BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1964

MÜNCHEN 1965

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über singuläre Stellen in den Differentialgleichungen des Dreikörperproblems*

Von Helmut Selder in Augsburg

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 7. Februar 1964

Übersicht

§ 1. Einleitung 13

§ 2. Untersuchungen über Stöße erster und zweiter Art. 15

§ 3. Berechnung der Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}\left[\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]$ zur Zeit t = 0 für die Ergebnisse von K. F. Sundman 17

§ 4. Untersuchung der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems auf Lösungen mit algebraischen Singularitäten 18

§ 5. Bestimmung der Exponenten μ aus dem Energiesatz 21

§ 6. Untersuchungen des Dreierstoßes zweiter Art . . . 25

§ 7. Algebraische Lösungen für den Dreierstoß zweiter Art 28

§ 8. Reihenentwicklung samt Konvergenzbeweis . . . 36

§ 9. Logarithmische Lösungen 40

§ 10. Berechnung der Flächengeschwindigkeit 45

§ 1. Einleitung

Unter dem Dreikörperproblem versteht man folgende Fragestellung: Wie bewegen sich drei Punkte mit den Massen m_1, m_2, m_3, die sich nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen?

Wenn die Lage der drei Massenpunkte in einem Inertialsystem durch ihre rechtwinkeligen Koordinaten x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, 2, 3$)

---

* Diss. Technische Hochschule München 1963 in gekürzter Fassung.

charakterisiert werden, ihre gegenseitigen Entfernungen also durch $r_{\mu\nu} = \sqrt{(x_\mu - x_\nu)^2 + (y_\mu - y_\nu)^2 + (z_\mu - z_\nu)^2}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3)$ gegeben sind, und die Gravitationskonstante durch passende Wahl der Einheiten gleich 1 gesetzt wird, lauten die Bewegungsgleichungen für das Dreikörperproblem:

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2(x_2-x_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x_3-x_1)}{r_{13}^3}; \quad \ddot{y}_1 = \frac{m_2(y_2-y_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(y_3-y_1)}{r_{13}^3}; \quad \ddot{z}_1 = \frac{m_2(z_2-z_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(z_3-z_1)}{r_{13}^3};$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_1(x_1-x_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x_3-x_2)}{r_{23}^3}; \quad \ddot{y}_2 = \frac{m_1(y_1-y_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(y_3-y_2)}{r_{23}^3}; \quad \ddot{z}_2 = \frac{m_1(z_1-z_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(z_3-z_2)}{r_{23}^3};$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{m_1(x_1-x_3)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(x_2-x_3)}{r_{23}^3}; \quad \ddot{y}_3 = \frac{m_1(y_1-y_3)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(y_2-y_3)}{r_{23}^3}; \quad \ddot{z}_3 = \frac{m_1(z_1-z_3)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(z_2-z_3)}{r_{23}^3}.$$

In den Funktionen $x_\nu(t)$, $y_\nu(t)$, $z_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, 3)$, die diesen Differentialgleichungen genügen, haben physikalisch gesehen nur reelle Argumente t einen Sinn. Vom mathematischen Standpunkt aus ist es jedoch durchaus interessant, die Untersuchungen auf den komplexen Bereich der unabhängigen Veränderlichen t und damit auch der Funktionen $x_\nu(t)$, $y_\nu(t)$, $z_\nu(t)$ auszudehnen, d. h. die Lösungen ins Komplexe „fortzusetzen". In seinem Buch über das Dreikörperproblem behauptet R. Vernić,[1] die Funktionen $x_\nu(t)$, $y_\nu(t)$, $z_\nu(t)$ der komplexen Veränderlichen t seien algebromorphe Funktionen. Dabei nennt R. Vernić eine mehrdeutige Funktion der komplexen Veränderlichen z algebromorph, wenn sie im Endlichen höchstens endlich viele algebraische Singularitäten und sonst keine singulären Stellen hat. Der Punkt ∞ kann also Häufungspunkt solcher singulärer Punkte sein. Endlich vieldeutige Funktionen dieser Art wurden schon von G. Remoundos[2] untersucht und von ihm algebroid genannt. Diejenigen algebroiden Funktionen, die im Unendlichen höchstens eine algebraische Singularität besitzen, also in der ganzen z-Ebene mit Einschluß des Punktes ∞ höchstens endlich viele algebraische Singularitäten besitzen, sind die algebraischen Funktionen.

---

[1] R. Vernić, Diskussion der Sundmannschen Lösung des Dreikörperproblems, Zagreb 1954.

[2] G. Remoundos, C. R. Acad. Scie. Paris Bd. 136 (1903), S. 953–955; Bull. Soc. Math. France Bd. 32 (1904) S. 44–50.

Die Behauptung von R. Vernić, die durch die Differentialgleichungen des Dreikörperproblems in der komplexen t-Ebene definierten Funktionen seien algebromorph, steht bereits im Widerspruch zu dem Ergebnis von C. L. Siegel,[3] wonach in einer Umgebung des Zeitpunktes, in dem die drei Körper gleichzeitig zusammenstoßen, Reihenentwicklungen nach Potenzen der Zeit auftreten, unter denen solche mit irrationalen Exponenten vorkommen, die Stelle somit im allgemeinen wesentlich singulär ist. Im reellen Gebiet der Zeit und der Ortskoordinaten sind die Singularitäten der Differentialgleichungen und der Lösungen des Dreikörperproblems bereits untersucht worden. Sundman[4] behandelte den „Zweierstoß". In diesem Falle stoßen zwei der drei Körper etwa zur Zeit $t = 0$ zusammen, d. h. ihre Entfernung (z. B. r_{12}) strebt gegen Null. Es wird gezeigt, daß in der Umgebung dieses Zeitpunktes die Koordinaten entwickelbar sind nach Potenzen von $t^{1/3}$.

Der „Dreierstoß", d. h. der Fall, bei dem zu einem bestimmten Zeitpunkt, etwa für $t = 0$, die drei Körper zusammenstoßen, wurde, wie bereits erwähnt, von C. L. Siegel behandelt. Die Entwicklungen der Koordinaten enthalten Potenzen von $t^{1/3}$, t^{μ} und t^{ν}, wobei μ und ν im allgemeinen irrationale Zahlen sind.

Wenn man als Stoß zwischen zwei bzw. drei Körpern das Verschwinden ihres bzw. ihrer gegenseitigen Abstände definiert, können im komplexen Bereich zwei Körper zusammenstoßen, ohne daß ihre Koordinaten zusammenfallen. Im reellen Bereich folgt aus $r_{12} = 0$, daß $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ ist. Im Komplexen gilt dies aber nicht. Daher sind die Methoden von Sundman zur Untersuchung eines „Stoßes" in das Komplexe nicht übertragbar. Denn Sundman verwendet bei seinen Untersuchungen wesentlich die Tatsache, daß aus $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ notwendig $a = b = c = 0$ folgt.

§ 2. Untersuchungen über Stöße erster und zweiter Art

Wir wollen im folgenden einen Stoß, bei dem die betreffenden Massenpunkte zusammenfallen, also gleiche Koordinaten haben,

---

[3] C. L. Siegel, Der Dreierstoß, Ann. of Mathem. Ser. 2, Bd. 42 (1941), S. 127–168.

[4] K. F. Sundman, Acta Mathematica, Bd. 36 (1913), S. 104–179.

einen „Stoß erster Art", dagegen einen solchen, wobei die Entfernung der beiden Massenpunkte Null wird, ohne daß gleichzeitig alle entsprechenden Koordinaten der Punkte einander gleich sind, einen „Stoß zweiter Art" nennen. Die Stöße letzterer Art sind, wie schon erwähnt, in Punkten mit reellen Koordinaten unmöglich.

Für die Zeit t_0 des Stoßes kann man immer $t = 0$ annehmen, indem man $t - t_0$ statt t als unabhängige Veränderliche wählt, wodurch sich die Differentialgleichungen des Problems nicht ändern. Eine ziemlich weitgehende Untersuchung beider Arten von Stößen stammt von T. Uno.[5] Er betrachtet zuerst den einfachen „Zweierstoß", d. h. er nimmt an, der Abstand r_{12} der beiden Massenpunkte m_1 und m_2 soll für $t = 0$ verschwinden, während r_{13} und r_{23} von Null verschieden sein sollen. Zur Zeit $t = 0$ befinden sich somit die beiden Massen m_1 und m_2 auf einer isotropen Geraden (Minimalgeraden). Im Sonderfall können die Koordinaten von m_1 und m_2 zusammenfallen. Dies ist dann der „reelle" Zweierstoß als Spezialfall des „komplexen" Zweierstoßes. Für diese Untersuchungen führt Uno ähnlich wie Sundman die schon von C. G. J. Jacobi benützten Koordinaten ein, nämlich die Koordinaten x, y, z der Masse m_2 bezüglich der Masse m_1 und die Koordinaten ξ, η, ζ von m_3 in bezug auf den Schwerpunkt der Massen m_1 und m_2.

$\mathfrak{r}$ sei der Vektor (x, y, z). Dann hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Zur Stoßzeit $t = 0$ ist das vektorielle Produkt $\left[\mathfrak{r}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]$ ungleich Null oder gleich Null. Der erste Fall ist im Reellen unmöglich; für die Jacobischen Koordinaten existieren in einer Umgebung von $t = 0$ Reihenentwicklungen nach Potenzen von $t^{1/2}$. Der zweite Fall ist auch im Reellen möglich; hier gibt es Reihenentwicklungen nach Potenzen von $t^{1/3}$ entsprechend dem Ergebnis von Sundman. Daß die oben genannte Bedingung $\lim\limits_{t \to 0}\left[\mathfrak{r}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = 0$ bei Sundman erfüllt ist, soll im nächsten Kapitel explizit gezeigt werden, weil Sundman darauf nicht eingeht.

T. Uno untersucht noch den Fall, daß zwei Abstände, etwa r_{12} und r_{13} für $t = 0$ verschwinden, während der dritte Abstand r_{23}

[5] T. Uno, Annali die Matematica, Bd. 14 (1936), S. 111–137.

zu diesem Zeitpunkt von Null verschieden ist. Ein solcher Stoß ist von der zweiten Art, also nur im Komplexen möglich. Die Geraden $\overline{m_1 m_2}$ und $\overline{m_1 m_3}$ haben die Richtungsfaktoren $+i$ und $-i$. Uno setzt voraus, daß r_{12} und r_{13} wie t^{λ} verschwinden, d. h. in einer Umgebung von $t = 0$ von der Gestalt $t^{\lambda}[c + f(t)]$ mit $f(0) = 0$ sind und zeigt dann, daß in diesem Fall für die Koordinaten der Massenpunkte Reihenentwicklungen nach Potenzen von $t^{1/5}$ existieren. Ob im allgemeinen bei dieser Stoßart noch andere Lösungen vorhanden sind, wird von ihm nicht untersucht. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung des komplexen „Dreierstoßes" zweiter Art. Es sollen also für $t = 0$ alle drei Abstände r_{12}, r_{13}, r_{23} verschwinden, ohne daß die Koordinaten der drei Massenpunkte m_1, m_2, m_3 zusammenfallen. Dies ist nur möglich, wenn sich zur Zeit $t = 0$ die drei Massen auf einer isotropen Geraden befinden, denn die Gerade $\overline{m_2 m_3}$ müßte bei einer Dreieckskonfiguration gleichzeitig die Richtungsfaktoren $+i$ und $-i$ haben. D. Belorizky[6] hat für diesen Fall als Lösungen Reihen nach $t^{1/2}$ und $t^{1/2} \log t$ behauptet, aber weder die formale Entwicklung dieser Reihen gezeigt, noch ihre Konvergenz bewiesen. Diese Lücke soll durch die vorliegende Arbeit geschlossen werden. Als Ergebnis erhält man tatsächlich solche Reihenentwicklungen. Unter gewissen Bedingungen ergeben sich reguläre Funktionen in $t^{1/2}$ für die Koordinaten der drei Massen m_1, m_2, m_3.

