$(61\text{a})\qquad \delta_1 = \frac{l_1}{1-l_2},\ \delta_2 = \frac{1}{2}\,(\delta_2 l_2 + l_3\delta_1),$$

also bei Substitution von δ_1:

(61 b)
$$\delta_2 = \frac{l_3\, l_1}{(1-l_2)\,(2-l_2)} \text{ etc.,}$$

woraus ersichtlich ist, daß gemäß dem Theorem von Briot-Bouquet der Koeffizient l_2 von u^1 in (58) keine positive ganze Zahl sein darf, was nach (58 a), wonach $l_2 = \beta_1$ und weiter nach (56): $\beta_1 = \frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{F}$ bei der Transzendenz von α_1 und F (s. 52) der Fall sein dürfte. Um nun mittels (57), d. h. $u = \beta_0 + \beta_1 \cdot y$ die Größe y abzuleiten, folgt:

(62)
$$y = \frac{u-\beta_0}{\beta_1} = \frac{l}{\beta_1}\, u - \frac{\beta_0}{\beta_1} = \cos\, 2\zeta$$

gemäß (54) und weiter, da nach (60): $u = \delta_1 \cdot z + \delta_2 \cdot z^2 = \delta_1 \cdot i^2 + \delta_2 \cdot i^4 + \ldots$:

(63):
$$y = \cos\, 2\zeta = \frac{1}{\beta_1}\,(\delta_1 \cdot i^2 + \delta_2 \cdot i^4) - \frac{\beta_0}{\beta_1},$$

wo die Koeffizienten $\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_4$ oben definiert sind, und weiter vereinfachend:

(63 a)
$$y = \cos\, 2\zeta = K_0 + K_1 \cdot i^2 + K_2 \cdot i^4 + \ldots,$$
$$\text{wo} \qquad K_0 = -\frac{\beta_0}{\beta_1},\; K_1 = \frac{\partial\, 1}{\beta_1},\; K_2 = \frac{\partial_2}{\beta_1},$$

womit nun die Darstellung von $\cos\, 2\zeta$ als Funktion von i beendet ist. Da nun $|\cos\, 2\zeta| \leqq 1$ sein muß, so muß nach (63 a): $|K_0| < 1$ sein, also nach Definition von K_0 in (63 a) auch: $\left|\frac{\beta_0}{\beta_1}\right| < 1$, also nach (55 a) dann auch $\left|\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right| < 1$, d. h. nach (55 a) und (52):

(64)
$$\left| 2n - n_* + \frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} \cdot B^1 \right| < \frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}\, B^3{}_*,$$

so daß weiter

(64 a)
$$2n' - n_* < \frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}\,(B^3_* - B^1_*)$$

(64 b)
$$2n' - n_* > \frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}\,(B^3_* + B^1_*)$$

oder auch zusammenfassend symmetrisch:

$$(64\text{c})\qquad 2n' - n_* + \frac{1}{4}\cdot\frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^1 \lesseqgtr \pm \frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^3\, m'\cdot B^3,$$

oder weiter bei Bezug auf n_*:

$$1)\ n_* \gtreqless 2n' - \frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}(B_*^3 - B_*^1)$$

$$2)\ n_* \lesseqgtr 2n' + \frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}(B_*^3 + B_*^1)$$

und schließlich beide Fälle zusammenfassend:

$$n_* \gtreqless 2n' + \frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}(B_*^1 \mp B_*^3)$$

oder, da $n = n_*\,(1 + \frac{3}{2} i^2)$ schließlich noch

$$(64\text{e})\qquad n \gtreqless 2n' + \frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}(B_*^1 \mp B_*^3)\left(1 + \frac{3}{2} i^2\right)$$

wo immer $B_*^1 - B_*^3 > 0$ ist, und womit die Grenze von n_* unabhängig von i, und die Grenze von n als Funktion von i festgelegt ist.

