BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1963

MÜNCHEN 1964

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Theorie der nahezu kommensurablen Bewegung der Planetoiden des Hestia-Typus im Raum

Von Alexander Wilkens in München

Vorgelegt am 8. November 1963

Nach der Untersuchung des räumlichen Falles des Hecuba-Problems behandeln wir weiter den analogen Fall der räumlichen Hestia-Bewegung, d. h. des Falles, in dem die mittlere Bewegung des Planetoiden zu der des großen Planeten Jupiter nahezu im Verhältnis 3 : 1 steht. Die Lösung beruht dabei auf dem gleichen Grundsatz wie beim Hecuba-Problem, nämlich von vorneweg auf die Zeit als unabhängige Variable zu verzichten, im Gegensatz zu den bisherigen Theorien zum Kommensurabilitäts-Problem, dessen Schwierigkeiten fallen, sobald nach Elimination von t auf Grund eines Integrals eine andere unabhängige Variable eingeführt wird, entweder die Exzentrizität im ebenen oder die Bahn-Neigung im räumlichen Problem.

Der in bezug auf die genäherte Kommensurabilität kritische Term, abhängig von der Bahn-Neigung des Planetoiden, lautet nach Le Verrier's Untersuchungen in den „Annales de l'Observatoire de Paris", und zwar in dem Teil: „Mémoires", Bd. 10, S. 49, entsprechend dem kritischen Argument im Falle des Hestia-Typus:

$$(1) \qquad + 0 \cdot 5 \cdot B^2 \cdot \eta^2 \cdot \cos(3\,l' - \lambda - 2\,\tau'),$$

wo B^2 die bekannte Laplacesche Transzendente, ferner

$$(2) \qquad \eta^2 = \sin^2 \frac{1}{2} I,$$

wo I wiederum die gegenseitige Bahn-Neigung zwischen der Bahn des Planetoiden und der des großen Planeten Jupiter, also bei den Planetoiden eine allgemein kleine Größe fixiert, wobei ferner λ fixiert ist durch $\lambda = l + \tau' - \tau$, wo die beiden Größen

τ' und τ die Längen des Schnittpunktes S der Bahnen von Jupiter und dem Planetoiden sind, der Bezeichnung Le Verriers entsprechend, wobei die Differenz $\tau' - \tau$ bei den vorausgesetzten kleinen Bahn-Neigungen von Jupiter und dem Planetoiden, bekanntlich proportional $i \cdot i'$, einer kleinen Größe 2. Ordnung der Bahn-Neigungen ist. Da wir nun die Jupiterbahn an Stelle der Ekliptik als Fundamentalebene für die Längenzählung wählen, ist in Le Verriers Entwicklung zu setzen: $\tau = \tau' = \Omega$, also gleich der Knotenlänge des Planetoiden, also $\tau - \tau' = 0$. Ferner geht alsdann i zur Neigung J zwischen der Bahnebene des Planetoiden und der des Jupiter über, wobei J aus den ekliptikalen Ausgangsgrößen i, i' und $\Omega - \Omega'$ zu berechnen ist, indem $\cos J = \cos i \cdot \cos i' + \sin i \cdot \sin i' \cdot \cos(\Omega - \Omega')$, woraus mittels $i = i_0$ und $\Omega = \Omega_0$, $i' = i_0'$ und $\Omega' = \Omega_0'$ die Neigung J gegen die Jupiterbahn folgt. Die in unserem Falle der genäherten Kommensurabilität der mittleren Bewegungen im Verhältnis 3 : 1 in Betracht kommenden Terme entnehmen wir nun dem 10. Bande der „Memoires" Le Verriers in den genannten „Annales" S. 49 auf Grund der Koeffizienten von $\eta^2 = \frac{1}{4} \cdot i^2$ bei den kritischen Termen mit dem Argument (3): $\zeta = +3l' - \lambda - 2\tau'$, wo in unserem Falle: $\tau' = \tau = \Omega$, also $\lambda = l + \tau' - \tau =$ mittlere Länge l zu setzen ist, so daß in unserem Falle das kritische Argument die Form erhält:

$$\zeta = 3l' - l - 2\,\Omega, \tag{3}$$

mit der Jupiterbahn als Grundebene, so daß $J = i$ die Bahn-Neigung der Planetoidenbahn gegen die Jupiterbahn fixiert.

Dann erhält die entsprechende Störungsfunktion, entnommen aus Bd. I und X der Le Verrier'schen Entwicklung im Falle des Hestia-Typus, unter gleichzeitiger Berücksichtigung der säkularen und kritischen Terme bis zum einschließlich 2. Grade der Bahn-Neigung i gegen die Jupiterbahn die folgende Form:

$$R = m'\left[\frac{1}{2}A^0 - \frac{1}{2}\eta^2 B^1 + \frac{1}{2}\eta^2 B^2 \cos\zeta + \frac{1}{2}G^0 \cdot \eta^4 + \frac{3}{8}C^4 \cdot \eta^4 \cos 2\zeta\right] \tag{4}$$

wobei die Gaußsche Konstante $k^2 = 1$ gesetzt ist, also als Zeiteinheit $\frac{1}{k} = 58.1325$ mittleren Tagen gewählt wurde, und noch zu bemerken ist, daß der Laplacesche Koeffizient B^1 des Säkularteils in η^2 ursprünglich E^0 ist, wobei aber zu bemerken ist, daß nach Le Verrier in den „Mémoires" Bd. X S. 32 gemäß den Formeln (51) auf Grund der Definition von E^i folgt, daß

$$a' \cdot E^0 = a' \cdot B^1 \tag{5}$$

ist, wo die A^i, B^i, G^i, C^i ab (4) die bekannten Laplaceschen Transzendenten fixieren.

Nach (3) wird dann mit Rücksicht auf die Darstellung der mittleren Länge l:

$$l = \varepsilon + \int n\, dt, \tag{6}$$

wo $\varepsilon =$ mittlere Länge der Epoche, die Differentialgleichung für ζ gemäß (3):

$$\frac{d\zeta}{dt} = 3\,n' - n - \frac{d\varepsilon}{dt} - 2\,\frac{d\Omega}{dt}, \tag{7}$$

wo $\frac{d\varepsilon}{dt}$ unter Vernachlässigung des hier wegfallenden Termes in $\frac{\partial R}{\partial e}$ die Form erhält:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{n\,a} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\,i\right)}{n\,a^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}, \tag{8}$$

und analog in bezug auf Ω, indem:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{n\,a^2 \sin i} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} = 0.\ \mathrm{Gr} + 2.\ \mathrm{Gr}, \tag{9}$$

wobei in (8) der Nenner $\sqrt{1-e^2}$, in beiden Fällen $= 1$, wegfällt, da bei der Entwicklung nach e^2 ein Zusatzfaktor in e^2 entsteht, der in unserem Falle wegfällt. Weiter folgt dann in bezug auf den 1. Term von $\frac{d\varepsilon}{dt}$ nach (8) in Verbindung mit der Darstellung von R nach (4):

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{1}{2}\,m' \left[\frac{\partial A^0}{\partial a} + \eta^2 \left(-\frac{\partial B^1}{\partial a} + \frac{\partial B^2}{\partial a} \cos\zeta + \ldots\right)\right], \tag{10}$$

worin bei der prinzipiellen Potenz-Entwicklung von R und seinen Ableitungen jetzt $\frac{\partial A^0}{\partial a}$ nach i zu entwickeln ist, sobald die Abhängigkeit der Koeffizienten A^k und B^k von i nachgewiesen ist. Aus der Darstellung (4) von R als Funktion von ζ ist auf Grund der Definition (3) von ζ unmittelbar ersichtlich, daß:

$$(11) \qquad 2\,\frac{\partial R}{\partial l} = \frac{\partial R}{\partial \Omega},$$

somit auch in unserem Falle der räumlichen Darstellung der Hestia-Bewegung ein Integral ersichtlich wird, da nach der Theorie der Variation der Konstanten die Differentialgleichung der großen Halbachse gilt:

$$(12) \qquad \frac{d(\sqrt{a})}{dt} = \frac{\partial R}{\partial l}$$

und andererseits die der Neigung i entsprechende Differential-Gleichung gilt:

$$(13) \qquad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{1}{\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \overline{w}} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right).$$

Dabei ist nun nach (13) der letzte Term: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,i\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$, da $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ nach (4) mindestens vom 2. Grade in η, vom 3. Grade, also wegfallend; ferner ist der vorletzte Term in (13), behaftet mit dem Faktor $\frac{\partial R}{\partial \overline{w}}$, wegen des Nichtauftretens von $\overline{w}$ in (4) automatisch wegfallend, so daß $\frac{di}{dt}$ sich nach (13) auf den 1. Faktor rechts beschränkt und deshalb, wenn noch der Divisor sin i auf i, also unter Vernachlässigung des 3. Grades in i, beschränkt wird, die Endgleichung lautet:

$$(14) \qquad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2}\,\frac{1}{i}\,\frac{\partial R}{\partial \Omega}.$$