§ 3. Berechnung der Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}\left[\mathfrak{r}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]$ zur Zeit $t = 0$ für die Ergebnisse von K. F. Sundman

Wie bereits erwähnt, benützt K. F. Sundman die Jacobischen Koordinaten (vgl. § 2). Er führt dabei folgende Bezeichnungen ein: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{x}{r} = \varphi$; $\lim\limits_{t\to 0} \frac{y}{r} = \chi$; $\lim\limits_{t\to 0} \frac{z}{r} = \psi$; dabei ist $r = |\mathfrak{r}|$ und $\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = 1$. Dann erhält er folgende Reihenentwicklungen: $x = \frac{m_1 + m_2}{2} \varphi \cdot u^2 + \ldots$; $y = \frac{m_1 + m_2}{2} \chi u^2 + \ldots$; $z = \frac{m_1 + m_2}{2} \psi \cdot u^2 + \ldots$ Die Zeit t ist durch den Parameter u in Form einer Potenzreihe aus-

[6] D. Belorizky, Comptes Rend. Paris, Bd. 208 (1939, S. 558–560, 966–969.

gedrückt: $t = \frac{m_1 + m_2}{6} u^3 + \ldots$, somit $u = \sqrt[3]{\frac{6}{m_1 + m_2}} (t^{1/3} + \ldots)$, also $x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} (m_1 + m_2)} \varphi t^{2/3} + [t]$; $y = \sqrt[3]{\frac{9}{2} (m_1 + m_2)} \chi t^{2/3} + [t]$; $z = \sqrt[3]{\frac{9}{2} (m_1 + m_2)} \psi t^{2/3} + [t]$. Der Ausdruck $[t]$ bedeutet, daß die nicht angeschriebenen Reihenglieder mindestens t als Faktor enthalten.

Durch Differenzieren nach t erhält man die zur Berechnung der Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2}\left[\mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]$ notwendigen Ableitungen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$:

$$\dot{x} = \sqrt[3]{\frac{4}{3} (m_1 + m_2)} \varphi t^{-1/3} + a_0 + \frac{4}{3} a_1 t^{1/3} + \ldots$$

$$\dot{y} = \sqrt[3]{\frac{4}{3} (m_1 + m_2)} \chi t^{-1/3} + b_0 + \frac{4}{3} b_1 t^{1/3} + \ldots$$

$$\dot{z} = \sqrt[3]{\frac{4}{3} (m_1 + m_2)} \psi t^{-1/3} + c_0 + \frac{4}{3} c_1 t^{1/3} + \ldots$$

daher $x\dot{y} - \dot{x}y = \sqrt[3]{\frac{9}{2} (m_1 + m_2)} (\varphi b_0 - \chi a_0) t^{2/3} + \ldots$ und zwei analoge Ausdrücke für die beiden anderen Komponenten. Somit $\lim\limits_{t \to 0} [\mathfrak{r} \dot{\mathfrak{r}}] = 0$.

Damit ist gezeigt, daß die für das Zustandekommen eines reellen Zweierstoßes nach T. Uno notwendige Voraussetzung bei K. F. Sundman erfüllt ist.

§ 4. Untersuchung der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems auf Lösungen mit algebraischen Singularitäten

Wir wollen voraussetzen, es gäbe für die drei Fälle von § 2 in einer Umgebung von $t = 0$ Lösungen des Problems, die nach Potenzen von $T = t^{\mu}$ fortschreiten und für welche die Entwicklung der betreffenden gegenseitigen Entfernungen, die für $t = 0$ verschwinden, mit der ersten Potenz von T beginnen, und untersuchen, welche Werte von μ unter diesen Voraussetzungen in Frage kommen. Wir führen zu diesem Zweck relative Koordinaten in bezug auf den Massenpunkt m_1 ein. Dadurch reduziert sich das System von neun Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf ein System von sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Auf diese Weise erhalten wir folgendes System von Differentialgleichungen für die Bewegung der beiden Massenpunkte m_2 und m_3 bezüglich des Massenpunktes m_1, wenn x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 die rechtwinkeligen Koordinaten der Massenpunkte m_2 bzw. m_3 bezüglich des „Ursprungs“ m_1 sind:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2&=\frac{-m_1x_2}{r_{12}^3}+\frac{m_3(x_3-x_2)}{r_{23}^3};\quad \ddot{y}_2=\frac{-m_1y_2}{r_{12}^3}+\frac{m_3(y_3-y_2)}{r_{23}^3};\quad \ddot{z}_2=\frac{-m_1z_2}{r_{12}^3}+\frac{m_3(z_3-z_2)}{r_{23}^3};\\ \ddot{x}_3&=\frac{-m_1x_3}{r_{13}^3}+\frac{m_2(x_2-x_3)}{r_{23}^3};\quad \ddot{y}_3=\frac{-m_1y_3}{r_{13}^3}+\frac{m_2(y_2-y_3)}{r_{23}^3};\quad \ddot{z}_3=\frac{-m_1z_3}{r_{13}^3}+\frac{m_2(z_2-z_3)}{r_{23}^3}.\end{aligned}\tag{1}$$

Für die gegenseitigen Entfernungen r_{12}, r_{13}, r_{23} erhält man jetzt:

$$\begin{aligned}r_{12}&=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2};\quad r_{13}=\sqrt{x_3^2+y_3^2+z_3^2};\\ r_{23}&=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2}.\end{aligned}\tag{2}$$

Die Anfangsbedingungen für die Lösungen des Systems (1) seien:

$$\lim_{t\to 0} x_2=A;\ \lim_{t\to 0} y_2=B;\ \lim_{t\to 0} z_2=C;\ \lim_{t\to 0} x_3=A';\ \lim_{t\to 0} y_3=B';\ \lim_{t\to 0} z_3=C'.$$

Die Substitution $T=t^\mu$ liefert:

$$\frac{d(\ )}{dt}=\mu\frac{d(\ )}{dT}\,T^{1-\frac{1}{\mu}},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2(\ )}{dt^2}&=\mu^2\left\{T^{1-\frac{1}{\mu}}\frac{d^2(\ )}{dT^2}+\left(1-\frac{1}{\mu}\right)T^{-\frac{1}{\mu}}\frac{d(\ )}{dT}\right\}T^{1-\frac{1}{\mu}}=\\ &=\mu^2\left\{T^{2-\frac{2}{\mu}}\frac{d^2(\ )}{dT^2}+\left(1-\frac{1}{\mu}\right)T^{1-\frac{2}{\mu}}\frac{d(\ )}{dT}\right\}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen gehen die Differentialgleichungen nach Multiplikation mit $T^{2/\mu}$ über in:

$$\begin{aligned}\mu^2\left\{T^2\frac{d^2x_2}{dT^2}+\left(1-\frac{1}{\mu}\right)T\frac{dx_2}{dT}\right\}&=T^{2/\mu}\left\{\frac{-m_1x_2}{r_{12}^3}+\frac{m_3(x_3-x_2)}{r_{23}^3}\right\};\\ \mu^2\left\{T^2\frac{d^2y_2}{dT^2}+\left(1-\frac{1}{\mu}\right)T\frac{dy_2}{dT}\right\}&=T^{2/\mu}\left\{\frac{-m_1y_2}{r_{12}^3}+\frac{m_3(y_3-y_2)}{r_{23}^3}\right\};\end{aligned}$$

$$\mu^2\left\{T^2\frac{d^2 z_2}{dT^2}+\left(1-\frac{1}{\mu}\right)T\frac{dz_2}{dT}\right\}=T^{2/\mu}\left\{\frac{-m_1 z_2}{r_{12}^3}+\frac{m_3(z_3-z_2)}{r_{23}^3}\right\};$$

$$\mu^2\left\{T^2\frac{d^2 x_3}{dT^2}+\left(1-\frac{1}{\mu}\right)T\frac{dx_3}{dT}\right\}=T^{2/\mu}\left\{\frac{-m_1 x_3}{r_{13}^3}+\frac{m_2(x_2-x_3)}{r_{23}^3}\right\};$$

$$\mu^2\left\{T^2\frac{d^2 y_3}{dT^2}+\left(1-\frac{1}{\mu}\right)T\frac{dy_3}{dT}\right\}=T^{2/\mu}\left\{\frac{-m_1 y_3}{r_{13}^3}+\frac{m_2(y_2-y_3)}{r_{23}^3}\right\};$$

$$\mu^2\left\{T^2\frac{d^2 z_3}{dT^2}+\left(1-\frac{1}{\mu}\right)T\frac{dz_3}{dT}\right\}=T^{2/\mu}\left\{\frac{-m_1 z_3}{r_{13}^3}+\frac{m_2(z_2-z_3)}{r_{23}^3}\right\}.$$

Mit Hilfe der Substitution $T\frac{dx}{dT}=p$; $T^2\frac{d^2x}{dT^2}+T\frac{dx}{dT}=T\frac{dp}{dT}$ geht dieses System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung über in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Für die x-Koordinaten der beiden Massenpunkte m_2 und m_3 lauten diese:

$$T\frac{dx_2}{dT}=p_2;\quad T\frac{dp_2}{dT}=\frac{1}{\mu}p_2+\frac{1}{\mu^2}T^{2/\mu}\left\{\frac{-m_1 x_2}{r_{12}^3}+\frac{m_3(x_3-x_2)}{r_{23}^3}\right\};$$

$$T\frac{dx_3}{dT}=p_3;\quad T\frac{dp_3}{dT}=\frac{1}{\mu}p_3+\frac{1}{\mu^2}T^{2/\mu}\left\{\frac{-m_1 x_3}{r_{13}^3}+\frac{m_3(x_2-x_3)}{r_{23}^3}\right\}.$$

In den drei genannten Fällen hat man:

1) $r_{12}=0$, $r_{13}\neq 0$, $r_{23}\neq 0$ für $t=0$. Dann muß $A^2+B^2+C^2=0$, wobei für den Stoß zweiter Art A, B, C nicht gleichzeitig Null sind. Für den Abstand r_{12} gilt der Ansatz: $r_{12}=\varrho_{12}T[1+f(T)]$, wobei $f(T)$ in einer Umgebung von $T=0$ in T regulär mit $f(0)=0$ ist. Entsprechend ist dann $r_{13}=R_{13}[1+g(T)]$, $r_{23}=R_{23}[1+h(T)]$. Dabei sind ϱ_{12}, R_{13}, R_{23} von Null verschiedene Konstante. $g(T)$ und $h(T)$ sind in einer Umgebung von $T=0$ regulär mit $g(0)=0$, $h(0)=0$.