Nach der Darstellung von $\cos 2\zeta$ als Funktion von i verbleibt nunmehr die Darstellung von $i = i(t)$, gemäß der entsprechenden Differentialgleichung (41), wonach:

$$(65)\qquad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^3\cdot i\cdot \sin 2\zeta;$$

mithin ist zuerst die Funktion $\sin 2\zeta$ als Funktion von i zu entwickeln, auf Grund der Darstellung (63a) von $\cos 2\zeta = K_0 + K_1\cdot i^2$, so daß $\sin 2\zeta = \sqrt{1 - \cos^2 2\zeta}$ bei Entwicklung nach i^2 die folgende Form erhält:

$$(65\text{a})\qquad \sin 2\zeta = \sqrt{1 - K_0^2 - 2K_0\cdot K_1\cdot i^2 + (i^4)}\ \text{etc.},$$

also bei Substitution in $\frac{di}{dt}$ bis i^2 einschließlich folgt:

(66) $$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{4} m' \frac{1}{\sqrt{a_*}} B_*^3 \, i \sqrt{\alpha + \beta \cdot i^2},$$

wo

(66a) $$\alpha = 1 - K_0^2 = 1 - \frac{\beta_0^2}{\beta_1^2} \text{ und } \beta = -2 K_0 K_1,$$

wo K_0 und K_1 in (63a) definiert sind, so daß nach (65) die neue Differentialgleichung entsteht, resp. sogleich in Integralform:

(67) $$-\frac{1}{4} \frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^3 \cdot (t - t_0) = \int \frac{di}{i \sqrt{a + \beta i^2}},$$

wo α und β soeben bei (66a) fixiert wurden, und noch hinzuzufügen ist, daß nach (55): $\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$, wo die Koeffizienten α_0 und α_1 aus (52) folgen, indem $\alpha_0 = 2n' - n_* + \frac{1}{4} \frac{m'}{\sqrt{a_*}} . B_*^1$ und $\alpha_1 = -\frac{1}{4} \frac{m'}{\sqrt{a_*}} . B_*^3$, so daß, wenn maximal: $|2n' - n| = 20''. \sin 1'' = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10} m'$ $\left(m' = \text{Jup.-Masse} = \frac{1}{1047}\right)$, folglich der Quotient $\frac{\alpha_0}{\alpha_1}$ eine Größe von der o. Ordnung wird, also auch $\frac{\beta_0}{\beta_1}$, so daß mit dem Integral (67) ein elementares Integral vorliegt, bei dem α und β nicht zugleich $<$ o sein können, wo aber α immer $>$ o, und zwar $\alpha = 1 - K_0^1$, wobei $K_0 = -\frac{\beta_0}{\beta_1} = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1}$, so daß die Gleichung (67) immer reell integrabel ist, wobei die Lösung verschieden ausfällt, je nachdem $\beta \gtrless$ o, wobei nach (66) $\beta = -2 K_0 K_1$, also nach (63a): $\beta = +2 \frac{\beta_0 \delta_1}{\beta_1^2}$, wo nach (55) $\beta_0 = \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{F}$, δ_1 nach (61a): $\delta_1 = \frac{l_1}{1 - l_2}$ und l_1 und l_2 nach (58a) definiert sind als Funktionen der β_i, die wiederum nach (55) als Funktionen der α_i und von F definiert sind, womit dann alle Koeffizienten von den α_i, d. h. allein von den Koeffizienten der Störungsfunktion abhängig geworden sind. Die Integration von (67) ist dann abhängig von $\beta \gtrless$ o, während stets $\alpha >$ o.

Im ersteren Falle (a), wo $\beta >$ o angenommen wird, lautet die Auflösung des Integrals (67) bekanntlich:

(68a) $$J_a = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \left[\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha + \beta_i i^2}}{i \sqrt{\beta}}\right],$$

ferner im Falle (b), wo $\beta < 0$:

(68b) $$J_b = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \left[\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha - \beta_i^2}}{i\sqrt{-\beta}}\right],$$

wobei in beiden Fällen:

(68c) $$I = J_a = J_b = -\frac{1}{4} m' \frac{1}{\sqrt{a_*}} B_*^3 \cdot (t - t_0) + c = K(t - t_0) + c,$$

wo $K = -\frac{1}{4} \frac{m'}{\sqrt{a_*}} \cdot B_*^3$ und ferner c die noch zu bestimmende Integrationskonstante fixiert, entsprechend dem Werte $i = i_0$ für $t = t_0$, zu berechnen gemäß den Gleichungen (68a) und (68b), so daß unmittelbar:

(68d) $$c = -\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a + \beta i_0^2}}{i_0 \sqrt{+\beta}}.$$