Nun ist nach (11) und (12) unmittelbar: $\frac{\partial R}{\partial \Omega} = 2\,\frac{\partial R}{\partial l} = 2\,\frac{d(\sqrt{a})}{dt}$, so daß bei Substitution von $\frac{\partial R}{\partial \Omega}$ in (14) die neue Gleichung entsteht:

$$(15) \qquad i\,\frac{di}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{a}}\,\frac{d(\sqrt{a})}{dt} = -2\,\frac{d(\ln\sqrt{a})}{dt},$$

also weiter:

(16) $$\frac{d\,(i^2)}{dt} = -4\,\frac{d\,[\ln \sqrt{a}\,]}{dt},$$

so daß

(17): $$\ln (\sqrt{a}) = -\frac{1}{4}\,i^2 + D,$$

wo D eine Intergrationskonstante. Wenn nun bei $t = t_0 : a = a_0$, und $i = i_0$, so daß nach (17): $\ln (\sqrt{a_0}) = -\frac{1}{4} i_0^2 + D)$, so folgt unter Elimination von D

(18) $$\sqrt{a} = \sqrt{a_0} \cdot E^{-\frac{1}{4}(i^2 - i_0^2)},$$

wo E die Basis der natürlichen Logarithmen. Setzen wir noch: $\sqrt{a_0} \cdot E^{\frac{1}{4} i_0^2} = \sqrt{a_*}$, so folgt weiter nach Quadrieren von (18) und dann folgender Potenz-Entwicklung bis zum 2. Grade in i:

(19) $$a = a_* \cdot E^{-\frac{1}{2} i^2} = a_* \left(1 - \frac{1}{2}\,i^2\right),$$

so daß also immer: $a < a_*$. Da bei $t = t_0$:

(20) $$a_0 = a_* \left(1 - \frac{1}{2}\,i_0^2\right),$$

so folgt auch weiter aus (19) und (20):

(21) $$a - a_0 = \frac{1}{2}\,a_*\,(i_0^2 - i^2),$$

und schließlich direkt noch nach (20) zur Definition von a_*:

(22) $$a_* = a_0 \left(1 + \frac{1}{2}\,i_0^2\right) > a_0.$$

Weiter ist nach (18):

(23) $$a - a_0 = -\frac{1}{2}\,a_0\,(i^2 - i_0^2),$$

also schließlich bei

$i > i_0 : a - a_0 < 0$, also: $a < a_0$,
$i < i_0 : a - a_0 > 0$, also: $a > a_0$, wobei zu beachten ist daß in (23)

auf der rechten Seite der Faktor a_0 auch mit a_* vertauscht werden kann, weil nach (20) a_0 und a_* nur um Terme 2. Grades in i verschieden sind. Weiter ist zu bemerken, daß nach (19) immer: $a < a_*$ und analog nach (20) immer auch: $a_0 < a_*$.

Analog ergibt sich in bezug auf die mittlere Bewegung n, indem nach (19), da $n = a^{-3/2}$:

$$n = n_* \left(1 + \frac{3}{4} i^2\right), \tag{24}$$

so daß immer $n > n_*$. Ferner ergibt dieselbe Gleichung:

$$n_0 = n_* \left(1 + \frac{3}{4} i_0^2\right) > n_*, \tag{24a}$$

so daß immer: $n_* = n_0 \left(1 - \frac{3}{4} i_0^2\right) < n_0$, also $n > n_* < n_0$, und da weiter nach (24): $n : n_0 = 1 + \frac{3}{4} (i^2 - i_0^2) \gtrless 1$ bei $i \gtrless i_0$, so ist schließlich $\frac{n}{n_0} \gtrless 1$, je nachdem $i \gtrless i_0$.

Unser nächstes Ziel nach Darstellung von a als Funktion von i ist nun die Darstellung des kritischen Argumentes ζ ebenfalls als Funktion von i, wobei nach (3): $\zeta = 3l' - l - 2\,\Omega$, und auf Grund der Differential-Gleichungen in bezug auf ζ und i zu bilden ist:

$$(25)\quad \frac{d\zeta}{di} = \frac{\frac{d\zeta}{dt}}{\frac{di}{dt}} = \frac{Z}{N}, \text{ wo } (25\text{a}) \begin{cases} Z = \dfrac{d\zeta}{dt} = \dfrac{d}{dt}(3l' - l - 2\,\Omega) \\ N = \dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

und noch explizit: (25b): $Z = 3n' - n - \frac{d\varepsilon}{dt} - 2\frac{d\Omega}{dt}$ und $\frac{di}{dt}$ nach (14) definiert ist, weiter $\frac{d\varepsilon}{dt}$ nach (8) bezüglich $\frac{\partial R}{\partial a}$, mit Rücksicht auf die Entwicklung des Termes A^0 gemäß (19) zu entwickeln ist, so daß:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{2} A^0\right)}{\partial a} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dA^0}{da}\right)_* + (a - a_*)\left(\frac{d^2A^0}{da^2}\right)_* + \ldots\right], \tag{26}$$

worin noch nach (19) zu substituieren ist: $a - a_* = -\frac{1}{2} a_* \cdot i^2$. Weiter ist in $\frac{d\zeta}{dt}$ (7) noch zu substituieren, und zwar in bezug auf den 1. Term $\frac{d\varepsilon}{dt}$ nach (8), entwickelt bis i^2 einschließlich:

$$\text{(26a)} \qquad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} = -2\sqrt{a_*}\left(1-\frac{1}{4}i^2\right)\frac{\partial R}{\partial a},$$

wo $\frac{\partial R}{\partial a}$ nach Definition von R in (4) bis i^2 einschließlich die Form erhält:

$$\text{(27)} \qquad \frac{\partial R}{\partial a} = m'\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dA^0}{da}\right) - \frac{1}{2}\eta^2\frac{dB^1}{da} + \frac{1}{2}\eta^2\frac{dB^2}{da}\cos\zeta\right],$$

wo $\frac{dA^0}{da}$ bereits in (26) nach Potenzen von i dargestellt ist, so daß folglich:

$$\text{(27a)} \quad \frac{\partial R}{\partial a} = \frac{1}{2}m'\left\{\left(\frac{d\mathrm{A}^0}{da}\right)_* + i^2\left[-\frac{1}{2}a_*\left(\frac{d^2A^0}{da^2}\right)_* + \frac{1}{4}\left(-\frac{dB^1}{da}\right)_* + \left(\frac{dB^2}{da}\right)_*\cos\zeta\right]\right\}$$

wo der rein konstante Teil $\frac{dA^0}{da}$ von (27a) in bezug auf $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$ schon in der beobachteten mittleren Bewegung enthalten ist und deshalb hier wegfällt. Allgemein können wir dann der Darstellung (27a) die folgende Form geben:

$$\text{(28)} \qquad \frac{\partial R}{\partial a} = C_0 + C\,i^2 + C^2\,i^2\cos\zeta,$$

mit der folgenden Bedeutung der Koeffizienten:

$$\text{(29)} \quad \begin{cases} C_0 = \frac{1}{2}m'\left(\frac{dA^0}{da^2}\right)_*, \quad C_1 = \frac{1}{4}m'\left[-\left(\frac{d^2A^0}{da^2}\right)_* \cdot a_* - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dB^1}{da}\right)_*\right] \\ C_2 = \frac{1}{8}m'\left(\frac{dB^2}{da}\right)_*. \end{cases}$$

Es verbleibt dann gemäß, (26a) zu bilden: $\frac{d\varepsilon_1}{dt} = -2\sqrt{a_*}\cdot\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1}{2}\sqrt{a_*}\cdot i^2\cdot\frac{\partial R}{\partial a}$, wo $\frac{\partial R}{\partial a}$ bereits in (27a) resp. (28) dargestellt wurde, so daß nach (26a) in Verbindung mit (28) folgt:

$$\text{(30)} \qquad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = D_0 + D_1\,i^2 + D_2\,i^2\cos\zeta,$$

wo $D_0 = -2\sqrt{a_*}\,C_0$, $D_1 = -2\sqrt{a_*}\,C_1 + \frac{1}{2}\sqrt{a_*}\,C_0$, $D_2 = -2\sqrt{a_*}\cdot C_2$, wo wiederum C_0, C_1, C_2 bereits in (29) definiert sind. Mithin ist nach (30):

$$(31)\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + D_0\,(t - t_0) + D_1 \cdot \int i^2\,dt + D_2 \int i^2 \cos\zeta \cdot dt,$$

wo ε_1^0 die Integrationskonstante. Es verbleibt die Darstellung des 2. Teiles der rechten Seite von (8) bis zum 2. Grade in i, unter Vernachlässigung des Faktors in e^2 in: $\frac{1}{1-e^2} = 1 + \frac{1}{2}\,e^2 + \ldots$, so daß damit verbleibt: $\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{i}{2\sqrt{a*}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}$, wo nach (4):

$$i\,\frac{\partial R}{\partial i} = \left(-\frac{1}{4}\,B_*^1 + \frac{1}{4}\,B_*^2 \cos\zeta\right) i^2, \text{ so daß}$$