2) $r_{12}=0$, $r_{13}=0$, $r_{23}\neq 0$ für $t=0$. Dann muß $A^2+B^2+C^2=A'^2+B'^2+C'^2=0$, wobei für den Stoß zweiter Art A, B, C nicht gleichzeitig Null und ebenso A', B', C' nicht gleichzeitig Null sind. Für die Abstände r_{12} und r_{13} gelten die Ansätze: $r_{12}=\varrho_{12}T[1+f(T)]$, $r_{13}=\varrho_{13}T[1+g(T)]$, wobei $f(T)$ und $g(T)$ in einer Umgebung von $T=0$ in T regulär mit $f(0)=g(0)=0$ sind. Entsprechend ist dann: $r_{23}=R_{23}[1+h(T)]$, wobei $h(T)$ in einer Umgebung von $T=0$ regulär mit $h(0)=0$ ist. ϱ_{12}, ϱ_{13}, R_{23} sind von Null verschiedene Konstante.

3) $r_{12} = r_{13} = r_{23} = 0$ für $t = 0$. Dann muß $A^2 + B^2 + C^2 = A'^2 + B'^2 + C'^2 = 0$, $(A - A')^2 + (B - B')^2 + (C - C')^2 = 0$, wobei für den Stoß zweiter Art A, B, C nicht gleichzeitig Null und auch A', B', C' nicht gleichzeitig Null sind. Weiterhin darf für diese Stoßart nicht $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ gleichzeitig sein. Für die gegenseitigen Entfernungen r_{12}, r_{13}, r_{23} gelten die Ansätze: $r_{12} = \varrho_{12} T[1 + f(T)]$, $r_{13} = \varrho_{13} T[1 + g(T)]$, $r_{23} = \varrho_{23} T[1 + h(T)]$, wobei $f(T)$, $g(T)$, $h(T)$ in einer Umgebung von $T = 0$ regulär in T mit $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ sind. ϱ_{12}, ϱ_{13}, ϱ_{23} sind dabei von Null verschiedene Konstante.

Nun soll einer der drei Fälle 1), 2), 3) eintreten. Dann sind alle rechten Seiten der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems nur dann reguläre Funktionen in T, wenn in $T^{2/\mu - 3}$ der Exponent $\frac{2}{\mu} - 3$ eine positive ganze Zahl oder Null ist, d. h. die Bedingung $\frac{2}{\mu} - 3 = m$ erfüllt ist, wobei m eine ganze positive Zahl oder Null ist. Dies bedeutet $\mu \leqq \frac{2}{3}$. Diese Bedingung ist notwendig für die Existenz in T regulärer Lösungen.

§ 5. Bestimmung der Exponenten μ aus dem Energiesatz

Um Näheres für die in Betracht kommenden Werte μ zu erfahren, gehen wir nach Uno mit dem Ansatz $r = ct^{\mu}[1 + f(t^{\mu})]$ in die allgemeine Differentialgleichung des Dreikörperproblems und betrachten den Energiesatz. Bei allen folgenden Untersuchungen bedeutet ε eine in einer Umgebung von $t = 0$ reguläre Funktion in t^{μ} mit $\varepsilon(0) = 0$. Uno erhielt für die beiden ersten Fälle $\mu = \frac{1}{2}$ und $\mu = \frac{2}{5}$. Wir behandeln daher gleich den dritten Fall. Es ist:

$$\lim_{t \to 0} r_{12} = \lim_{t \to 0} r_{13} = \lim_{t \to 0} r_{23} = 0.$$

Die Anfangsbedingungen seien:

$$\lim_{t \to 0} x_1 = A_1; \ \lim_{t \to 0} y_1 = B_1; \ \lim_{t \to 0} z_1 = C_1;$$
$$\lim_{t \to 0} x_2 = A_2; \ \lim_{t \to 0} y_2 = B_2; \ \lim_{t \to 0} z_2 = C_2;$$
$$\lim_{t \to 0} x_3 = A_3; \ \lim_{t \to 0} y_3 = B_3; \ \lim_{t \to 0} z_3 = C_3.$$

Die neun Konstanten A_ν, B_ν, C_ν ($\nu = 1, 2, 3$) müssen folgenden Bedingungen genügen:

$$(A_2 - A_1)^2 + (B_2 - B_1)^2 + (C_2 - C_1)^2 = 0;$$
$$(A_3 - A_1)^2 + (B_3 - B_1)^2 + (C_3 - C_1)^2 = 0;$$
$$(A_3 - A_2)^2 + (B_3 - B_2)^2 + (C_3 - C_2)^2 = 0.$$

Ferner ist

$$A_3 - A_1 = k(A_2 - A_1); \quad B_3 - B_1 = k(B_2 - B_1);$$
$$C_3 - C_1 = k(C_2 - C_1),$$

weil die Massenpunkte auf einer Geraden liegen.

Für die drei zur Zeit $t = 0$ verschwindenden Abstände r_{12}, r_{13}, r_{23} macht man die Ansätze:

$$r_{12} = \varrho_{12}[1 + f(t^\mu)]\, t^\mu; \; r_{13} = \varrho_{13}[1 + g(t^\mu)]\, t^\mu; \; r_{23} = \varrho_{23}[1 + h(t^\mu)]\, t^\mu$$

mit $f(0) = g(0) = h(0) = 0$.

Für die x-Koordinaten der drei Massenpunkte erhält man damit folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\frac{d_2 x_1}{dt^2} = \frac{m_2(A_2 - A_1 + \varepsilon_{12})}{\varrho_{12}^3\, t^{3\mu}} + \frac{m_3(A_3 - A_1 + \varepsilon_{13})}{\varrho_{13}^3\, t^{3\mu}};$$

$$\frac{d_2 x_2}{dt^2} = \frac{m_1(A_1 - A_2 - \varepsilon_{12})}{\varrho_{12}^3\, t^{3\mu}} + \frac{m_3(A_3 - A_2 + \varepsilon_{23})}{\varrho_{23}^3\, t^{3\mu}};$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} = \frac{m_1(A_1 - A_3 - \varepsilon_{13})}{\varrho_{13}^3\, t^{3\mu}} + \frac{m_2(A_2 - A_3 - \varepsilon_{23})}{\varrho_{23}^3\, t^{3\mu}}; \quad \varepsilon_{12}(0) = \varepsilon_{13}(0) = \varepsilon_{23}(0) = 0$$

Diese Differentialgleichungen werden je einmal integriert. Damit erhält man für die Geschwindigkeiten der drei Massenpunkte:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{1 - 3\mu}\left[\frac{m_2(A_2 - A_1)}{\varrho_{12}^3} + \frac{m_3(A_3 - A_1)}{\varrho_{13}^3} + \bar{\varepsilon}_1\right] t^{-3\mu+1} + K_1;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{1 - 3\mu}\left[\frac{m_1(A_1 - A_2)}{\varrho_{12}^3} + \frac{m_3(A_3 - A_2)}{\varrho_{23}^3} + \bar{\varepsilon}_2\right] t^{-3\mu+1} + K_2;$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{1 - 3\mu}\left[\frac{m_1(A_1 - A_3)}{\varrho_{13}^3} + \frac{m_2(A_2 - A_3)}{\varrho_{23}^3} + \bar{\varepsilon}_3\right] t^{-3\mu+1} + K_3.$$

Dabei sind K_1, K_2, K_3 Integrationskonstanten.

Der Energiesatz der Mechanik

$$m_1\left\{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right\}+m_2\left\{\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2\right\}+$$
$$+m_3\left\{\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_3}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_3}{dt}\right)^2\right\}=\frac{2\,m_1m_2}{r_{12}}+\frac{2\,m_1m_3}{r_{13}}+\frac{2\,m_2m_3}{r_{23}}+2h$$

liefert den Exponenten μ. Für die Quadratsummen der Geschwindigkeiten erhält man:

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2=\frac{1}{(1-3\mu)^2}\left[\bar{K}_1+\bar{\bar{\varepsilon}}_1\right]t^{-3\mu+1},$$
$$\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2=\frac{1}{(1-3\mu)^2}\left[\bar{K}_2+\bar{\bar{\varepsilon}}_2\right]t^{-3\mu+1},$$
$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_3}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_3}{dt}\right)^2=\frac{1}{(1-3\mu)^2}\left[\bar{K}_3+\bar{\bar{\varepsilon}}_3\right]t^{-3\mu+1},$$

also für die Energiegleichung

$$\frac{1}{(1-3\mu)^2}\left(m_1\bar{K}_1+m_2\bar{K}_2+m_3\bar{K}_3+\bar{\bar{\varepsilon}}\right)t^{-3\mu+1}=$$
$$=\left(\frac{2\,m_1m_2}{\varrho_{12}}+\frac{2\,m_1m_3}{\varrho_{13}}+\frac{2\,m_2m_3}{\varrho_{23}}+\varepsilon'\right)t^{-\mu},$$

mit $\bar{\bar{\varepsilon}}(0)=\varepsilon'(0)=0$.

Nach Multiplikation dieser Gleichung mit $t^{3\mu-1}$ ergibt sich:

$$\frac{1}{(1-3\mu)^2}\left(m_1\bar{K}_1+m_2\bar{K}_2+m_3\bar{K}_3+\bar{\bar{\varepsilon}}\right)=$$
$$=\left(\frac{2\,m_1m_2}{\varrho_{12}}+\frac{2\,m_1m_3}{\varrho_{13}}+\frac{2\,m_2m_3}{\varrho_{23}}+\varepsilon'\right)^{2\mu-1}.$$

Notwendige Bedingung für die Existenz dieser Gleichung ist das Verschwinden des Exponenten auf der rechten Seite, d. h. $2\mu-1=0$, daher $\mu=\frac{1}{2}$.

Man erkennt, daß sich im Fall 3) derselbe Exponent μ ergibt, wie im Fall 1). Im Fall 1) liegen von den drei Massenpunkten m_1, m_2, m_3 zwei auf einer Minimalgeraden, während sich der dritte Massenpunkt außerhalb dieser befindet und zur Zeit $t=0$ nicht verschwindende Abstände von den beiden anderen aufweist. Je nach der Wahl der Anfangsbedingungen für den dritten Massenpunkt wird sich dieser mehr oder weniger entfernt von der durch die Lage der beiden anderen Massenpunkte bestimmten

Minimalgeraden befinden. Man kommt so zur Vermutung, daß sich aus Stetigkeitsgründen in dem Spezialfall, bei dem der dritte Massenpunkt sich als Grenzlage auf der Minimalgeraden befindet, im wesentlichen die gleichen Verhältnisse ergeben werden wie im allgemeinen Fall. Diese Vermutung wurde durch die Rechnung als richtig erwiesen.