Schließlich verbleibt die Darstellung von i als Funktion von t durch Auflösung der Gleichungen (68a) und (68b), wobei in erster Auflösung die folgende Gleichung resultiert:

$$i \cdot E^{-[K(t-t_0)+C]\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha + \beta i^2}}{\sqrt{\pm\beta}},$$

also weiter

$$\left[i\sqrt{\beta} \cdot E^{-[K(t-t_0)+C]\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}\right]^2 = \alpha + \beta \cdot i^2,$$

worin sich bei Auflösung die Größe α beiderseits unmittelbar weghebt und alsdann weiter noch i als gemeinsamer Faktor ebenfalls wegfällt, so daß schließlich eine lineare Gleichung in i verbleibt, nämlich

$$i\left[\beta E^{-2[K(t-t_0)+c]\sqrt{a}} - \beta\right] = 2\sqrt{\alpha \cdot \beta} \cdot E^{-[K(t-t_0+c]\sqrt{a}}$$

so daß bei beiderseitiger Multiplikation mit dem Faktor:

$$\beta E^{2[K(t-t_0)+c]\sqrt{a}}$$

die Neigung i dargestellt wird durch die folgende Gleichung:

(69) $$i = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{E^{[K(t-t_0)+c]\sqrt{\alpha}}}{1 - E^{2[K(t-t_0)+c]\sqrt{\alpha}}},$$

wo K schon oben definiert ist, d. h.:

(69a) $$K = -\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} \cdot B_*^3 < 0,$$

und die Konstante c sich auf Grund von $i - i_0$ im Momente $t - t_0$ aus der letzten Gleichung (69) ergibt, indem

(70) $$i_0 = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,\frac{E^{c\sqrt{\alpha}}}{1 - E^{2c\sqrt{\alpha}}}$$

also auf Grund einer Gleichung 2. Grades in $E^{c\sqrt{\alpha}}$, indem aus der letzten Gleichung folgt, wenn:

(71) $$E^{c\sqrt{\alpha}} = G$$

gesetzt wird:

$$G^2 + \frac{2}{i_0}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot G = +1,$$

so daß die Auflösung ergibt:

(71a) $$G = -\frac{1}{i_0}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \pm \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta} + i_0^2},$$

also $C = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, ln\, G$, wo noch nach (66a): $\alpha = 1 - K_0^2 = 1 - \left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^2$

und $\beta = -2K_0K_1$ und nur das obere Vorzeichen in (71a) gilt, damit bei $i_0 = 0$ auch $G_0 = 0$, und nie $G < 0$ sein kann, weil nach (71) $G = E^{c\sqrt{\alpha}}$ stets > 0 unabhängig von $c \gtrless 0$, so daß für (71a) rechts nur das Vorzeichen $+$ der Wurzel gültig ist, so daß nunmehr nach Kenntnis von G nach (71a) die Unbekannte c sich nach (71) errechnet und damit endlich die Bahnneigung i nach (69) als Funktion von t ermittelbar wird. Insbesondere folgt noch aus der Formel (69) für $t \equiv \pm\infty$: $i = 0$, so daß der Planetoid also in die Jupiterbahn hineinfällt. In bezug auf dieses Verhalten der Grenzwerte ist aber zu bemerken, daß, wenn die

Bahn-Neigung in unendlich ferner Vergangenheit $i = 0$ war, diese Neigung auch hätte verbleiben müssen, wenn auch die kurzperiodischen Störungen Jupiters, Saturns usw. immer einen kleinen Betrag i liefern müssen; das Analoge gilt auch für $t = +\infty$, so daß unsere Betrachtungen für große Zeiträume natürlicherweise keine strenge Geltung haben können; es kann bei größeren Zeiträumen nur die Tendenz angedeutet werden. Es verbleibt weiter die Untersuchung in bezug auf die Knotenlänge Ω und ihre Darstellung als Funktion der Zeit t. Gemäß (36a) lautete die Darstellung:

$$\frac{d\Omega}{dt} = m_0 + m_2 \cdot i^2, \tag{72}$$

wobei die Koeffizienten m_0 und m_2 und ihre Darstellung noch als Funktion der Zeit zu entwickeln sind. Gemäß (36) lautet diese Darstellung wie folgt:

$$\left\{ m_0 = -\frac{1}{4} \frac{m'}{\sqrt{a_*}} [B^1_* - B^3_* \cos 2\zeta], \, m_2 = \frac{m'}{\sqrt{a_*}} \left[\frac{1}{2} a^0_* \left(\frac{dB^1}{da}\right)_* - \left(\frac{dB^3}{da}\right)_* \cos 2\zeta \right\} \right. \tag{72*}$$
$$\left. + \frac{1}{8} G^0_* - \frac{1}{4} L^4_* \cos 2\zeta + \frac{3}{32} C^6_* \cos 4\zeta - \frac{1}{6} (B^1_* - B^3_* \cos 2\zeta) \right].$$

Da die soeben fixierten Koeffizienten in bezug auf ζ auch Funktionen von $\cos(2\zeta)$ und $\cos(4\zeta)$ sein können, sind zuerst sukzessive noch die folgenden Integrationen nach der Zeit auszuführen:

$$\int \cos(2\zeta)\, dt = \int (K_0 + K_1 \cdot i^2)\, dt = K_0 (t - t_0) + K_1 \int i^2 \cdot dt, \tag{72a}$$

analog für: $\int i^2 \cdot \cos 4\zeta\, dt$; zuerst ist also das Integral $\int i^2 \cdot dt$ auszuführen. Es folgt nach (69), wenn $E^{K(t-t_0)+c} = z$ gesetzt wird: $i^2 = 4\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{z^2}{(z^2-1)^2}$ und $dt = \frac{dz}{K \cdot z}$, so daß:

$$\int i^2 \cdot dt = 4 \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{K} \int \frac{z\, dz}{(z^2-1)^2} = -2 \cdot \frac{\alpha}{K\beta} \cdot \frac{1}{E^{2[K(t-t_0)+c]} - 1} \cdot \tag{72b}$$

Weiter treten in (48) bei Integration noch auf: $\int \cos(2\zeta)\, dt$ und $\int \cos 4\zeta\, dt$, ebenso wie die Integrale: $\int i^2 \cdot \cos(2\zeta)\, dt$ und $\int i^2 \cdot \cos(4\zeta)\, dt$. Zur Ermittelung des ersten Integrals ist die Darstellung: $\cos(2\zeta) = K_0 + K_1 \cdot i^2$ zu verwenden, so daß bei gestatteter Vernachlässigung von i^4 verbleibt:

(72c) $$\int i^2 \cos 2\zeta\, dt = \int K_0 \cdot i^2 \cdot dt = K_0 \int i^2\, dt,$$

wo $\int i^2 \cdot dt$ in (72) als Funktion von t dargestellt ist. Alsdann bleibt noch: $\int i^2 \cdot \cos(4\zeta)\, dt = 2 \int i^2 \cos^2(2\zeta) \cdot dt - \int i^2 \cdot dt$, wo das 1. Integral sich mit Rücksicht auf die Darstellung von $\cos(2\zeta) = K_0 + K_1 \cdot i^2$ bei der Entwicklung bis i^2 reduziert auf: $2\int K_0^2\, dt$, so daß weiter:

(72d) $$\int i^2 \cos(4\zeta)\, dt = 2K_0^2 \int i^2 \cdot dt - \int i^2 \cdot dt = (2K_0^2 - 1) \cdot \int i^2 \cdot dt,$$

also folglich

(73a) $$\int i^2 \cdot \cos(4\zeta)\, dt = -2\,(2K_0^2 - 1)\frac{\alpha}{K\beta}\;\frac{1}{E^{2K(t-t_0)+2c} - 1}.$$

Zum Schluß der Integration der Elemente verbleibt dann noch die Darstellung von ε, der mittleren Länge der Epoche, und zwar auf Grund der Differentialgleichung (46): $\frac{d\varepsilon}{dt} = i^2(k_1 + k_2 \cdot \cos(2\zeta))$, wobei die Koeffizienten k_1 und k_2 in (46a) definiert sind, so daß bei Integration folgt:

(73b) $$\varepsilon = \varepsilon_1 + k_1 \cdot \int i^2\, dt + k_2 \cdot \int i^2 \cos(2\zeta)\, dt,$$

wo ε_1 = konst. und die Integrale: $\int i^2 \cdot dt$ nach (72a) und

(73c) $$\int i^2 \cdot \cos(2\zeta)\, dt = \int i^2 (K_0 + K_1 \cdot i^2)\, dt = K_0 \int i^2 \cdot dt$$

(innerhalb i^2) auch nach (72b) dargestellt sind.