$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{1}{8}\,m'\,\frac{i^0}{\sqrt{a*}}\,(-B_*^1 + B_*^2\cos\zeta)$, also weiter:

$$(32)\quad \varepsilon_2 = \frac{1}{8}\,m'\,\frac{1}{\sqrt{a*}}\left[-B_*^1 \int i^2\,dt + B_*^2 \int i^2 \cos\zeta \cdot dt\right],$$

wo die beiden Integrale $\int i^2 \cdot dt$ und $\int i^2 \cos\zeta \cdot dt$ erst später als Funktionen von t dargestellt werden. Schließlich benötigen wir vorher noch zur Darstellung von ζ resp. $Z = \frac{d\zeta}{dt}$, gemäß (25b) die Darstellung von $\frac{d\Omega}{dt}$ gemäß (9), so daß zuerst der Faktor $\frac{1}{na^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_*}}\left(1 + \frac{1}{4}\,i^2\right)$ und ferner $\frac{1}{\sin i} = \frac{1}{i}\left(1 + \frac{1}{6}\,i^2\right)$, so daß folglich der Ausdruck (9) für $\frac{d\Omega}{dt}$ übergeht in:

$$(33)\qquad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a_*}} \cdot \frac{1}{i}\left(1 + \frac{5}{12}\,i^2\right)\frac{\partial R}{\partial i},$$

so daß die beiden Funktionen: $\frac{1}{2}\,\frac{\partial R}{\partial i}$ und $\frac{5}{12}\,i\,\frac{\partial R}{\partial i}$ bis zum gleichen 2. Grade in i zu entwickeln sind, wozu, wie aus (33) ersichtlich ist, die Störungsfunktion R in (4) notwendig bis zum 4. Grade in i zu entwickeln war, auf Grund der allgemeinen Entwicklung Le Verrier's im 10. Bande der „Annales de l'Observatoire de Paris", Serie „Mémoires", wobei $\eta = \sin\frac{1}{2}\,J$ bedeutet und bei uns J die Bahn-Neigung zwischen der Planetoiden- und der Jupiterbahn als Grundebene fixiert. Ziehen wir die entsprechenden Terme säkularer und periodischer Art ab S. 38 des genannten Bandes heraus, so erhalten wir die folgenden säkularen und die dem Hestia-Typus angehörenden periodischen Terme der Störungsfunktion R (die Gaußsche Konstante wieder gleich 1 gesetzt):

$$R = m'\left(\frac{1}{2} A^0 - \frac{1}{2} E^0 \cdot \eta^2 + \frac{1}{2} B^2 \eta^2 \cos \zeta + \frac{1}{2} G^0 \eta^4 + \frac{3}{8} R^4 \eta^4 \cos 2\zeta\right), \tag{34}$$

wo $\eta = \sin \frac{1}{2} J = \sin \frac{1}{2} i$ und $E^0 = B^1$. Dabei ist zu beachten, daß der 1. Term in R: $R_1 = \frac{1}{2} A^0$, abhängig von a, wie alle anderen Koeffizienten, nach (19) von i^2 abhängt, indem: $a = a_*\left(1 - \frac{1}{2} i^2\right)$, so daß bei Potenzentwicklung nach i^2 zuerst:

$$A^0 = A^0_* - \frac{1}{2} a_* i^2 \left(\frac{d A^0}{d a}\right)_* + \frac{1}{8} a^2_* \left(\frac{d^2 A^0}{d a^2}\right)_* \cdot i^4, \tag{35}$$

wobei wir noch den Term 4. Grades in i hinzufügen müssen, um den Term $\frac{1}{i} \frac{\partial R}{\partial i}$ in (33) $\frac{d \Omega}{d t}$ bis zu den Termen 2. Grades in i einschließlich abzuleiten. Dann folgt in bezug auf den 1. Term von (34): $R_1 = \frac{1}{2} A^0$, die Integration von (33) $\frac{d \Omega}{d t}$ fortsetzend:

$$\frac{1}{i} \frac{\partial R_1}{\partial i} = m'\left[-\frac{1}{2} a_* \left(\frac{d A^0}{d a}\right)_* + \frac{1}{4} a^2_* i^2 \left(\frac{d^2 A^0}{d a^2}\right)_* + \ldots\right]. \tag{36}$$

Der auf den 1. Term in (4) folgende 2. Term: $R_2 = -\frac{1}{2} m' E^0 \cdot \eta^2 = -\frac{1}{8} m' B^1 \cdot i^2$ erhält bei Entwicklung von B^1 bis i^2, so daß also $B^1 = B^1_* - \frac{1}{2} a_* i^2 \left(\frac{d B^1}{d a}\right)_*$ die neue Form bis i^4:

$$R_2 = -\frac{1}{8} m' B^1_* i^2 + \frac{1}{16} m' a_* i^4 \left(\frac{d B^1}{d a}\right)_*, \tag{37}$$

so daß die für die Darstellung der Knotenlänge $\frac{d \Omega}{d t}$ benötigte Funktion: $\frac{1}{i} \frac{\partial R}{\partial i}$ die Form erhält:

$$\frac{1}{i} \frac{\partial R}{\partial i} = -\frac{1}{4} m' B^1_* + \frac{1}{4} m' a_* i^2 \left(\frac{d B^1}{d a}\right)_*. \tag{38}$$

Analog folgt hieraus sogleich in bezug auf den 3. Term in (4), indem nur B^1 in B^2 übergeht und der Faktor $\cos \zeta$ hinzutritt:

$$(39)\qquad \frac{1}{i}\frac{\partial R_3}{\partial i} = \left[\frac{1}{4}\,m'\;B_*^2 - \frac{1}{4}\,m' \cdot a_* \cdot i^2 \left(\frac{d B_2}{d a}\right)_*\right] \cos\,\zeta.$$

Weiter folgt dann in bezug auf den 4. Term von (4):

$$(40)\qquad \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial R_4}{\partial i} = \frac{1}{8}\,m'\;G^0 \cdot i^2,$$

und schließlich in bezug auf den 5. Term von (4)

$$(41)\qquad \frac{1}{i}\,\frac{\partial R_5}{\partial i} = m'\;C^4 \cdot i^2 \cdot \cos\,2\,\zeta,$$

womit alle Ableitungen der 5 R-Funktionen nach i vollzogen sind, um $\frac{d\,\Omega}{d\,t}$ bilden zu können. Zu diesen Grund-Termen treten aber, um $\frac{d\,\Omega}{d\,t}$ bis i^2 vollständig bilden zu können,nach (33) noch $\frac{5}{12}\,i^2$ der oben abgeleiteten Terme hinzu, aber nur derjenigen Teile, die oben vom Grade o in i^2 sind, also zuerst nach (36):

(42 a) $-\frac{5}{24}\,m'\,\sqrt{a_*}\,\left(\frac{d\,A^0}{d\,a}\right)_* \cdot i^2$; dann weiter gemäß (38):

(42 b) $-\frac{5}{48}\,m'\,\frac{1}{\sqrt{a_*}}\,;\,B_*^1 \cdot i^2$ dann gibt der 3. Term in (4), gemäß (39)

(42 c) $+\frac{5}{48}\,m'\,\frac{1}{\sqrt{a_*}}\,B_*^2\,i^2\cos\,\zeta,$

wo noch hinzuzufügen ist, daß zum Übergang auf $\frac{d\,\Omega}{d\,t}$ gemäß (33) noch der Faktor $\frac{1}{\sqrt{a_*}}$ an (42 a), (42 b) und (42 c) angebracht wurde. Nach dieser Entwicklung der Terme in bezug auf $\frac{d\,\Omega}{d\,t}$ bleibt nun weiter gemäß (7) darzustellen:

$$(43)\qquad Z = \frac{d\zeta}{dt} = 3\,n' - n - \frac{d\varepsilon}{dt} - 2\,\frac{d\,\Omega}{d\,t},$$

noch als letzter Term: $\frac{d\zeta}{dt}$ gemäß (8): $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{n\,a}\,\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\,i \cdot \frac{\partial R}{\partial i},$

aber schon dargestellt gemäß (31 a) und (32) oben, so daß nur die Integrale $\int i^2 \cdot d\,t$ und $\int i^2 \cdot \cos\,\zeta \cdot d\,t$ zur Darstellung von ε als Funktionen von t verbleiben, wobei noch vermerkt sei, daß $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Zuerst benötigen wir deshalb $\zeta = \zeta\;(i)$ resp.