Im Fall 2) erhielt Uno den Exponenten $\mu = \frac{2}{5}$, der also von den beiden anderen Fällen verschieden ist. Hier liegen auch die geometrischen Verhältnisse anders. Der Fall 1) kann auf den Fall 2) nicht spezialisiert werden durch stetige Veränderung der Lage des Massenpunktes m_3, wenn man vermeiden will, daß m_3 dabei die zweite durch m_1 gehende isotrope Gerade trifft. Man kommt daher schon aus geometrischen Überlegungen zur Vermutung, daß sich der Fall 2) von den beiden Fällen 1) und 3) wesentlich verschieden verhalten wird. Auch diese Annahme wird durch die Rechnung bestätigt.

Anmerkung: In § 5 wurde für die gegenseitigen Entfernungen, die für $t = 0$ verschwinden, der Ansatz $r = c t^{\mu}[1 + f(t^{\mu})]$ gemacht. Nach Sundman (§ 3) ergibt sich für den Abstand r_{12} die Reihenentwicklung:

$$r_{12} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}(m_1 + m_2)}\; t^{2/3} + d_0 t + d_1 t^{4/3} + \ldots\ldots$$

Daher wird jetzt der Ansatz versucht:

$$r = c t^{2\mu}[1 + f(t^{\mu})], \qquad x_{\nu} = A_{\nu} + \sum_{j=2}^{\infty} a_{\nu j}\, t^{j\mu}.$$

Mit diesem Ansatz gehen wir in das allgemeine Differentialgleichungssystem ein. Im Fall 1) erhält man für die erste Gleichung:

$$\sum_{j=2}^{\infty} j\mu(j\mu - 1)\, a_{1j}\, t^{j\mu-2} = \frac{(A_2 - A_1) + \sum\limits_{2}^{\infty}(a_{2j} - a_{1j})\, t^{j\mu}}{c^3 t^{6\mu}[1 + f(t^{\mu})]^3} + F(t^{\mu}).$$

$F(t^{\mu})$ ist in einer Umgebung von $t = 0$ eine reguläre Funktion von t^{μ}. Für den Stoß erster Art, d. h. $A_2 - A_1 = 0$ erhält man durch Vergleich der niedrigsten Potenz die Gleichung für μ:

$2\mu-2=-4\mu$ also $\mu=\frac{1}{3}$. Umgekehrt folgt für $\mu=\frac{1}{3}$ notwendig $A_1=A_2$ und analog $B_1=B_2$, $C_1=C_2$.

Für $\mu=\frac{1}{3}$ ist demnach nur ein Stoß erster Art möglich.

§ 6. Untersuchung des Dreierstoßes zweiter Art

Wie in § 2 erwähnt wurde, soll der Fall 3) ausführlich erörtert werden, nachdem die beiden anderen schon in der Arbeit von Uno behandelt wurden. Wir haben also gemäß § 5 zu untersuchen, ob tatsächlich konvergente Reihenentwicklungen nach Potenzen von $T=t^{1/3}$ für die Lösungen vorhanden sind.

Es seien alle drei Abstände $r_{12}=r_{13}=r_{23}=0$ für $t=0$. Dabei werde angenommen, daß es sich nicht um einen Dreierstoß erster Art zwischen den drei Massen m_1, m_2, m_3 handelt, sondern um einen solchen zweiter Art. Die entsprechenden Koordinaten der drei Massenpunkte sollen also nicht zusammenfallen.

Für die weiteren Untersuchungen wollen wir wieder relative Koordinaten einführen:

m_1 habe die Koordinaten (0; 0; 0),
m_2 habe die Koordinaten $(x_2; y_2; z_2)$,
m_3 habe die Koordinaten $(x_3; y_3; z_3)$.

Zur Zeit $t=0$ findet der Dreierstoß zweiter Art statt. Die Koordinaten sind dann: $m_1(0;0;0)$, $m_2(A; B; C)$, $m_3(A'; B'; C')$. Für die Konstanten A, B, C, A', B', C' gelten die Bedingungen:

$$\begin{gathered} A^2+B^2+C^2=0, \quad A'^2+B'^2+C'^2=0, \\ (A-A')^2+(B-B')^2+(C-C')^2=0, \end{gathered} \tag{1}$$

woraus $AA'+BB'+CC'=0$ folgt.

Die drei Massenpunkte liegen zur Zeit $t=0$ auf einer isotropen Geraden. Daher gilt für die Konstanten A, B, C, A', B', C':

$$A'=kA; \quad B'=kB; \quad C'=kC; \quad \text{wobei } k\neq 0, 1.$$

Nun führen wir folgende Koordinatentransformation aus:

$$\begin{aligned} x_2&=A+\bar{x}_2; & y_2&=B+\bar{y}_2; & z_2&=C+\bar{z}_2; \\ x_3&=A'+\bar{x}_3; & y_3&=B'+\bar{y}_3; & z_3&=C'+\bar{z}_3. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (1) des Dreikörperproblems aus § 4 gehen damit über in:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\bar{x}_2}{dt^2} &= \frac{-m_1(A+\bar{x}_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(A'-A+\bar{x}_3-\bar{x}_2)}{r_{23}^3}\\
\frac{d^2\bar{y}_2}{dt^2} &= \frac{-m_1(B+\bar{y}_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(B'-B+\bar{y}_3-\bar{y}_2)}{r_{23}^3}\\
\frac{d^2\bar{z}_2}{dt^2} &= \frac{-m_1(C+\bar{z}_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(C'-C+\bar{z}_3-\bar{z}_2)}{r_{23}^3}\\
\frac{d^2\bar{x}_3}{dt^2} &= \frac{-m_1(A'+\bar{x}_3)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(A-A'+\bar{x}_2-\bar{x}_3)}{r_{23}^3}\\
\frac{d^2\bar{y}_3}{dt^2} &= \frac{-m_1(B'+\bar{y}_3)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(B-B'+\bar{y}_2-\bar{y}_3)}{r_{23}^3}\\
\frac{d^2\bar{z}_3}{dt^2} &= \frac{-m_1(C'+\bar{z}_3)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(C-C'+\bar{z}_2-\bar{z}_3)}{r_{23}^3}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Die Abstände r_{12}, r_{13}, r_{23} nehmen, ausgedrückt durch $\bar{x}_2$, $\bar{y}_2$, $\bar{z}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{y}_3$, $\bar{z}_3$ folgende Form an:

$$
\begin{aligned}
r_{12} &= \sqrt{2(A\bar{x}_2+B\bar{y}_2+C\bar{z}_2)+\bar{x}_2^2+\bar{y}_2^2+\bar{z}_2^2}\,,\\
r_{13} &= \sqrt{2(A'\bar{x}_3+B'\bar{y}_3+C'\bar{z}_3)+\bar{x}_3^2+\bar{y}_3^2+\bar{z}_3^2}\,,\\
r_{23} &= \sqrt{2[(A'-A)(\bar{x}_3-\bar{x}_2)+(B'-B)(\bar{y}_3-\bar{y}_2)+(C'-C)(\bar{z}_3-\bar{z}_2)]+S(\bar{x}_3-\bar{x}_2)^2}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Hierbei ist $S(\bar{x}_3-\bar{x}_2)^2$ eine Abkürzung für $(\bar{x}_3-\bar{x}_2)^2 + (\bar{y}_3-\bar{y}_2)^2 + (\bar{z}_3-\bar{z}_2)^2$.

Wir suchen für das Differentialgleichungssystem (2) Lösungen mit folgenden Anfangsbedingungen:

$$\bar{x}_2(0) = \bar{y}_2(0) = \bar{z}_2(0) = \bar{x}_3(0) = \bar{y}_3(0) = \bar{z}_3(0) = 0 \tag{4}$$

Für die für kleine Werte von t „führenden" Glieder in den Reihenentwicklungen von $\bar{x}_2$, $\bar{y}_2$, $\bar{z}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{y}_3$, $\bar{z}_3$ machen wir gemäß § 5 den Ansatz:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_2 &= \varrho_2 t^{1/2} + \ldots & \bar{y}_2 &= \tau_2 t^{1/2} + \ldots & \bar{z}_2 &= \sigma_2 t^{1/2} + \ldots\\
\bar{x}_3 &= \varrho_3 t^{1/2} + \ldots & \bar{y}_3 &= \tau_3 t^{1/2} + \ldots & \bar{z}_3 &= \sigma_3 t^{1/2} + \ldots
\end{aligned}
$$

und substituieren $t^{1/2} = T$. Damit wird aus (2):

$$
\begin{aligned}
\frac{-\varrho_2}{4T^3} &= -\frac{m_1(A+\varrho_2 T)}{\sqrt{2(A\varrho_2 T+B\tau_2 T+C\sigma_2 T)+T^2(\varrho_2^2+\tau_2^2+\sigma_2^2)+\ldots}^{\,3}}\\
\frac{-\tau_2}{4T^3} &= -\frac{m_1(B+\tau_2 T)}{\sqrt{2T(A\varrho_2+B\tau_2+C\sigma_2)+T^2(\varrho_2^2+\tau_2^2+\sigma_2^2)+\ldots}^{\,3}}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Entsprechende Ausdrücke erhält man aus den anderen Gleichungen. Damit die Singularität aus den Gleichungen verschwinde, versuchen wir für $\varrho_2, \tau_2, \sigma_2, \varrho_3, \tau_3, \sigma_3$ Werte zu finden, die folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} &A\varrho_2 + B\tau_2 + C\sigma_2 = 0 \\ &A'\varrho_3 + B'\tau_3 + C'\sigma_3 = 0 \\ &A\varrho_3 + B\tau_3 + C\sigma_3 + (A'\varrho_2 + B'\tau_2 + C'\sigma_2) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Die dritte Bedingung ist durch die beiden ersten Bedingungen wegen (1) bereits erfüllt. Lassen sich für $\varrho_2, \tau_2, \sigma_2, \varrho_3, \tau_3, \sigma_3$ Werte finden, die der Forderung (6) genügen, dann ist dieser Ansatz gerechtfertigt. Damit werden die Gleichungen (5) „Bestimmungsgleichungen“ für $\varrho_2, \tau_2, \sigma_2, \varrho_3, \tau_3, \sigma_3$:

$$\frac{-\varrho_2}{4} = \frac{-m_1(A + \varrho_2 T)}{R_2^3} + \frac{m_3[(\varrho_3 - \varrho_2)T + (A' - A)]}{R_{23}^3} + \dots$$

$$\frac{-\tau_2}{4} = \frac{-m_1(B + \tau_2 T)}{R_2^3} + \frac{m_3[(\tau_3 - \tau_2)T + (B' - B)]}{R_{23}^3} + \dots$$

$$\frac{-\sigma_2}{4} = \frac{-m_1(C + \sigma_2 T)}{R_2^3} + \frac{m_3[(\sigma_3 - \sigma_2)T + (C' - C)]}{R_{23}^3} + \dots$$

$$\frac{-\varrho_3}{4} = \frac{-m_1(A' + \varrho_3 T)}{R_2^3} + \frac{m_2[(\varrho_2 - \varrho_3)T + (A - A')]}{R_{23}^3} + \dots$$

$$\frac{-\tau_3}{4} = \frac{-m_1(B' + \tau_3 T)}{R_2^3} + \frac{m_2[(\tau_2 - \tau_3)T + (B - B')]}{R_{23}^3} + \dots$$

$$\frac{-\sigma_3}{4} = \frac{-m_1(C' + \sigma_3 T)}{R_2^3} + \frac{m_2[(\sigma_2 - \sigma_3)T + (C - C')]}{R_{23}^3} + \dots$$