Es verbleibt schließlich noch die Frage nach der Möglichkeit einer strengen Kommensurabilität der mittleren Bewegung des Planetoiden mit der des großen Planeten Jupiter, so daß in dem entsprechenden Zeitmoment t' : $n = 2n'$ (Jupiter) werden könnte. Nach der Formel (15) war $a = a_*(1 - i^2)$, bei Beschränkung bis zum 2. Grade in i, also entsprechend $n = n_*\left(1 + \frac{3}{2} i^2\right)$, ebenfalls bis i^2 einschließlich. Tritt dann im Moment $t = t'$ eine strenge Kommensurabilität der mittleren Bewegungen in bezug auf Hecuba und Jupiter ein, so wird: $2n' = n(t') = n_*\left(1 + \frac{3}{2} i_{t'}^2\right)$, also $n_* = 2n'\left(1 - \frac{3}{2} i_{t'}^2\right)$; andererseits ist für $t = t_0$: $n_* = n_0\left(1 - \frac{3}{2} i_0^2\right)$

so daß aus den beiden Ausdrücken für n^* bei Gleichsetzung die Darstellung von $i_{l'}^2$ als Funktion von n_0 und i_0 folgt:

$$(74) \qquad i_{l'}^2 = \frac{1}{3n'}\left[2n' - n_0 + \frac{3}{2} n_0 i_0^2\right],$$

so daß folglich, damit $i_{l'}^2 > 0$, der Faktor in (74): $2n' - n_0 + \frac{3}{2} n_0 \cdot i_0^2 \geqq 0$ sein muß, d. h. es muß sein:

$$(75) \qquad i_0^2 \geqq \frac{2}{3} \cdot \frac{n_0 - 2n'}{n_0},$$

wo $n_0 - 2n'$ der kritische, kleine Betrag ist, so daß β immer $\frac{n_0 - 2n'}{n_0}$ eine kleine Größe fixiert, so daß aber: $n_0 - 2n' > 0$, so daß schließlich, wenn man den Nenner n_0 in (75) und nur hier $n_0 = 600''$ setzt, die Bedingung zur Folge hat, daß:

$$(75a) \qquad \operatorname{arc} i_0 \geqq \frac{1}{30}\left(\sqrt{n_0 - 2n'}\right)$$

sein muß, also immer $n_0 \geqq 598''$. Man erhält mit $n_0 - 2n' = 1'', 2'' \ldots 10''$ zwecks Erläuterung die folgende Tabelle für i_0 (in Graden); also unter Hinzufügung des Faktors 57.30:

n − 2n′:	0″0″	+1″	+2″	+3″	+4″	+5″	+6″	+7″	+8″	+9″	+10″
Min.: i_0^0	0°00	1°91	2°70	3°31	3″82	4°28	4°68	5°09	5°41	5°73	6°04

Weiter bleibt die Frage zu beantworten, ob und wann die Extremwerte der Bahn-Neigung i eintreten. Nach der Darstellung von i in (69) ergibt eine leichte Umformung die neue Form in E^z:

$$(76) \qquad i = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{1}{E^{-z} - E^{+z}}, \quad \text{wo}$$

$$(76a) \quad z = [K(t - t_0) + c]\sqrt{\alpha} \text{ und nach (69a): } K = -\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} \cdot B_*^3 < 0.$$

Daraus folgt, daß zunächst in den beiden Fällen: $z = \pm\infty$, d. h. $t - t_0 = \mp\infty$ die Bahn-Neigung $i = 0$ wird, der Planetoid also in die Jupiterbahn fällt, allerdings nur säkular, da die periodischen Störungen den Planetoiden immer wieder aus der Jupiter-Ebene herausbringen. Die in (76a) enthaltene Integrationskonstante c ergibt sich nach (76), indem bei $i = i_0$ für $t = t_0$, so daß $z_0 = c \cdot \sqrt{\alpha}$, aus der Gleichung (76) folgt:

$i = i_0 = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{1 - E^{c\sqrt{\alpha}}}{E^{2c\sqrt{\alpha}}}$, woraus sich c ergibt und zwar aus einer Gleichung 2. Grades in $E^{c\sqrt{\alpha}} = x$, indem: $i_0 = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{x}{1-x^2}$, so daß:

$$(77) \qquad x = -\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}{i_0} \pm \sqrt{\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{i_0^2} + 1},$$

so daß also, da $x = E^{c\sqrt{\alpha}}$, unmittelbar $c\sqrt{\alpha}$ und damit c selbst folgt, also auch die Darstellung von z selbst nach (76a) oben, und damit schließlich nach (76) i als explizite Funktion von t zu erhalten. Da $x = E^{c\sqrt{\alpha}}$ für jedes $c \gtrless 0$ immer positiv ist, so muß nach (77) rechter Hand, damit x nicht negativ wird, immer das obere Vorzeichen $+$ vor der 2. Wurzel in (77) benutzt werden.

Weiter sind die Extrem-Werte von i festzustellen, und zwar auf Grund der Gleichungen (65), (65a) und (66). Ein zeitliches Maximum resp. Minimum von i trifft nach der Darstellung von $\frac{di}{dt}$ nach (65) bei $\frac{di}{dt} = 0$ ein, also wenn: (1) $i = 0$, ferner (2): $\sin 2\zeta = 0$, also nach (1) zuerst im ebenen Problem, das uns hier nicht interessiert, und ferner nach (66) und (66a) bei

$$(78): \qquad \sin^2 2\zeta = \alpha + \beta \cdot i_e^2 = 0,$$

so daß also

$$(80) \qquad i_e^2 = -\frac{\alpha}{\beta},$$

wo α und β in (66a) als Funktionen von K_0 und K_1 definiert sind. Die erste Lösung $i_e = 0$ interessiert uns hier nicht, weil sie sich auf das ebene Hecuba-Problem bezieht, das schon früher von mir behandelt wurde (Sitz.-Berichte der Bayer. Akademie der Wiss., 1960). Die Substitution von α und β nach (66a) in (80) ergibt dann: $i_e^2 = \frac{1}{2} \frac{1 - K_0^2}{K_0 \cdot K_1}$ oder weiter nach (63a):

$$(81) \qquad i_e^2 = \frac{\beta_0^2 - \beta_1^2}{\beta_0 \cdot \delta_1},$$

wo die erforderlichen Koeffizienten β_0, β_1 nach (55) als Funktionen von α_0, α_1 und F, wo erstere nach (52) und F nach (51c), ferner δ_1 nach (61a) resp. (58a) definiert sind. Es verbleibt nun die Frage nach dem Zeitpunkt t_e des Maximums i_e gemäß der Darstellung von i nach (76), wo $i_e = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,\frac{1}{E^{-z}-E^{+z}}$ und bei (76a) $z = z_e = [K(t_e - t_0) + c]\sqrt{\alpha}$ aufzulösen ist, so daß man hieraus dann unmittelbar den Zeitpunkt t_e erhält. Setzen wir $E^z = x$, wo also $x > 0$, so geht die Gleichung (82) zunächst in die folgende über:

(83):
$$i_e = 2\,\frac{x^2}{1-x^2},$$

also eine in x quadratische Gleichung, wobei i_e nach (81) bekannt ist. Folglich ergibt die Auflösung von (83) nach x die folgende Darstellung:

(84)
$$x = E^z = -\frac{1}{i_e}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \pm \frac{1}{i_e}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta} + i_e^2},$$

wo nur dann $x = E^z > 0$, wenn die 2. Wurzel in (84) das Vorzeichen $+$ hat. Ist nun aber $z = z_e$ nach (84) bekannt, dann auch nach (76a) die Zeit $t = t_e$, die Zeit des Extrems von i, *d. h.* i_e, was unser Ziel war, indem $z_e = [K(t_e - t_0) - c]\sqrt{\alpha}$.