$\cos\zeta = f(i)$, um dann die Differentialgleichung für i als Funktion von t abzuleiten. Deshalb bilden wir zuerst

$$\text{(44)} \qquad \frac{d\zeta}{di} = \frac{\frac{d\zeta}{dt}}{\frac{di}{dt}} = \frac{Z}{N},$$

wo $Z = \frac{d\zeta}{dt}$ oben in (43) fixiert ist und $N = \frac{di}{dt}$ schon in (13) definiert ist und für unsere Anwendung auf (14) lautet:

$$\text{(44a)} \qquad N = \frac{di}{dt} = \frac{1}{n\,a^2} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial R}{d\,\Omega}.$$

Weiter ist in bezug auf die Darstellung von $Z = \frac{d\zeta}{dt}$ nach (43) oben zuerst zu bemerken, daß nach (19): $a = a_* \left(1 - \frac{1}{2}\,i^2\right)$, also $n = n_* \left(1 + \frac{3}{4}\,i^2\right)$; ferner ist in (43) zu substituieren: $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt}$, wo unter Weglassung des rein konstanten Teils in $\frac{d\varepsilon}{dt}$, weil dieser schon in der beobachteten mittleren Bewegung enthalten ist:

$$\text{(45)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varepsilon_1}{dt} = -\,m'\sqrt{a_*}\cdot i^2\left\{-\frac{1}{2}\,a_*\left(\dfrac{d^2A^0}{da^2}\right)_* + \frac{1}{4}\left[-\left(\dfrac{dB^1}{da}\right)_* + \left(\dfrac{dB^2}{da}\right)_*\cos\zeta\right]\right\} \\[2ex] \dfrac{d\varepsilon_2}{dt} = +\,\frac{1}{8}\,\dfrac{m'}{\sqrt{a_*}}\cdot i^2\left\{-\,B^1_* + B^2_*\cos\zeta\right\}. \end{cases}$$

Es verbleiben für die Darstellung des letzten Elementes, d. h. $\frac{d\,\Omega}{dt}$ auf Grund von R in (4), wenn $R_1, R_2 \ldots R_5$ die sukzessiven Terme in (4) fixieren, die folgenden restlichen Teile:

$$\text{(46)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{i}\,\dfrac{\partial R_1}{\partial i} = m'\left[-\frac{1}{2}\,a_*\left(\dfrac{dA^0}{da}\right)_* + \frac{1}{4}\,a_*^2\,i^2\left(\dfrac{d^2A^0}{da^2}\right)\right] \\[2ex] \dfrac{1}{i}\,\dfrac{\partial R_2}{\partial i} = m'\left[-\frac{1}{4}\,B^1_* + \frac{1}{4}\,a_*^2\,i^2\left(\dfrac{dB^1}{da}\right)_*\right] \\[2ex] \dfrac{1}{i}\,\dfrac{\partial R_3}{\partial i} = m'\left[\frac{1}{4}\,B^2_*\cos\zeta - \frac{1}{4}\,a_*\,i^2\left(\dfrac{dB^2}{da}\right)\cos\zeta\right] \\[2ex] \dfrac{1}{i}\,\dfrac{\partial R_4}{\partial i} = \frac{1}{8}\,m'\,G^0_*\cdot i^2, \quad \dfrac{1}{i}\,\dfrac{\partial R_5}{\partial i} = \frac{3}{32}\,m'\,C^4_*\,i^2\cos 2\,\zeta. \end{cases}$$

Schließlich tritt nach (33) zur Bestimmung von $\frac{d\Omega}{dt}$ zu $\frac{1}{i}\frac{\partial R}{\partial i}$ noch allgemein der Faktor $\frac{5}{12}i^2\cdot\frac{1}{\sqrt{a_*}}$ hinzu, d. h., aber nur zu den bisherigen obigen Termen 0. Grades in i, also $-\frac{5}{12}i^2$ dieser Terme, wie sie schon explizit in (42) a, b, c fixiert worden sind, womit dann $\frac{d\Omega}{dt}$ vervollständigt ist, so daß zur zeitlichen Integration nur die folgenden beiden Integrale verbleiben: $\int i^2\cdot dt$ und $\int i^2\cdot\cos\zeta\cdot dt$.

Zur Integration der letzteren beiden Integrale nach der Zeit ist es notwendig, vorher noch ζ resp. $\cos\zeta$ als Funktion von i darzustellen und dann i als Funktion von t, und zwar über die Differentialgleichung (14) in bezug auf $\frac{di}{dt}$. Dazu gehen wir von der Differentialgleichung (44) zwischen i und ζ aus, also: $\frac{d\zeta}{di}=\frac{\frac{d\zeta}{dt}}{\frac{di}{dt}}=\frac{Z}{N}$, wo Z und N in (43) resp. (44a) definiert sind, um nun noch in Reihen nach Potenzen von i mit von $\sin\zeta$ und $\cos\zeta$ abhängigen Koeffizienten dargestellt zu werden.

Zuerst ist nach (43): $Z=3n'-n-\frac{d\varepsilon}{dt}-2\frac{d\Omega}{dt}$ zu entwickeln, wobei rechts: $n=a^{-3/2}$ nach (19), wo $a=a_*\left(1-\frac{1}{2}i^2\right)$, also

$$n=n_*\left(1+\frac{3}{4}i^2\right),\quad\text{wobei } n_*=a_*^{-3/2}. \tag{47}$$

Weiter ist: $\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\varepsilon_1}{dt}+\frac{d\varepsilon_2}{dt}$ schon in (45) dargestellt, so daß die Zusammenfassung der beiden Summanden ergibt:

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\varepsilon_1}{dt}+\frac{d\varepsilon_2}{dt}=f_1 i^2+f_2 i^2\cos\zeta, \tag{48}$$

wobei dann:

$$\text{(48a)}\left\{\begin{aligned} f_1&=m'\left[\frac{1}{2}\sqrt{a_*^3}\left(\frac{d^2A^0}{da^2}\right)_*-\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{a_*}}B_*^1+\frac{1}{4}\left(\frac{dB_1}{da}\right)_*\cdot\sqrt{a_*}\right]\\ f_2&=m'\left[-\frac{1}{4}\sqrt{a_*}\left(\frac{dB^2}{da}\right)_*+\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{a_*}}B_*^2\right],\end{aligned}\right.$$

so daß zur Darstellung von Z nach (43) noch die Darstellung von $\frac{d\Omega}{dt}$ verbleibt gemäß (33), wobei der Hauptteil bereits in den

Formeln (36) bis 41) gegeben ist, ferner die Nebenteile in (42a), (42b) und (42c), wo nur, wie dort bereits vermerkt, zum Übergange auf $\frac{d\Omega}{dt}$ noch die Anbringung des Faktors $\frac{1}{\sqrt{a*}}$ nötig ist. Alsdann verbleiben noch die Darstellungen der Integrale $\int i^2 \cdot dt$ und $\int i^2 \cdot \cos\zeta \cdot dt$ als Funktionen von t, sobald ζ resp. $\cos\zeta$ als Funktionen von i dargestellt sein werden, wozu wir $\frac{d\zeta}{di}$ untersuchen wollen. Nach (14) ist, wenn wir den Divisor $\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{1}{2} e^2 = 1$ setzen: $\frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial R}{d\Omega}$, also bei Entwicklung von $\frac{1}{\sqrt{a}}$:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{a_*}} \left(1 + \frac{1}{4} i^2\right) \frac{1}{i} \frac{\partial R}{d\Omega}, \tag{49}$$

wobei nach (4) der 3. und der 5. Term der Störungsfunktion ergeben:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial R_3}{\partial \Omega} &= \frac{1}{4} m' \left[B_*^2 - \frac{1}{2} a_* i^2 \left(\frac{dB^2}{da}\right)_*\right] \sin\zeta \\ \frac{\partial R_5}{\partial \Omega} &= \frac{3}{32} m' C_*^4 \cdot i^4 \cdot \sin 2\zeta, \end{aligned}\right. \tag{49a}$$

so daß folglich gemäß der obigen fixierten Definition von $\frac{di}{dt}$ unter Mitnahme der Terme in i und i^3 einschließlich, unter Absonderung des Faktors $i \cdot \sin\zeta$ folgt:

$$N = \frac{di}{dt} = i \cdot \sin\zeta \; [F_0 + i^2 \cdot F_1 + i^2 \cos\zeta \cdot F_2], \tag{50}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} F_0 &= -\frac{1}{4} \frac{m'}{\sqrt{a*}} B_*^2, \quad F_1 = +\frac{1}{8} m' \sqrt{a_*} \left(\frac{dB^2}{da}\right)_* - \frac{1}{16} \frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^2 \\ F_2 &= -\frac{3}{16} C_*^4 \frac{m'}{\sqrt{a_*}} \end{aligned}\right. \tag{50a}$$

wonach also gemäß (50) Extreme Werte von i eintreten nur bei $\sin\zeta = 0$, also bei $\zeta = 0^0$ und $\zeta = 180°$, und nur bei diesen Werten von ζ, weil die Koeffizienten F_0 und F_1 von derselben Größen-Ordnung sind, so daß die eckige Klammer in (50) $\frac{di}{dt}$ rechts nicht verschwinden kann. Eine Entscheidung über die Möglichkeit der beiden genannten Grenzwerte überhaupt ist erst nach Integration $\zeta = \zeta(t)$ möglich.