In diesen Gleichungen vergleichen wir die konstanten Glieder und erhalten:

$$\begin{aligned} &\frac{-\varrho_2}{4} = A\left\{\frac{-m_1}{R_2^3} + \frac{m_3(k-1)}{R_{23}^3}\right\}; \quad \frac{-\tau_2}{4} = B\left\{\frac{-m_1}{R_2^3} + \frac{m_3(k-1)}{R_{23}^3}\right\}; \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \frac{-\sigma_2}{4} = C\left\{\frac{-m_1}{R_2^3} + \frac{m_3(k-1)}{R_{23}^3}\right\}; \\ &\frac{-\varrho_3}{4} = A'\left\{\frac{-m_1}{R_3^3} + \frac{m_2(1-k)}{R_{23}^3}\right\}; \quad \frac{-\tau_3}{4} = B'\left\{\frac{-m_1}{R_3^3} + \frac{m_2(1-k)}{R_{23}^3}\right\}; \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \frac{-\sigma_3}{4} = C'\left\{\frac{-m_1}{R_3^3} + \frac{m_2(1-k)}{R_{23}^3}\right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Hierin sind: $R_2 = \sqrt{\varrho_2^2 + \tau_2^2 + \sigma_2^2}$; $\quad R_3 = \sqrt{\varrho_3^2 + \tau_3^2 + \sigma_3^2}$;

$$R_{23} = \sqrt{(\varrho_2 - \varrho_3)^2 + (\tau_2 - \tau_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}.$$

Aus den Gleichungen (7) folgt:

$$\frac{\varrho_2}{\tau_2} = \frac{A}{B}; \quad \frac{\varrho_2}{\sigma_2} = \frac{A}{C}; \quad \frac{\varrho_3}{\tau_3} = \frac{A'}{B'}; \quad \frac{\varrho_3}{\sigma_3} = \frac{A'}{C'}$$

oder:

$$\varrho_2 = A a_0;\ \tau_2 = B a_0;\ \sigma_2 = C a_0;\ \varrho_3 = A' a_0';\ \tau_3 = B' a_0';\ \sigma_3 = C' a_0'.$$

Die Faktoren a_0, a_0' können erst angegeben werden, wenn die nächsten Glieder der Koordinaten gegeben sind.

§ 7. Algebraische Lösungen für den Dreierstoß zweiter Art

Es soll nun untersucht werden, ob und unter welchen Bedingungen in T reguläre Lösungen der Differentialgleichungen (2) aus dem vorigen § mit den Anfangsbedingungen (4) möglich sind. Für die weiteren Untersuchungen wird an Stelle der Veränderlichen $\bar{z}$ eine neue Veränderliche $\bar{w}$ eingeführt. In § 6 (3) treten die Linearkombinationen $A\bar{x}_2 + B\bar{y}_2 + C\bar{z}_2$ und $A'\bar{x}_3 + B'\bar{y}_3 + C'\bar{z}_3$ auf. Diese Linearkombinationen werden als neue Veränderliche $\bar{w}_2$, $\bar{w}_3$ verwendet. Für $\bar{w}_2$ und $\bar{w}_3$ suchen wir Lösungen mit Nullstellen zweiter Ordnung bei $T = 0$ (s. u.)

$$\bar{w}_2 = A\bar{x}_2 + B\bar{y}_2 + C\bar{z}_2, \quad \bar{w}_3 = A'\bar{x}_3 + B'\bar{y}_3 + C'\bar{z}_3.$$

Mit § 6 (2) erhalten wir für $\bar{w}_2$ und $\bar{w}_3$ die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2\bar{w}_2}{dt^2} = \frac{-m_1\bar{w}_2}{r_{12}^3} + \frac{m_3\left(\frac{\bar{w}_3}{k} - \bar{w}_2\right)}{r_{23}^3}; \quad \frac{d^2\bar{w}_3}{dt^2} = \frac{-m_1\bar{w}_3}{r_{13}^3} + \frac{m_2(k\bar{w}_2 - \bar{w}_3)}{r_{23}^3}$$

Die Ausdrücke § 6 (3) müssen nun durch $\bar{x}_2$, $\bar{y}_2$, $\bar{w}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{y}_3$, $\bar{w}_3$ dargestellt werden:

$$r_{12}^2 = \frac{2\,\overline{w}_2 C^2 - (B\,\bar{x}_2 - A\,\overline{y}_2)^2 + \overline{w}_2^2 - 2\,\overline{w}_2 (A\,\bar{x}_2 + B\,\overline{y}_2)}{C};$$

$$r_{13}^2 = \frac{2\,\overline{w}_3 C'^2 - (B'\,\bar{x}_3 - A'\,\overline{y}_3)^2 + \overline{w}_3^2 - 2\,\overline{w}_3 (A'\,\bar{x}_3 + B'\,\overline{y}_3)}{C'^2};$$

$$r_{23}^2 = 2\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\overline{w}_3 - (k-1)\,\overline{w}_2\right] + (\bar{x}_3-\bar{x}_2)^2 + (\overline{y}_3-\overline{y}_2)^2 + \left(\frac{\overline{w}_3 - A'\,\bar{x}_3 - B'\,\overline{y}_3}{C'} - \frac{\overline{w}_2 - A\,\bar{x}_2 - B\,\overline{y}_2}{C}\right)^2$$

$$= 2\,(k-1)\left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right) + \frac{C^2(\bar{x}_3-\bar{x}_2)^2 + C^2(\overline{y}_3-\overline{y}_2)^2}{C^2} + \frac{\left[\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2 - A\,(\bar{x}_3-\bar{x}_2) - B\,(\overline{y}_3-\overline{y}_2)\right]^2}{C^2}$$

$$= 2\,(k-1)\left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right) + \frac{(\bar{x}_3-\bar{x}_2)^2\,(A^2+C^2) + (\overline{y}_3-\overline{y}_2)^2\,(B^2+C^2) + \left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right)^2 + 2\,A\,B\,(\bar{x}_3-\bar{x}_2)\,(\overline{y}_3-\overline{y}_2)}{C^2}$$

$$- \frac{2\left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right)[A(\bar{x}_3-\bar{x}_2) + B(\overline{y}_3-\overline{y}_2)]}{C^2}$$

$$= 2\,(k-1)\left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right) + \frac{-B^2(\bar{x}_3-\bar{x}_2)^2 + 2\,A\,B\,(\bar{x}_3-\bar{x}_2)\,(\overline{y}_3-\overline{y}_2) - A^2(\overline{y}_3-\overline{y}_2)^2 + \left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right)^2 - 2\left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right)[A\,(\bar{x}_3-\bar{x}_2) + B\,(\overline{y}_3-\overline{y}_2)]}{C^2}$$

$$= 2\,(k-1)\left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right) + \frac{\left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right)^2 - [B\,(\bar{x}_3-\bar{x}_2) - A\,(\overline{y}_3-\overline{y}_2)]^2 - 2\left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right)[A\,(\bar{x}_3-\bar{x}_2) + B\,(\overline{y}_3-\overline{y}_2)]}{C^2}$$

$$= \frac{2\,(k-1)\,C^2\left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right) - 2\left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right)[A\,(\bar{x}_3-\bar{x}_2) + B\,(\overline{y}_3-\overline{y}_2)] + \left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right)^2 - [B\,(\bar{x}_3-\bar{x}_2) - A\,(\overline{y}_3-\overline{y}_2)]^2}{C^2}$$

$$r_{23}^2 = \frac{2\left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right)[(k-1)\,C^2 - A\,(\bar{x}_3-\bar{x}_2) - B\,(\overline{y}_3-\overline{y}_2)] + \left(\frac{\overline{w}_3}{k} - \overline{w}_2\right)^2 - [B\,(\bar{x}_3-\bar{x}_2) - A\,(\overline{y}_3-\overline{y}_2)]^2}{C^2}.$$

Das zu lösende Differentialgleichungssystem lautet:

$$\frac{d^2\bar{x}_2}{dt^2} = \frac{-m_1(A+\bar{x}_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(A'-A+\bar{x}_3-\bar{x}_2)}{r_{23}^3}$$

$$\frac{d^2\bar{y}_2}{dt^2} = \frac{-m_1(B+\bar{y}_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(B'-B+\bar{y}_3-\bar{y}_2)}{r_{23}^3}$$

$$\frac{d^2\bar{w}_2}{dt^2} = \frac{-m_1\bar{w}_2}{r_{12}^3} + \frac{m_3\left(\frac{\bar{w}_3}{k}-\bar{w}_2\right)}{r_{23}^3}$$

$$\frac{d^2\bar{x}_3}{dt^2} = \frac{-m_1(A'+\bar{x}_3)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(A-A'+\bar{x}_2-\bar{x}_3)}{r_{23}^3}$$

$$\frac{d^2\bar{y}_3}{dt^2} = \frac{-m_1(B'+\bar{y}_3)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(B-B'+\bar{y}_2-\bar{y}_3)}{r_{23}^3}$$

$$\frac{d^2\bar{w}_3}{dt^2} = \frac{-m_1\bar{w}_3}{r_{13}^3} + \frac{m_2(k\bar{w}_2-\bar{w}_3)}{r_{23}^3}.$$

Um $\bar{x}_2$, $\bar{y}_2$, $\bar{w}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{y}_3$, $\bar{w}_3$ zu erhalten, machen wir folgenden Ansatz:

$$\bar{x}_2 = T(A a_0 + X_2),\quad \bar{y}_2 = T(B a_0 + Y_2),\quad \bar{w}_2 = \alpha_0 T^2 + T^3(\alpha_1 + W_2),$$

$$\bar{x}_3 = T(A' a_0' + X_3),\quad \bar{y}_3 = T(B' a_0' + Y_3),\quad \bar{w}_3 = \alpha_0' T^2 + T^3(\alpha_1' + W_3).$$

Die dabei auftretenden Funktionen X_2, Y_2, W_2, X_3, Y_3, W_3 sind so zu bestimmen, daß

$$X_2(0) = Y_2(0) = W_2(0) = X_3(0) = Y_3(0) = W_3(0) = 0 \tag{1}$$

ist. Der Ansatz

$$\bar{w}_2 = \alpha_0 T^2 + T^3(\alpha_1 + W_2),$$
$$\bar{w}_3 = \alpha_0' T^2 + T^3(\alpha_1' + W_3)$$

soll mit T^2 beginnen, damit r_{12}^2, r_{13}^2 und r_{23}^2 in $T = 0$ eine Nullstelle zweiter Ordnung haben.