Ferner sind nun noch die Extremwerte von ζ abzuleiten, und zwar auf Grund der Darstellung: (65a): $\cos 2\zeta = K_0 + K_1 i^2$, wo K_0, K_1 nach (63a) fixierte Konstanten sind; folglich bleibt nur die Substitution des Extremwertes i_e^2 nach (81), um den Extremwert E ($\cos [2\zeta]$) zu erhalten. Ferner möge der Fall, wo $\cos(2\zeta) = K_0 + K_1 \cdot i^2 = 0$ ist, untersucht werden. Nach der soeben nach (63a) fixierten Darstellung von $\cos(2\zeta)$ muß dann die entsprechende Bahnneigung $i^2 = -\frac{K_0}{K_1}$ sein, wo also nach (63a): $i_n = -\frac{\beta_0}{\delta_1}$, wo nach (55): $\beta_0 = +\frac{1}{2}\frac{\alpha_0}{F}$ und nach (61a): $\delta_1 \equiv \frac{l_1}{1-l_2}$ und wo nach (58a) $l_1 = \beta_1 \cdot \beta_2 - \beta_0\beta_3 + \frac{\beta_4}{\beta_1}\cdot\beta_0^2$ und weiter $l_2 = \beta_1$ und schließlich nach (51c): $F = \frac{1}{8}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}$, so daß bei der Kompliziertheit der Funktionen die Vorzeichenfrage der numerischen Rechnung überlassen werden muß.

Allgemein verbleibt nach (69) als allgemeines Ergebnis in bezug auf die Eigenschaft von i, daß die Bahnneigung i keine periodische Lösung zuläßt und dementsprechend auch für ζ keine periodische Darstellung möglich ist.

Weiter folgt für die mittlere Länge der Epoche ε gemäß der Gleichung (46): $\frac{d\varepsilon}{dt} = i^2 \left(k_1 + k_2 \cos (2\zeta)\right)$, wo bei Integration $\int i^2 dt$ nach (72b), ferner: $\int i^2 \cos (2\zeta) \cdot dt = K_0 \int i^2 dt$ immer bei Entwicklung bis i^2 nach (72b) als Funktionen der Zeit dargestellt sind.

Schließlich verbleibt noch zur Integration die Knotenlänge Ω auf Grund der Differentialgleichung: (72) $\frac{d\Omega}{dt} = m_0 + m_2 \cdot i^2$, wo m_0 und $i^2 \cdot m_2$ nach (72_*) als Funktionen von $\cos (2\zeta)$, $i^2 \cdot \cos (2\zeta)$ und $i^2 \cos (4\zeta)$ erscheinen, zu bemerken, daß die zeitlichen Integrale nach (72a), (72b) und (73a) explizit als Funktionen von t definiert sind. Hinzuzufügen ist dann wegen m_0 noch das Integral des Säkularteils von m_0 in $\frac{d\Omega}{dt}$, d.h. nach $(72)_*$: $\Delta m_0 = -\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} B^1_*$, so daß: $\Delta\, \Omega = \int \Delta m_0 \cdot dt = -\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}\, B^1_* \,(t - t_0)$, wobei noch hervorgehoben sei, daß als Zeiteinheit stets $\frac{1}{k} = 58.1335$ mittlere Tage gewählt war, und deshalb k explizit nie in den Formeln erscheint.

Weiter verbleibt noch als letzter Term, der nach $(72)_*$ in $i^2 \cdot m_2$ zu berücksichtigen ist, der folgende gemischte Term in $i^2 \cdot \cos (4\zeta)$, der explizit lautet: $-\frac{3}{128}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} C^6 \cdot i^2 \cdot \cos (4\zeta)$, so daß, weil schon vom 2. Grade in i, die Faktoren $\cos 4\zeta$ und C^6 nicht weiter nach i^2 zu entwickeln sind; es verbleibt also für die Integration von $i^2 \cdot \cos (4\zeta)$ noch die weitere Darstellung: $\cos (4\zeta) = 2 \cdot \cos^2 (2\zeta) - 1 = 2\,(K_0 + K_1\, i^2)^2 - 1 = 2\, K_0^2 + {} + 4\, K_0 \cdot K_1 \cdot i^2 - 1 + (i^4) + \ldots$, so daß bei Integration definitiv: $\int i^2 \cos 4\zeta\, dt = \int \left[i^2 (2\, K_0^2 - 1) + \cdot/.\, i^4_t\, .\, .\right] dt = (2\, K_0^2 - 1) \int i^2\, dt$ unter der bisherigen Darstellung bis i^2 einschließlich, womit die Integration nun abgeschlossen ist.