Es verbleibt nun noch die Zusammenstellung der Funktion $Z = \frac{d\zeta}{dt}$, um alsdann nach der obigen Ableitung von $\frac{di}{dt}$ die entscheidende Endgleichung für $\zeta = \zeta(t)$: (51) $\frac{d\zeta}{oi} = \frac{Z}{N} = f(i, \zeta)$ zu bilden. Nach (43) verbleibt die Aufgabe, die rechte Seite, d. h. $\frac{d\zeta}{dt} = Z = 3n' - n - \frac{d\varepsilon}{dt} - 2\frac{d\Omega}{dt}$ nach Potenzen von i zu entwickeln, wobei zuerst gemäß (47) bereits $n = n_*\left(1 + \frac{3}{4}i^2\right)$, ferner ist nach (48) zu substituieren $\frac{d\varepsilon}{dt} = f_1 \cdot i^2 + f_2 i^2 \cdot \cos\zeta$, wo die Koeffizienten f_1 und f_2 unter (48) fixiert sind. Schließlich verbleibt noch zur Darstellung von Z die unter (33) fixierte Darstellung von $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a_*}}\left(1 + \frac{5}{12}i^2\right)\frac{1}{i}\frac{\partial R}{\partial i}$ als Funktion von i und $\cos\zeta$, und zwar auf Grund der schon in (36), (38), (39), (40) und (41) abgeleiteten Einzelterme unter Hinzufügung der in (42a, b, c) dargestellten Zusatzterme auf Grund des in (33) fixierten Zusatztermes in der folgenden Form: $\frac{5}{12}\frac{1}{\sqrt{a_*}}i^2\frac{\partial R}{\partial i}$, unter Anwendung nur auf die Terme vom Grade 0 in $\frac{1}{i}\frac{\partial R}{\partial i}$, um damit die Ergänzungsterme 2. Grades auf Grund des Zusatzfaktors $\frac{5}{12}i^2$ zu erhalten. Die weiteren in Betracht kommenden Zusatzterme 2. Grades in i sind bereits unter (42) fixiert.

Nachdem $N = \frac{di}{dt}$ definitiv nach (50) als Funktion von $i \cdot \sin\zeta$, $i^3 \cdot \sin 2\zeta$ etc. dargestellt worden sind, verbleibt jetzt noch die entsprechende Darstellung für $Z = \frac{d\zeta}{dt}$, um damit dann $\frac{d\zeta}{di} = \frac{\frac{d\zeta}{dt}}{\frac{di}{dt}} = \frac{Z}{N}$ als Funktion von i^2, $\cos\zeta$, $\cos 2\zeta$ darzustellen, um alsdann $\zeta = \zeta(i)$ darstellen zu können. Die Funktion Z hat nun die folgende Bedeutung:

$$(52)\quad Z = \frac{d\zeta}{dt} = z_0 + z_1 i^2 + z_2 \cos\zeta + z_3 i^2 \cos\zeta + z_4 i^2 \cos 2\zeta,$$

wobei die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$(52\mathrm{a})\left\{\begin{aligned}
z_0 &= 3n' - n_* + m' \frac{1}{\sqrt{a_*}}\left[a_*\left(\frac{dA^0}{da}\right)_* - \frac{1}{2}B_*^2\right] \\
z_1 &= -\frac{3}{4}n_* + \frac{1}{8}m'\frac{1}{\sqrt{a_*}}B_*^1 + m'\sqrt{a_*}\left[-\frac{1}{2}a_*\left(\frac{d^2A^0}{da^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{dA^0}{da}\right)_*\right] \\
&\quad - 2\frac{m'}{\sqrt{a_*}}\left[+\frac{1}{4}a_*^2\left(\frac{d^2A^0}{da^2}\right)_* - \frac{5}{24}a_*\left(\frac{dA^0}{da}\right)_* + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8}a_*\left(\frac{dB^1}{da}\right)_* + \frac{1}{2}a_*^2\left(\frac{d^2B^1}{da^2}\right)_* + \frac{1}{8}G_*^0\right] \\
z_2 &= -\frac{1}{2}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}B_*^2, \quad z_3 = \frac{1}{4}m'\sqrt{a_*}\left(\frac{dB^2}{da}\right)_* - \frac{5}{24}m'\frac{1}{\sqrt{a_*}}B_*^2 \\
z_4 &= -\frac{1}{8}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}B_*^2 - \frac{3}{16}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}C_*^4,
\end{aligned}\right.$$

so daß hiermit $\frac{di}{dt}$ und $\frac{d\zeta}{dt}$ nach (50) und (52) als Funktionen von i und $\cos\zeta$ resp. $\cos 2\zeta$ dargestellt sind.

Da nun nach (44): $\frac{d\zeta}{di} = \frac{\frac{d\zeta}{dt}}{\frac{di}{dt}} = \frac{Z}{N}$, so folgt weiter nach (50) und (52):

$$(53)\qquad \frac{d\zeta}{di} = \frac{z_0 + z_1\cdot i^2 + z_2\cos\zeta + z_3 i^2\cos\zeta + z_4\cdot i^2\cdot\cos 2\zeta}{i\sin\zeta\,[F_0 + F_1 i^2 + F_2 i^2\cdot\cos 2\zeta]}\,.$$

Diese für unsere Lösung entscheidende Differentialgleichung (53) können wir nun weiter auf eine bekannte, klassische Form bringen, wenn wir den Nenner-Faktor $i\cdot\sin\zeta$ rechts auf die linke Seite bringen, so daß die linke Seite von (53) in $-i\,\frac{d(\cos)\zeta}{dt}$ übergeht; ferner werde der restliche Nenner rechts nach Abspaltung des Faktors F_0 durch Potenz-Entwicklung nach i^2 in den Zähler gebracht, so daß die neue Differentialgleichung entsteht, wenn noch $\frac{i}{di} = 2\,i^2/d\,(i^2)$ substituiert wird, so daß die folgende neue Gleichung entsteht, wenn noch $\cos 2\zeta = 2\cos^2\zeta - 1$ gesetzt wird:

$$(54\mathrm{a})\quad i^2\cdot\frac{d(\cos\zeta)}{d(i^2)} = -\frac{1}{2F_0}\left[z_0 + z_1\cdot i^2 + z_2\cos\zeta + z_3 i^2\cos\zeta + z_4\cdot i^2\cos 2\zeta\right] \cdot\left[1 - i^2\frac{F_1}{F_0} - \frac{F_2}{F_0}i^2\cos\zeta\right]$$

oder, wenn noch $i^2 = x$ und $\cos\zeta = y$ gesetzt wird:

$$
(55\text{a} \quad \left\{
\begin{aligned}
& x \cdot \frac{dy}{dx} = C_0 + C_1 x + C_2 y + C_3 x \cdot y + C_4 x \cdot y^2, \\
& \text{wo die Koeffizienten bedeuten:} \\
& C_0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{z_0}{F_0}\, C_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{F_0}\left[z_1 - z_0 \frac{F_1}{F_0} - z_4\right], \\
& C_2 = -\frac{1}{2}\frac{z_2}{F_0} \\
& C_3 = -\frac{1}{2F_2}\left[z_3 - z_2 - z_0 \cdot \frac{F_2}{F_0}\right], \\
& C_4 = -\frac{1}{2F_0}\left[2z_4 - z_2 \cdot \frac{F_2}{F_0}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Um nun diese an die Ricattische resp. Briot-Bouquetsche Differenzialgleichung erinnernde Gleichung, in der $x = i^2$ eine kleine Größe 2. Ordnung und wo $y = \cos \zeta$, also immer $|y| < 1$ ist, wegen der Konstanten C_0 auf eine homogene Form zu bringen, werde:

$$
(55\text{a}) \quad \left\{
\begin{aligned}
& C_0 + C_2 \cdot y = \eta \qquad \text{gesetzt, also:} \\
& y = \alpha \cdot \eta + \beta, \text{ wo } \alpha = \frac{1}{C_2} \text{ und } \beta = -\frac{C_0}{C_2} = -\frac{z_0}{z_2},
\end{aligned}
\right.
$$

so daß die neue, nunmehr homogen gemachte Differentialgleichung in die folgende Normalform übergeht:

$$
(55\text{b}) \quad x \cdot \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{\alpha}\{\eta + x(C_1 + C_3\beta + C_4\beta^2) + \eta \cdot x(\alpha C_3 + 2\alpha\beta C_4) + \alpha^2 C_4 x \cdot \eta^2\}
$$

wo noch vermerkt sei, daß $x = i^2$ und $\eta = \gamma \cdot y + \delta$, wo noch $\gamma = \frac{1}{\alpha} = C_2$, $\delta = C_0 = -\frac{\alpha}{\beta}$. Die Bedingung zur Potenz-Entwicklung von $\eta = P(x)$ in (55b) ist nun bekanntlich die, daß der Koeffizient von η, dem 1. Gliede auf der rechten Seite von (55b): $\frac{1}{\alpha}$, keine positive Zahl sein darf, so daß also $\frac{1}{\alpha} = \gamma = C_2 \mp 1, 2, 3, \ldots$ sein muß. In unserem Problem ist es von vorneweg unwahrscheinlich, daß die genannte Bedingung nicht erfüllt sein könnte. Dann aber lautet die Lösung unserer Differentialgleichung (55b), eine Potenzreihe nach x:

$$
(55\text{c}) \qquad \eta = f_1 \cdot x + f_2 \cdot x^2 + \ldots
$$

wonach auch die entsprechende Reihe für $y = \frac{1}{C_2}(\eta' - C_0)$ als Potenzreihe nach i^2 folgt. Die Koeffizienten-Bestimmung durch die Substitution von (55c) in (55b) ergibt zunächst die folgende Gleichung:

$$(55\text{d})\quad x(f_1 + 2f_2 \cdot x + \ldots) = \frac{1}{\alpha}[f_1 x + f_2 \cdot x^2 +$$
$$+ x(C_1 + C_3 \cdot \beta + C_4 \cdot \beta^2 + \ldots) + x(f_1 x + f_2 \cdot x^2 + \ldots) \cdot$$
$$\cdot (x C_3 + 2C_4 \cdot \alpha\beta) + x\alpha^2 \cdot C_4(f_1 x^2 + f_2 x^4 + 2f_1 \cdot f_2 \cdot x^2 + \ldots)]$$

woraus sich die gesuchten Koeffizienten f_1, f_2 usw. vergleichsweise ergeben: indem zuerst bei Vergleich des Koeffizienten in x^1 beiderseits folgt:

$$f_1 = \frac{1}{\alpha}[f_1 + C_1 + C_3\beta + C_4\,\beta^2 + \ldots], \quad \text{also}$$

$$f_1 = \frac{1}{\alpha - 1}[C_1 + C_3 \cdot \beta + C_4 \cdot \beta^2 + \ldots],$$

wonach aber der weitere Vergleich des Koeffizienten von $x^2 = i^4$ nicht mehr in Frage kommt, und weiter zu bemerken bleibt, daß die Koeffizienten C_0, C_1 usw. bereits in (55a) als Funktionen von $F_0, F_1, F_2 \ldots$ fixiert worden sind. Da nun weiter: $\eta = f_1 \cdot x = f_1 i^2$, wo f_1 soeben in (55e) fixiert worden ist und $y = \cos\zeta = \alpha \cdot \eta + \beta$, so wird: $y = \cos\zeta = \alpha f_1 \cdot i^2 + \beta$, wo die Koeffizienten α und β unter (55a) definiert worden sind; definitiv setzen wir nun

$$(56)\qquad \cos\zeta = c_0 + c_1 \cdot i^2, \quad \text{wo}$$

$$(56\text{a}):\qquad c_0 = \beta = -\frac{z_0}{z_2} \text{ und } c_1 = \alpha \cdot f_1.$$

Alsdann bleibt als Final die Darstellung von i als $F(t)$, um alsdann auch $\cos\zeta$ resp. ζ und weiter noch Ω und i als Funktionen der Zeit ableiten zu können.

Nach (14) erhielten wir als Differentialgleichung für i die Gleichung: $\frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2} \cdot \frac{1}{i}\frac{\partial R}{\partial \Omega}$, so daß unter Ableitung von $\frac{\partial R}{\partial \Omega}$ nach (4) und darauf folgender Potenz-Entwicklung nach i unter Vernachlässigung des 3. Grades in i die folgende Differential-Gleichung resultiert:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^2 \cdot i \sin\zeta, \tag{57}$$

oder integrierend:

$$J = \int \frac{di}{i \sin\zeta} = -\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^2 (t - t_0) + C, \tag{58}$$

wo C die Integrationskonstante fixiert.

Mittels (56) folgt weiter, um den Integranden völlig als Funktion von i darzustellen:

$$\sin\zeta = \sqrt{\alpha + \beta \cdot i^2}, \quad \text{wo } \alpha = 1 - c_0^2 \quad \text{und} \quad \beta = -2c_0 \cdot c_1; \tag{58a}$$

das neue Integral lautet dann gemäß (58):

$$J = \int \frac{di}{i\sqrt{\alpha + \beta i^2}} = K(t - t_0) + C, \quad \text{wo} \tag{59}$$

$$K = -\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{\alpha_*}} B_*^2, \tag{59a}$$

wo zu beachten bleibt, daß stets: $K < 0$. Da der Fall, wo gleichzeitig $\alpha < 0$ und $\beta < 0$ als Anlaß zu imaginärem Falle ausgeschlossen ist, bleiben für die reelle Integration nur die folgenden 3 Fälle von (59): (59_1): $\alpha > 0$, $\beta < 0$; (59_2): $\alpha > 0$, $\beta > 0$; (59_3): $\alpha < 0$, $\beta > 0$, entsprechend 3 Integral-Typen mit den zugehörigen reellen Lösungen. Der 1. Fall (59_1) entspricht dann dem Integral:

$$J = \int \frac{di}{i\sqrt{\alpha - i^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln\left[\frac{\alpha + \sqrt{\alpha - i^2}}{i}\right] = K(t - t_0) + C. \tag{60}$$

Folglich ergibt die Auflösung nach (60) sukzessive: $\sqrt{\alpha - i^2} = i \cdot E^{-\sqrt{\alpha}\cdot J} - \sqrt{\alpha}$, so daß nach Quadrieren dieser Gleichung zur Beseitigung der Wurzel zunächst folgt: $i^2 = 2\sqrt{\alpha}\, i \cdot E^{-\sqrt{\alpha}\cdot J} - i^2 \cdot E^{-2\sqrt{\alpha}\cdot J}$, so daß: (1) $i = 0$, ohne Bedeutung, weil $i \neq 0$ vorausgesetzt war, und ferner (2) als reale Lösung folgt:

$$i = \frac{2\sqrt{\alpha}\, K}{1 + K^2}, \quad \text{wo:} \tag{61}$$

$$K = E^{-\sqrt{\alpha}\cdot J}, \tag{61a}$$

wo $J = K(t - t_0) + C$, so daß der Anfangswert $i_0 = 2\sqrt{\alpha} \cdot \frac{K_0}{1+K_0^2}$, woraus der Anfangswert K_0 folgt als Funktion des Anfangswertes i_0 und weiter nach (59): $C = J_0$ mittels J_0 aus $K_0 = E^{-\sqrt{\alpha}\cdot J_0}$.

Es verbleibt noch die Feststellung eines Extremwertes der Bahn-Neigung i gemäß der Darstellung nach (61) nebst (61 a), wonach die Extrem-Bedingung lautet:

$$(62) \qquad \frac{di}{dt} = 2\sqrt{\alpha}\, \frac{1-K^2}{(1+K^2)^2} \cdot \frac{dK}{dt},$$

wonach ein Extrem also eintreten muß bei: $K^2 = 1$, also bei $K = \pm 1 = E^{-\sqrt{\alpha}\cdot J}$, also bei der 1. Lösung bei $K = +1 = E^{-\sqrt{\alpha}\cdot J}$, also bei 1. Lösung: $J = 0$, während die 2. Lösung: $K = -1$ keine reelle Lösung J ergibt; es wird also bei Substitution von $K = 1$ in (61): i (Extrem) $= \sqrt{\alpha} = \sqrt{1 - c_0^2}$, wo nach (56a): $c_0 = \beta = -\frac{z_0}{z_2}$, so daß

$$(62\text{a}): \qquad i\,(\text{max.}) = \sqrt{1 - \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2},$$

wo z_0 und z_2 bereits in (52a) definiert sind und hier auf die folgende Form gebracht werden sollen:

$$(62\text{b}): \quad z_0 = 3\cdot n' - n_* + m'\cdot f_1 \text{ und } z_2 = -\frac{1}{2}\frac{m'}{\sqrt{a_*}} B_*^2 = m'\cdot g_1,$$

wobei f_1 und g_1 die folgende Bedeutung haben:

$$(63) \quad f_1 = \frac{1}{\sqrt{a_*}}\left[a_*\left(\frac{dA^0}{da}\right)_* - \frac{1}{2} B_*^2\right], \qquad g_1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a_*}} B_*^2.$$