Für die Ableitungen nach t erhält man dann:

$$\frac{d\bar{x}_2}{dt} = \frac{1}{2T}\left\{A a_0 + X_2 + T\frac{dX_2}{dT}\right\} = \frac{A a_0}{2T} + \frac{X_2}{2T}\frac{dX_2}{dT}$$

$$\frac{d^2\bar{x}_2}{dt^2} = \frac{1}{4T^3}\left\{T^2\frac{d^2X_2}{dT^2} + T\frac{dX_2}{dT} - X_2 - A a_0\right\}$$ und entsprechend

$$\frac{d^2\bar{y}_2}{dt^2} = \frac{1}{4T^3}\left\{T^2\frac{d^2Y_2}{dT^2} + T\frac{dY_2}{dT} - Y_2 - B a_0\right\}$$

$$\frac{d^2\bar{w}_2}{dt^2} = \frac{1}{4T}\left\{T^2\frac{d^2W_2}{dT^2} + 5T\frac{dW_2}{dT} + 3W_2 + 3\alpha_1\right\}$$

$$\frac{d^2\bar{x}_3}{dt^2} = \frac{1}{4T^3}\left\{T^2\frac{d^2X_3}{dT^2} + T\frac{dX_3}{dT} - X_3 - A'a_0'\right\}$$

$$\frac{d^2\bar{y}_3}{dt^2} = \frac{1}{4T^3}\left\{T^2\frac{d^2Y_3}{dT^2} + T\frac{dY_3}{dT} - Y_3 - B'a_0'\right\}$$

$$\frac{d^2\bar{w}_3}{dt^2} = \frac{1}{4T}\left\{T^2\frac{d^2W_3}{dT^2} + 5T\frac{dW_3}{dT} + 3W_3 + 3\alpha_1'\right\}.$$

Diese Ausdrücke werden in die Differentialgleichungen § 6 (2) eingesetzt. Dann entsteht ein System von Differentialgleichungen für die Funktionen $X_2(T)$, $Y_2(T)$, $W_2(T)$, $X_3(T)$, $Y_3(T)$, $W_3(T)$, die in einer Umgebung von $T = 0$ regulär in T sein sollen:

$$\frac{1}{4T^3}\left\{T^2\frac{d^2X_2}{dT^2} + T\frac{dX_2}{dT} - X_2 - Aa_0\right\} = \frac{-m_1(A + Aa_0T + TX_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(A' - A + A'a_0'T - Aa_0T + TX_3 - TX_2)}{r_{23}^3}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{4T}\left\{T^2\frac{d^2W_2}{dT^2} + 5T\frac{dW_2}{dT} + 3W_2 + 3\alpha_1\right\} = \frac{-m_1(\alpha_0T^2 + \alpha_1T^3 + T^3W_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3\left[\left(\frac{\alpha_0'}{k} - \alpha_0\right)T^2 + \left(\frac{\alpha_1'}{k} - \alpha_1\right)T^3 + \left(\frac{W_3}{k} - W_2\right)T^3\right]}{r_{23}^3}.$$

Ganz entsprechende Differentialgleichungen ergeben sich für Y_2, X_3, Y_3, W_3.

Ferner ergibt sich in den neuen Veränderlichen:

$$r_{12}^2 = T^2\left\{\frac{2(\alpha_0 + \alpha_1T + W_2T)(C^2 + C^2a_0T - ATX_2 - BTY_2)}{C^2} + \frac{T^2(\alpha_0 + \alpha_1T + TW_2)^2 - (BX_2 - AY_2)^2}{C^2}\right\}$$

$$r_{13}^2 = T^2\left\{\frac{2(\alpha_0' + \alpha_1'T + W_3T)(C'^2 + C'^2a_0'T - A'TX_3 - B'TY_3)}{C'^2} + \frac{T^2(\alpha_0' + \alpha_1'T + TW_3)^2 - (B'X_3 - A'Y_3)^2}{C'^2}\right\}$$

$$r_{23}^2 = \frac{T^2}{C^2}\Big\{2\Big[\Big(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0\Big)+\Big(\frac{\alpha_1'}{k}-\alpha_1\Big)T+\Big(\frac{W_3}{k}-W_2\Big)T\Big]\,[(k-1)\,C^2$$
$$+C^2(k a_0'-a_0)T-T(AX_3+BY_3)+T(AX_2+BY_2)]$$
$$+T^2\Big[\Big(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0\Big)+\Big[\Big(\frac{\alpha_1'}{k}-\alpha_1\Big)T+\Big(\frac{W_3}{k}-W_2\Big)T\Big]^2$$
$$-[B(X_3-X_2)-A(Y_3-Y_2)]^2\Big\}$$

Ordnet man diese Ausdrücke nach steigenden Potenzen in den Veränderlichen, so erhält man:

$$r_{12}^2 = T^2\,2[\alpha_0+T(a_0\alpha_0+\alpha_1)]+\dots.$$
$$r_{13}^2 = T^2\,2[\alpha_0'+T(a_0'\alpha_0'+\alpha_1')]+\dots.$$
$$r_{23}^2 = T^2\,2\Big\{\Big(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0\Big)\,(k-1)+T\Big[\Big(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0\Big)\,(k a_0'-a_0)$$
$$+\Big(\frac{\alpha_1'}{k}-\alpha_1\Big)\,(k-1)\Big]\Big\}+\dots.$$

Diese Ausdrücke setzen wir in das Differentialgleichungssystem (2) ein und erhalten:

$$\frac{1}{4}\Big\{T^2\frac{d^2X_2}{dT^2}+T\frac{dX_2}{dT}-X_2-A\,a_0\Big\}=\frac{-m_1(A+A\,a_0T+TX_2)}{\sqrt{2[\alpha_0+T(a_0\alpha_0+\alpha_1)+\dots.}^{\,3}}$$
$$+\frac{m_3(A'-A+A'a_0'T-A\,a_0T+TX_3-TX_2}{\sqrt{2\{(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0)\,(k-1)+T[(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0)\,(k a_0'-a_0)+(\frac{\alpha_1'}{k}-\alpha_1)\,(k-1)]\}+\dots.}^{\,3}}$$

$$\frac{1}{4}\Big\{T^2\frac{d^2W}{dT^2}+5T\frac{dW_2}{dT}+3\,W_2+3\alpha_1\Big\}=\frac{-m_1(\alpha_0+\alpha_1T+TW_2)}{\sqrt{2[\alpha_0+T(a_0\alpha_0+\alpha_1)]+\dots.}^{\,3}}$$
$$+\frac{m_3\,(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0)+(\frac{\alpha_1'}{k}-\alpha_1)T+T(\frac{W_3}{k}-W_2)}{\sqrt{2\{(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0)(k-1)+T[(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0)(k a_0'-a_0)+(\frac{\alpha_1'}{k}-\alpha_1)\,(k-1)]\}+\dots.}^{\,3}}$$

Entsprechende Differentialgleichungen erhält man für Y_2, X_3, Y_3, W_3. Die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen werden in Reihen entwickelt. Die Glieder zweiter und höherer Ordnung sollen dabei nicht mehr angeschrieben werden.

Dann geht das Differentialgleichungssystem über in:

$$T^2 \frac{d^2 X_2}{d T^2} + T \frac{d X_2}{d T} - X_2 - A a_0 = \frac{-4 m_1 A}{\sqrt{2\alpha_0}^3} (1 + a_0 T) \left[1 - \frac{3}{2} T \left(a_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right) + \ldots\ldots \right]$$

$$+ \frac{4 m_3 A}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k} - \alpha_0\right)(k-1)}^3} \left[(k - 1 + T(k a_0' - a_0) \right] \left[1 - \frac{3}{2} T \left(\frac{k a_0' - a_0}{k-1} + \frac{\alpha_1' - k\alpha_1}{\alpha_0' - k\alpha_0} \right) + \ldots\ldots \right]$$

$$= 4 A \left\{ \frac{-m_1}{\sqrt{2\alpha_0}^3} + \frac{m_3 (k-1)}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k} - \alpha_0\right)(k-1)}^3} + \frac{T}{2} \left\{ \frac{m_1}{\sqrt{2\alpha_0}^3} \left(a_0 + 3 \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right) \right. \right. \tag{3}$$

$$\left. \left. - \frac{m_3}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k} - \alpha_0\right)(k-1)}^3} \left[k a_0' - a_0 + \frac{3(\alpha_1' - k\alpha_1)}{\alpha_0' - k\alpha_0} (k-1) \right] \right\} \right\} .$$

$$T^2 \frac{d^2 W_2}{d T^2} + 5 T \frac{d W_2}{d T} + 3 W_2 + 3 \alpha_1 = \frac{-4 m_1}{\sqrt{2\alpha_0}^3} (\alpha_0 + \alpha_1 T) \left[1 - \frac{3}{2} T \left(a_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right) + \ldots\ldots \right]$$

$$+ \frac{4 m_3}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k} - \alpha_0\right)(k-1)}^3} \left[\left(\frac{\alpha_0'}{k} - \alpha_0 \right) + \left(\frac{\alpha_1'}{k} - \alpha_1 \right) T \right] \left[1 - \frac{3}{2} T \left(\frac{k a_0' - a_0}{k-1} + \frac{\alpha_1' - k\alpha_1}{\alpha_0' - k\alpha_0} \right) + \ldots\ldots \right]$$

$$= 4 \left\{ \frac{-m_1 \alpha_0}{\sqrt{2\alpha_0}^3} + \frac{m_3 \left(\frac{\alpha_0'}{k} - \alpha_0 \right)}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k} - \alpha_0\right)(k-1)}} + \frac{T}{2} \left\{ \frac{m_1}{\sqrt{2\alpha_0}^3} (\alpha_1 + 3 a_0 \alpha_0) \right. \right. \tag{4}$$

$$\left. \left. - \frac{m_3}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k} - \alpha_0\right)(k-1)}^3} \left[\frac{\alpha_1'}{k} - \alpha_1 + 3 \left(\frac{\alpha_0'}{k} - \alpha_0 \right) \frac{k a_0' - a_0}{k-1} \right] \right\} \right\}$$

Wenn die Differentialgleichungen in T reguläre Lösungen haben sollen, die den Anfangsbedingungen (1) genügen, d. h. Lösungen der Form

$$X_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{i\nu} T^\nu; \quad Y_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{i\nu} T^\nu; \quad W_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{i\nu} T^\nu; \quad (i = 2, 3), \tag{5}$$

müssen die konstanten Glieder auf beiden Seiten der Differentialgleichungen übereinstimmen. Das liefert die Beziehungen:

$$a_0 = \quad 4 \left\{ \frac{m_1}{\sqrt{2\alpha_0}^3} - \frac{m_3 (k-1)}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k} - \alpha_0\right)(k-1)}^3} \right\}, \tag{6}$$

$$a_0' = \quad 4 \left\{ \frac{m_1}{\sqrt{2\alpha_0'}^3} + \frac{m_2 (k-1)}{k \sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k} - \alpha_0\right)(k-1)}^3} \right\},$$

$$\alpha_1 = \frac{4}{3}\left\{\frac{-m_1\alpha_0}{\sqrt{2\alpha_0}^3} + \frac{m_3\left(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0\right)}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0\right)(k-1)}^3}\right\},$$
$$\alpha_1' = -\frac{4}{3}\left\{\frac{m_1\alpha_0'}{\sqrt{2\alpha_0'}^3} + \frac{m_2\left(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0\right)k}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0\right)(k-1)}^3}\right\}. \tag{6}$$

Wenn wir die Ansätze (5) in die Differentialgleichungen einsetzen, verschwinden auf den linken Seiten die in T linearen Glieder. Deshalb müssen, damit in T reguläre Lösungen X_2, Y_2, X_3, Y_3 vorhanden sind, notwendig die linearen Glieder auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen verschwinden. Diese Bedingung liefert folgende zwei Gleichungen:

$$0 = \frac{m_1}{\sqrt{2\alpha_0}^3}\left(a_0 + 3\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right) - \frac{m_3}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0\right)(k-1)}^3}\left\{k a_0' - a_0 + 3(k-1)\frac{\alpha_1'-k\alpha_1}{\alpha_0'-k\alpha_0}\right\},$$
$$0 = \frac{m_1}{\sqrt{2\alpha_0'}^3}\left(a_0' + 3\frac{\alpha_1'}{\alpha_0'}\right) + \frac{m_2}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0\right)(k-1)}^3}\left\{k a_0' - a_0 + 3(k-1)\frac{\alpha_1'-k\alpha_1}{\alpha_0'-k\alpha_0}\right\}. \tag{7}$$

Aus diesen beiden Gleichungen suchen wir eine einfachere Beziehung herzuleiten, welche notwendig zwischen den Konstanten α_0 und α_0' bestehen muß, damit in T reguläre Lösungen existieren.

Die beiden Gleichungen (7) sind bezüglich der Massen Identitäten. Wenn in T reguläre Lösungen des Differentialgleichungssystems bestehen sollen, muß eine Beziehung, die sich aus dem Verschwinden des Koeffizienten von m_1 aus der ersten Gleichung ergibt, auch die Koeffizienten der anderen Massen zum Verschwinden bringen.

Es ergibt sich aus der ersten Gleichung $a_0 = -3\,\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$. Diese Beziehung wird in die Gleichungen (6) eingesetzt. Dabei erhalten wir:

$$\frac{m_1}{\sqrt{2\alpha_0}^3} - \frac{m_3(k-1)}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0\right)(k-1)}^3} = \frac{m_1}{\sqrt{2\alpha_0}^3} - \frac{m_3\left(\frac{\alpha_0'}{\alpha_0 k}-1\right)}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_0'}{k}-\alpha_0\right)(k-1)}^3}.$$

Daraus folgt:

$$k-1 = \frac{\alpha_0'}{k\alpha_0} - 1,$$
$$\alpha_0' = k^2\alpha_0. \tag{8}$$

Damit berechnen wir die Ausdrücke (6). Wir erhalten dabei:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{4}{\sqrt{2\alpha_0}^3}\left[m_1 - \frac{m_3}{(k-1)^2}\right],\\
a_0' &= \frac{4}{k\sqrt{2\alpha_0}^3}\left[\frac{m_1}{k^2} + \frac{m_2}{(k-1)^2}\right],\\
\alpha_1 &= \frac{4\alpha_0}{3\sqrt{2\alpha_0}^3}\left[-m_1 + \frac{m_3}{(k-1)^2}\right],\\
\alpha_1' &= -\frac{4\alpha_0}{3\sqrt{2\alpha_0}^3}\left[\frac{m_1}{k} + \frac{m_2 k}{(k-1)^2}\right].
\end{aligned} \tag{9}$$

Die beiden Massen m_2 und m_3 der Gleichungen (7) haben den gleichen Koeffizienten. Mit (8) und (9) ergibt sich:

$$k a_0' - a_0 + 3(k-1)\frac{\alpha_1' - k\alpha_1}{\alpha_0' - k\alpha_0} = 0.$$

Wir berechnen nun den Koeffizienten von m_1 in der zweiten Gleichung von (7). Es folgt:

$$a_0' + 3\frac{\alpha_1'}{\alpha_0'} = 0$$

Mit (6) sind damit die beiden Gleichungen (7) identisch erfüllt. Gleichung (8) ist daher notwendige Bedingung für das Vorhandensein regulärer Lösungen in T.

Wenn wir für die Lösungen $X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3$ statt (5) zur Vereinfachung der Schreibweise den Ansatz machen:

$$X_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu T^\nu;\quad Y_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu T^\nu;\quad Z_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu T^\nu;$$

$$X_3 = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu' T^\nu;\quad Y_3 = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu' T^\nu;\quad Z_3 = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu' T^\nu,$$

folgt wegen
$$\begin{aligned}
\bar{w}_2 &= A\bar{x}_2 + B\bar{y}_2 + C\bar{z}_2 = T(AX_2 + BY_2 + CZ_2)\\
&= T^2(Aa_1 + Bb_1 + Cc_1) + \ldots\ldots\\
&= \alpha_0 T^2 + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

und
$$\bar{w}_3 = T^2(A'a_1' + B'b_1' + C'c_1') + \ldots = \alpha_0' T^2 + \ldots$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= Aa_1 + Bb_1 + Cc_1\\
\alpha_0' &= A'a_1' + B'b_1' + C'c_1'.
\end{aligned}$$

Die zunächst willkürlichen 6 Konstanten a_1, b_1, c_1, a_1', b_1', c_1' müssen also, damit in T reguläre Lösungen möglich sind, wegen (8) die Bedingungen erfüllen:

$$A' a_1' + B' b_1' + C' c_1' = k^2 (A a_1 + B b_1 + C c_1) \quad \text{oder}$$
$$A a_1' + B b_1' + C c_1' = A' a_1 + B' b_1 + C' c_1. \tag{10}$$

§ 8. Reihenentwicklungen samt Konvergenzbeweis

Es seien die für die Existenz in T regulärer Lösungen notwendigen Bedingungen aus dem vorigen § erfüllt. Die Differentialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
T^2 \frac{d^2 X_2}{d T^2} + T \frac{d X_2}{d T} - X_2 &= P_{2x}(X_2, Y_2, W_2, X_3, Y_3, W_3, T) \\
T^2 \frac{d^2 Y_2}{d T^2} + T \frac{d Y_2}{d T} - Y_2 &= P_{2y}(X_2, Y_2, W_2, X_3, Y_3, W_3, T) \qquad (1) \\
T^2 \frac{d^2 W_2}{d T^2} + 5T \frac{d W_2}{d T} + 3 W_2 &= \omega_2 T + P_{2w}(X_2, Y_2, W_2, X_3, Y_3, W_3, T)
\end{aligned}$$

und drei analoge Gleichungen mit dem Zeiger 3. Die in den Gleichungen (1) auftretenden Funktionen P_{2x}, P_{2y}, P_{2w}, P_{3x}, P_{3y}, P_{3w} stellen reguläre Funktionen dar, die mit den Veränderlichen verschwinden und keine Terme von niedrigerer als zweiter Ordnung enthalten.

Diese Gleichungen werden k-mal nach T differenziert und dann wird $T = 0$ gesetzt. Auf den linken Seiten entstehen dann die k-ten Ableitungen, multipliziert mit folgenden Faktoren:

1) $k(k-1) + k - 1$, 2) $k(k-1) + k - 1$, 3) $k(k-1) + 5k + 3$

und dieselben bei den übrigen Gleichungen.

Auf der rechten Seite stehen vor dem Differenzieren Potenzen in den Veränderlichen von mindestens zweiter Ordnung. (Die Koeffizienten ω_2 und ω_3 der in T linearen Glieder in den Differentialgleichungen für W_2 und W_3 können als bekannt angenommen werden, da sie sich aus α_0, d. h. a_1, a_1', b_1, b_1', c_1, c_1', k ausdrücken lassen.) Beim k-fachen Differenzieren und darauffolgenden Nullsetzen von T entstehen daher höchstens die $(k-1)$-ten Ableitungen. Daher lassen sich die k-ten Ableitungen durch die $(k-1)$-ten Ableitungen ausdrücken, wenn die Koeffizienten der k-ten Ableitungen von Null verschieden sind.

Die Koeffizienten sind Null, für

$$1), 2): \; k(k-1)+k-1=0, \quad \text{d. h. für } k=\pm 1.$$

Die ersten Ableitungen von X_2, Y_2, X_3, Y_3 lassen sich somit nicht ausrechnen; sie sind willkürlich. Das sind aber gerade die willkürlichen Koeffizienten a_1, a_1', b_1, b_1'.

$$3): \; k(k-1)+5k+3=0; \quad k=\begin{Bmatrix}-1\\-3\end{Bmatrix}, \quad \text{d. h. für kein positives } k.$$

Somit lassen sich alle k-ten Ableitungen durch die $(k-1)$-ten Ableitungen ausdrücken, und *die formale Entwicklung der Koordinaten der Massenpunkte nach Potenzen von T ist als möglich erwiesen.*

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, die Konvergenz dieser Reihen nachzuweisen.

Wir führen folgende Koordinationstransformation durch:

$$\begin{aligned} X_2 &= T\tilde{X}_2; \quad & Y_2 &= T\tilde{Y}_2; \quad & W_2 &= T\tilde{W}_2; \\ X_3 &= T\tilde{X}_3; \quad & Y_3 &= T\tilde{Y}_3; \quad & W_3 &= T\tilde{W}_3. \end{aligned}$$

Diese Ansätze werden in (1) eingesetzt. Dann entstehen für $\tilde{X}_2$, $\tilde{Y}_2$, $\tilde{W}_2$, $\tilde{X}_3$, $\tilde{Y}_3$, $\tilde{W}_3$ folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} T^2\frac{d^2\tilde{X}_2}{dT^2}+3T\frac{d\tilde{X}_2}{dT} &= T\tilde{P}_{2x} \\ T^2\frac{d^2\tilde{Y}_2}{dT^2}+3T\frac{d\tilde{Y}_2}{dT} &= T\tilde{P}_{2y} \\ T^2\frac{d^2\tilde{W}_2}{dT^2}+7T\frac{d\tilde{W}_2}{dT}+8\tilde{W}_2 &= \omega_2+T\tilde{P}_{2w} \end{aligned} \tag{2}$$

und drei analoge Gleichungen mit dem Zeiger 3.

$\tilde{P}_{2x}$, $\tilde{P}_{2y}$, $\tilde{P}_{2w}$, $\tilde{P}_{3x}$, $\tilde{P}_{3y}$, $\tilde{P}_{3w}$ stellen reguläre Funktionen dar. Die Koeffizienten der k-ten Ableitungen sind:

$$1)\ k^2+2k, \qquad 2)\ k^2+2k, \qquad 3)\ k^2+6k+8$$

und ebenso bei den drei übrigen Gleichungen.