Zur Darstellung von i (max.) nach (62 a) benötigen wir die Darstellung der Faktoren:

$$\left.\begin{array}{l} z_2 - z_0 \text{ und } z_2 + z_0, \text{ d.h.: } z_2 - z_0 = m'\cdot g_1 - (3n' - n_*) - m'\cdot f_1 \cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad z_2 + z_0 = m'\cdot g_1 + (3n' - n_*) + m'\cdot f_1, \\ \text{so daß} \\ z_2 = m'\, g_1, \quad \text{ferner} \quad z_2^2 - z_0^2 = m'^2 \cdot g_1^2 - (3n' - n_* + m' f_1)^2, \end{array}\right\}$$

so daß schließlich:

$$(64)\quad i_{\max} = \frac{\sqrt{z_2^2 - z_0^2}}{z_2} \equiv \frac{1}{m' \cdot d_1} \sqrt{m'^2 \cdot g_1^2 - (3n' - n_* + m' \cdot f_1)^2},$$

wo f_1 und g_1 (nach (63) oben als Terme 0. Grades in bezug auf m' definiert waren; ferner ist die kritische Größe: $| 3n' - n |$ im Falle eines Maximalwertes von $20''$, also im Bogenwert: $20'' \sin (1'') = 1 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{10} m'$, wo $m' \equiv \frac{1}{1000}$ die störende Jupitermasse fixiert, so daß folglich die Terme in (64) unter der Wurzel alle von der Ordnung $(m')^2$ sind, also $i_{\max} = \frac{\sqrt{g_1^2 - f_1^2}}{g_1}$ wo f_1 und g_1 nach der Definition (63) Größen 0. Ordnung sind, also explizit unter Vernachlässigung des Terms in $3n' - n$ neben $m' \cdot f_1$ lauten: $i_{\max} = \frac{1}{m' g_1} \sqrt{m'^2 \cdot g_1^2 - m'^2 \cdot f_1^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_1}{g_1}\right)^2}$, so daß folglich: arc i (max.) < 1, d. h. $i < 57°$, in Wirklichkeit wohl weit weniger. Von weiterem Interesse ist die kosmologische Frage nach dem Verhalten der Elemente in weit entfernter Zukunft resp. weit zurückliegender Vergangenheit, wobei wir von dem Ausdrucke für i nach (61) oben ausgehen, wobei nun $t = +\infty$ sein soll, also nach (61) und (61 a), da $K = 0$: $K = E^{-\sqrt{\alpha} \cdot t} = +\infty$, also nach (61): $i (t = +\infty) = 0$. Analog wird bei $t = -\infty$, also $K = 0$: $i (t = -\infty) = 0$, so daß die Bahn des Planetoiden in ∞-ferner Zukunft resp. in ∞-ferner Vergangenheit mit der Jupiterbahn zusammenfallen müßte, wozu zu bemerken ist, daß, wenn der Planetoid in ∞-ferner Vergangenheit in der Jupiterbahn war, nicht aus ihr herauskam, womit nur bewiesen ist, daß unsere Theorie nicht auf ∞-große Zeiträume anwendbar sein kann, nur die Tendenz kann angedeutet sein. Die vernachlässigten kurzperiodischen Glieder würden genügen, den Planetoiden nicht in der Jupiterbahn zu belassen, wozu praktisch dann noch die Anziehungen aller übrigen großen Planeten ein Verbleiben des Planetoiden in der Jupiterbahn verhindern werden. Aber bemerkenswert bleibt, daß die Anziehung des Jupiter immer eine säkulare Annäherung der Planetoidenbahn an die des Jupiter bedeutet. Damit ist unser 1. Fall, oben (59_1) erledigt.

Nunmehr kommen wir zum 2. Falle von (59), also $\alpha > 0, \beta > 0$, wo nun:

(66) $J_2 = \int \frac{di}{i\sqrt{\alpha + i^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left[\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha + i^2}}{i}\right] = K(t - t_0) + C,$

so daß unmittelbar: $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha + i^2} = i \cdot E^{-\sqrt{\alpha}[K(t-t_0)+C]}$. Bringen wir hierzu den Term $\sqrt{\alpha}$ der linken auf die rechte Seite, so ergibt sich nach beiderseitigem Quadrieren nach Wegfall von α beiderseits die i bestimmende Gleichung: $i^2 = i^2 \cdot E^{-2\sqrt{\alpha}\cdot J} - 2\sqrt{\alpha}\, i\, E^{-\sqrt{\alpha}\cdot J}$, also weiter, unter Wegfall der unbrauchbaren Lösung $i = 0$, die Lösung:

$$i = -\frac{2\sqrt{\alpha}\cdot E^{-\sqrt{\alpha}\cdot J}}{1 - E^{-2\sqrt{\alpha}\cdot J}}, \text{ wo } J = K(t - t_0) + C,$$

oder auch in zweckmäßigerer Form definitiv:

$$(67) \qquad i = \frac{2\sqrt{\alpha}}{E^{-\sqrt{\alpha}J} - E^{+\sqrt{\alpha}\cdot J}},$$

woraus zuerst folgt, daß den beiden Extremwerten $t = \pm\infty$ die Neigung $i = 0$ entspricht, d. h. daß der Planetoid beim Anfang der Bewegung in der Jupiterbahn lag, deswegen dann aber seine Bahn nicht hätte verlassen können, was aber nur besagt, daß die Theorie für unendlich ferne Vergangenheit nicht gelten kann, während andererseits bei $t = +\infty$ der Planetoid in die Jupiterbahn fällt, wobei allerdings noch hinzuzufügen bleibt, daß die periodischen und säkularen Störungen, und zwar aller großen Planeten, den Planetoiden in jedem Falle aus der Jupiter-Ebene wieder herausheben. Es verbleibt noch die Bestimmung der in J auftretenden Integrationskonstanten C gemäß der Definition: $J = K(t - t_0) + C$, also $C = J_0$; setzen wir $E^{\sqrt{\alpha}\cdot J_0} = x$, also $i = i_0$, so ist nach (67): $x = E^{\sqrt{\alpha}J_0} = -\frac{\sqrt{\alpha}}{i_0} \pm \frac{1}{i_0}\sqrt{i_0^2 + \alpha}$, so daß:

$$(68) \qquad J_0 = C = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln\left[\frac{-\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{i_0^2 + \alpha}}{i_0}\right],$$

wo nur das obere Vorzeichen gilt, damit der Zähler positiv bleibt (α immer positiv), womit nun $C = J_0$ eindeutig festgelegt ist.

Schließlich verbleibt noch die Darstellung der 3. Lösung J_3 für die Neigung i, gemäß: (59_3), wonach $\alpha < 0$ und $\beta > 0$ ($\beta = +1$) und $I_3 = \int \frac{di}{i\sqrt{i^2-\alpha^2}} = -\frac{1}{\alpha} \arcsin \frac{\alpha}{i} = K(t-t_0) + C$, so daß bei Umkehrung:

$$(69): \qquad i_3 = -\frac{\alpha}{\sin(\alpha J_3)}, \text{ also } (i_0)_3 = -\frac{\alpha}{\sin(\alpha J_{3,0})}.$$

woraus C zu bestimmen bleibt, da $J_{3,0} = C$.

Für die weitere Untersuchung der unbekannten Variablen ε und Ω und ihre Darstellung als Funktion der Zeit benötigen wir nach den früheren Darstellungen in (48) resp. (33) und (46) die zeitliche Darstellung der Integrale: $\int i^2 \cdot dt$ und $\int i^2 \cos \zeta \, dt$ als Funktionen der Zeit t. Dabei reduziert sich das 2. Integral unmittelbar auf das 1. Integral, nachdem oben bereits $\int i^2 \cdot dt$ abgeleitet ist und, weil das 2. Integral durch den Faktor i^2 bereits vom 2. Grade ist, so daß $\cos \zeta$ auf den Term in c_0 beschränkt bleibt, da Terme in i^4 als Koeffizient vernachlässigt werden, so daß nur das $\int i^2 \cdot dt$ entsprechend den früheren 3 Fällen von i als Funktion von t darzustellen bleibt, d. h. entsprechend den Fällen (59_1), (59_2) und (59_3).

Zuerst wird dann, dem Falle (59_1) entsprechend, nach (61):

$$(70) \qquad \int i^2 \cdot dt = 4\alpha \int \frac{K^2}{(1+K^2)^2} \cdot dt,$$

$$\text{wo } (70_*): \; K = E^{-\sqrt{\alpha} \cdot J} \text{ und } J = K(t-t_0) + C.$$

Bringt man (70) zunächst zwecks Integration auf die weitere Form: $\int i^2 \cdot dt = 4\alpha \cdot \int \left[\frac{1}{1+K^2} - \frac{1}{(1+K^2)^2} dt\right]$, wo noch $dt = \frac{dJ}{K} = -\frac{1}{K\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{dK}{K}$ substituiert werde, so erhält das Integral die weitere Form:

$$(70a): \quad \int i^2 \cdot dt = -4\frac{\sqrt{\alpha}}{K} \int \left[\frac{1}{1+K^2} - \frac{1}{(1+K^2)^2}\right] \cdot \frac{dK}{K},$$

wo die beiden Teil-Integrale ergeben, zunächst das erste Integral:

$$(\alpha) \quad \int \frac{dK}{K(1+K)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(K^2)}{K^2(1+K)^2} = \frac{1}{2}[\ln K^2 - \ln(1+K^2]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{E^{-2\sqrt{\alpha}\cdot J}}{1+E^{-\sqrt{\alpha}\cdot J}}\right]$$

so daß schließlich der 1. Teil von (70) ergibt:

$$(a) \quad \int i^2 \cdot dt = -2\cdot\frac{\sqrt{\alpha}}{K}\ln\frac{E^{-2\sqrt{\alpha}\cdot J}}{1+E^{-2\sqrt{\alpha}\cdot J}}, \text{ wo } J = K(t-t_0)+C.$$

Weiter lautet dann der 2. Teil von (70a):

$$(b) \qquad J = \int \frac{dK}{K(1+K^2)^2},$$

oder wenn weiter $K^2 = x$ gesetzt wird:

$$J = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(1+x)^2} = \frac{1}{2}\int\left[\frac{dx}{x(1+x)} - \frac{dx}{(1+x)^2}\right.,$$

also bei Integration: $J = \frac{1}{2}\left[\ln x = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right]$, worin

noch zu substituieren bleibt: $x = K^2$, so daß schließlich explizit nach der obigen Gleichung (b) folgt:

$$(b_1) \qquad J = \int\frac{dK}{K(1+K^2)^2} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{K^2}{1+K^2}\right) + \frac{1}{1+K^2}\right]$$

wo noch nach (70_*) $K = E^{-\sqrt{\alpha}\cdot J}$ und $J = \varkappa(t-t_0)+C$, wo $\varkappa = -\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{a_*}}\cdot B_*^2 < 0$, so daß bei immer größer werdendem $t-t_0 > 0$: J negativ, und schließlich negativ-unendlich wird, so daß das Integral (b_1), da K nach (70_*) positiv bis $+\infty$ ansteigt, schließlich an der Grenze $t-t_0 = +\infty$ zu 0 wird. Weiter wird nach oben (a) bezüglich $\int i^2\cdot dt$ bei der hier jetzt notwendigen Umformung: $\int i^2\cdot dt = -\frac{2\sqrt{\alpha}}{K}\cdot\ln\left(\frac{1}{E^{2\sqrt{\alpha}J}+1}\right)$, also bei $t-t_0 = +\infty$: $E^{2\sqrt{\alpha}\cdot J} = 0$ und deshalb $\int i^2\cdot dt = 0$.

Im 2. Falle: (59_2), wo $\alpha > 0$ und $\beta > 0$, ist die Bahn-Neigung i nach (67) als Funktion der Zeit definiert durch die Darstellung:

$i = \frac{2\sqrt{\alpha}}{E^{-\sqrt{\alpha}\cdot J} - E^{+\sqrt{\alpha}J}}$. Setzen wir den von der Zeit abhängigen Term $E^{\sqrt{\alpha}\cdot I} = K$, so daß $i = \frac{2\sqrt{\alpha}\,K}{1-K^2}$, also: $\sqrt{\alpha}\,E^{\sqrt{\alpha}I}\cdot dJ = dK$, wo noch, weil $J = \mathsf{K}(t-t_0) + C$: $dJ = \mathsf{K}\cdot dt$, so daß folglich zuerst: $dt = \frac{dJ}{\mathsf{K}} = \frac{1}{\mathsf{K}}\frac{d\mathsf{K}}{\sqrt{\alpha}\cdot \mathsf{E}^{\sqrt{\alpha}\cdot J}} = \frac{1}{\mathsf{K}}\cdot\frac{dK}{K\sqrt{\alpha}}$ und dazu: $i^2 = \frac{4\alpha K^2}{(1+K^2)^2}$, so folgt nach den beiden letzten Darstellungen von i^2 und dt für das gesuchte Integral:

$$(71)\quad \int i^2\cdot dt = 4\frac{\sqrt{\alpha}}{K}\int\frac{K\,dK}{(1-K^2)^2} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{K}\int\frac{d(K^2)}{(1-K^2)^2} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{K}\cdot\frac{1}{1-K^2}.$$

Gehen wir nun zum 2. Falle über, fixiert durch die Definition von i gemäß (67), wonach: $i = \frac{2\sqrt{\alpha}}{E^{-\sqrt{\alpha}\cdot I} - E^{+\sqrt{\alpha}\cdot I}}$, so wollen wir zuerst $E^{\sqrt{\alpha}\cdot I} = K$ setzen, so daß $i = \frac{3\sqrt{\alpha}\,K}{1-K^2}$, also i durch K dargestellt wird, und $\sqrt{\alpha}\;E^{\sqrt{\alpha}\cdot I}\cdot dI = dK$, wo, weil $I = K(t-t_0) + C$,: $dI = K\cdot dt$, so daß:

$$dt = \frac{dI}{K} = \frac{1}{K}\frac{dK}{\sqrt{\alpha}}E^{-\sqrt{\alpha}\cdot I} = \frac{1}{K\sqrt{\alpha}}\frac{dK}{K} \text{ und } i^2 = \frac{4\alpha K^2}{(1-K^2)_2},$$

so daß also nach den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\int i^2\cdot dt = \frac{4\sqrt{\alpha}}{K}\int\frac{K}{(1-K^2)^2}dK = \frac{2\sqrt{\alpha}}{K}\int\frac{d(K^2)}{(1-K^2)^2} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{K}\cdot\frac{1}{1-K^2},$$

wo K eine bekannte Funktion der Zeit ist, indem nach oben, (70_*): $K = E^{-\sqrt{\alpha}\cdot I}$, wo noch $I = K(t-t_0) + C$ und $K = -\frac{1}{4}\frac{m'}{\sqrt{\alpha_*}}B_*^2$ und C die Integrationskonstante.

Schließlich ist der 3. Fall (59_3) entsprechend, wo $\alpha < 0$, $\beta > 0$, entsprechend (59_3), so daß nach (69): $i_3 = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sin(\sqrt{\alpha}\cdot I)}$, wo $I_{3,0} = C$ zu bestimmen aus: $(i_3)_0 = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\sin(\sqrt{\alpha}\,I_{3,0})}$. Weiter folgt für diesen Fall die Bestimmung des Integrals:

$$\int i^2\cdot dt = \alpha\int\frac{dt}{\sin^2(\sqrt{\alpha}\cdot I)} = -\frac{\sqrt{\alpha}}{K}\operatorname{ctg}\left(\sqrt{\alpha}\cdot I\right),$$

wo wieder $I = K(t - t_0) + C$, womit nun das kritische Integral $\int i^2 \cdot dt$ in den zu fixierenden 3 Fällen als Funktion von t dargestellt ist. Damit ist die Voraussetzung für die Darstellung der Elemente a, ε und Ω als Funktionen des 4. Elementes i geschaffen, ebenso wie für die Darstellung als Funktion der Zeit, nachdem i als Funktion der Zeit in den vorliegenden 3 Fällen dargestellt worden ist, neben der entsprechenden Darstellung des kritischen Winkels ζ resp. von $\cos \zeta$ in der Form: $\cos \zeta = c_0 + c_1 \cdot i^2$. Weiter folgen die mittlere Bewegung n auf Grund der Darstellung (24): $n = n_* \left(1 + \frac{3}{4} i^2\right)$ als Funktion der Zeit, analog also das Integral: $\int n \cdot dt = n_*(t - t_0) + \frac{3}{4} n_* \int i^2 \cdot dt$, insbesondere zur Ableitung der mittleren Länge: $l = \varepsilon + \int n\, dt$. Die mittlere Länge der Epoche: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ folgt mittels der Gleichungen für ε_1 und ε_2 auf Grund der Darstellungen in (45) nach den Darstellungen von i^2 und $i^2 \cdot \cos \zeta$, wobei noch in i^2 $\cos \zeta$, weil i^2 schon vom 2. Grade ist: $\cos \zeta = c_0$, gemäß (56) und (56a) zu setzen ist.

Die Darstellung der Knotenlänge Ω als Funktion der Zeit t folgt nach den Gleichungen (33) bis (42c) unter Verwendung der schon fixierten Integrale $\int i^2 \cdot dt$ und $\int i^2 \cos \zeta\, dt = c_0 \cdot \int i^2\, dt$, womit die Gesamtintegration als beendet betrachtet werden kann.