Es sei M_{2x} der größte Absolutwert, den $\tilde{P}_{2x}$ annimmt, wenn

$$|T|<a, \qquad |\tilde{X}_2|<b_2,\ |\tilde{Y}_2|<c_2,\ |\tilde{W}_2|<d_2,$$
$$|\tilde{X}_3|<b_3,\ |\tilde{Y}_3|<c_3,\ |\tilde{W}_3|<d_3,$$

M_{3x} das Maximum von $|\tilde{P}_{3x}|$, M_{2y} von $|\tilde{P}_{2y}|$ usw.

M sei die größte der Zahlen M_{2x}, M_{2y}, M_{2w}, M_{3x}, M_{3y}, M_{3w}, b die kleinste der Zahlen b_2, b_3, c_2, c_3, d_2, d_3.

Es gilt

$$\tilde{P}_{2x}=\sum_{p,q,r,s,t,u,v}^{\infty}\left(\frac{\partial^{p+q+r+s+t+u+v}\tilde{P}_{2x}}{\partial T^p\,\partial\tilde{X}_2^q\,\partial\tilde{Y}_2^r\,\partial\tilde{W}_2^s\,\partial\tilde{X}_3^t\,\partial\tilde{Y}_3^u\,\partial\tilde{W}_3^v}\right)_0\frac{T^p\,\tilde{X}_2^q\,\tilde{Y}_2^r\,\tilde{W}_2^s\,\tilde{X}_3^t\,\tilde{Y}_3^u\,\tilde{W}_3^v}{p!\,q!\,r!\,s!\,t!\,u!\,v!}$$

Die Abschätzung von Cauchy für mehrere Veränderliche (Picard, Traité d'Analyse II, 3. Auflage S. 277) liefert die Ungleichung:

$$A_{pqrstuvw}=\frac{1}{p!\,q!\,r!\,s!\,t!\,u!\,v!}\left|\left(\frac{\partial^{p+q+r+s+t+u+v}\tilde{P}_{2x}}{\partial T^p\,\partial\tilde{X}_2^q\,\partial\tilde{Y}_2^r\,\partial\tilde{W}_2^s\,\partial\tilde{X}_3^t\,\partial\tilde{Y}_3^u\,\partial\tilde{W}_3^v}\right)_0\right|<\frac{M}{a^p\,b^{q+r+s+t+u+v}}$$

Nun sei

$$Q=\sum_{p,q,r,s,t,u,v}^{\infty}\frac{M}{a^p\,b^{q+r+s+t+u+v}}\,T^p\,\tilde{X}_2^q\,\tilde{Y}_2^r\,\tilde{W}_2^s\,\tilde{X}_3^t\,\tilde{Y}_3^u\,\tilde{W}_3^v\,;$$

somit ist

$$\left(\frac{\partial^{p+q+r+s+t+u+v}Q}{\partial T^p\,\partial X_2^q\,\partial Y_2^r\,\partial W_2^s\,\partial X_3^t\,\partial Y_3^u\,\partial W_3^v}\right)_0>\left|\frac{\partial^{p+q+r+s+t+u+v}P}{\partial T^p\,\partial\tilde{X}_2^q\,\partial\tilde{Y}_2^r\,\partial\tilde{W}_2^s\,\partial\tilde{X}_3^t\,\partial\tilde{Y}_3^u\,\partial\tilde{W}_3^v}\right|_0,$$

wobei P für P_{2x}, P_{2y}, P_{2w}, P_{3x}, P_{3y}, P_{3w} geschrieben wurde. Es ist

$$Q=\frac{M}{\left(1-\frac{T}{a}\right)\left(1-\frac{\tilde{X}_2}{b}\right)\left(1-\frac{\tilde{Y}_2}{b}\right)\left(1-\frac{\tilde{W}_2}{b}\right)\left(1-\frac{\tilde{X}_3}{b}\right)\left(1-\frac{\tilde{Y}_3}{b}\right)\left(1-\frac{\tilde{W}_3}{b}\right)}.$$

Wir untersuchen nun folgendes Differentialgleichungssystem:

$$T\,\frac{dV_\nu}{dT} = TQ \quad (\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

wobei in Q die Veränderlichen $\tilde{X}_2$, $\tilde{Y}_2$, $\tilde{W}_2$, $\tilde{X}_3$, $\tilde{Y}_3$, $\tilde{W}_3$ durch V_ν zu ersetzen sind.

Aus Symmetriegründen folgt $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_5 = V_6$. Damit kann das System ersetzt werden durch

$$T\frac{dV}{dT} = \frac{TM}{\left(1-\frac{T}{a}\right)\left(1-\frac{V}{b}\right)^6}.$$

Diese Gleichung wird k-mal nach T differenziert und dann wird $T = 0$ gesetzt. Auf der linken Seite ergibt sich der Ausdruck: $k\,\frac{d^k V}{dT^k}$. Insbesondere sieht man, daß $V(0)$ willkürlich ist, wenn $k = 0$ gesetzt wird. Nun ist:

$$k < k^2 + 2k; \qquad k < k^2 + 6k + 8$$

Die Ableitungen auf der rechten Seite sind höchstens von der Ordnung $k-1$ und dem Betrage nach größer als die entsprechenden Ableitungen des Differentialgleichungssystems (2), da die Terme $\frac{d^k V}{dT^k}$ aus den Ausdrücken $\frac{\partial^{p+q+r+s+t+u+v}\,Q}{\partial T^p\,\partial V_1^q\,\partial V_2^r\,\partial V_3^s\,\partial V_4^t\,\partial V_5^u\,\partial V_6^v}$ in der gleichen Weise erhalten werden, wie die Terme $\frac{d^k \tilde{X}}{dT^k}$ aus

$$\frac{\partial^{p+q+r+s+t+u+v}\,P}{\partial T^p\,\partial \tilde{X}_2^q\,\partial \tilde{Y}_2^r\,\partial \tilde{W}_2^s\,\partial \tilde{X}_3^t\,\partial \tilde{Y}_3^u\,\partial \tilde{W}_3^v}.$$

Die Reihe für V stellt deshalb eine Majorante für die Reihe der X_i dar.

Wir müssen noch beweisen, daß die Majorante konvergiert. Es ist

$$\frac{dV}{dT} = \frac{M}{\left(1-\frac{T}{a}\right)\left(1-\frac{V}{b}\right)^6}$$

Die rechte Seite ist eine holomorphe Funktion in T und V für $|T| < a$, $|V| < b$. Daher gibt es nach dem Existenzsatz für Differentialgleichungen eine in $|T| < a$ reguläre Lösung $V(T)$, die sich dort in eine konvergente Potenzreihe entwickeln läßt. Die Konvergenz der formalen Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung (1) ist damit nachgewiesen.

Für $A' a_1' + B' b_1' + C' c_1' = k^2(A a_1 + B b_1 + C c_1)$ lauten daher die Lösungen:

$$\begin{aligned}
x_2 &= A \quad + A a_0 t^{1/2} + a_1 t + a_2 t^{3/2} + \dots \\
y_2 &= B \quad + B a_0 t^{1/2} + b_1 t + b_2 t^{3/2} + \dots \\
z_2 &= C \quad + C a_0 t^{1/2} + c_1 t + c_2 t^{3/2} + \dots \\
x_3 &= A' \quad + A' a_0' t^{1/2} + a_1' t + a_2' t^{3/2} + \dots \\
y_3 &= B' \quad + B' a_0' t^{1/2} + b_1' t + b_2' t^{3/2} + \dots \\
z_3 &= C' \quad + C' a_0' t^{1/2} + c_1' t + c_2' t^{3/2} + \dots
\end{aligned} \tag{3}$$

A, B, k, a_1, b_1, c_1, a_1', b_1', sind dabei willkürliche Konstante.

§ 9. Logarithmische Lösungen

Nun wollen wir untersuchen, was geschieht, wenn die Bedingung (10) aus § 7 nicht erfüllt ist.

Die Differentialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
T^2 \frac{d^2 X_2}{dT^2} + T \frac{dX_2}{dT} - X_2 &= \varkappa_2 T + P_{2x} \\
T^2 \frac{d^2 Y_2}{dT^2} + T \frac{dY_2}{dT} - Y_2 &= \iota_2 T + P_{2y} \\
T^2 \frac{d^2 W_2}{dT^2} + 5T \frac{dW_2}{dT} + 3 W_2 &= \omega_2 T + P_{2w}
\end{aligned} \tag{1}$$

und drei analoge Gleichungen mit dem Zeiger 3, wobei P_{2x}, P_{2y}, P_{2w}, P_{3x}, P_{3y}, P_{3w} reguläre Funktionen der X_ν, Y_ν, W_ν $(\nu = 2, 3)$ und T sind, die mit den Veränderlichen verschwinden und keine Terme niedrigerer als zweiter Ordnung besitzen.

Dabei ist

$$\varkappa_2 = 2A\gamma, \qquad \iota_2 = 2B\gamma, \qquad \omega_2 = 2\delta,$$
$$\varkappa_3 = 2A'\gamma', \qquad \iota_3 = 2B'\gamma', \qquad \omega_3 = 2\delta',$$

wobei γ, γ', δ, δ' aus § 7 (3) und (4) zu entnehmen sind.

Das Differentialgleichungssystem (1) wird auf ein System 1. Ordnung umgeschrieben. Dazu führen wir folgende Substitution durch:

$$T\frac{dX_2}{dT} = p_2; \qquad T\frac{dp_2}{dT} = T^2\frac{d^2X_2}{dT^2} + T\frac{dX_2}{dT}$$
$$T\frac{dY_2}{dT} = q_2; \qquad T\frac{dW_2}{dT} = r_2 \text{ usw.}$$

Wir erhalten damit:

$$T\frac{dX_2}{dT} = p_2; \qquad T\frac{dp_2}{dT} = X_2 + \varkappa_2 T + P_{2x};$$
$$T\frac{dY_2}{dT} = q_2; \qquad T\frac{dq_2}{dT} = Y_2 + \iota_2 T + P_{2y};$$
$$T\frac{dW_2}{dT} = r_2; \qquad T\frac{dr_2}{dT} = -3W_2 - 4r_2 + \omega_2 T + P_{2w}$$

und sechs analoge Gleichungen mit dem Zeiger 3.

Wir setzen: $X_2 + p_2 = \eta_1$; $X_2 - p_2 = \eta_2$; $Y_2 + q_2 = \eta_3$;
$Y_2 - q_2 = \eta_4$; $W_2 + r_2 = \eta_5$; $W_2 + \frac{1}{3}r_2 = \eta_6$

und erhalten:

$$T\frac{d\eta_1}{dT} = \eta_1 + \varkappa_2 T + P_1; \qquad T\frac{d\eta_2}{dT} = -\eta_2 - \varkappa_2 T - P_1;$$
$$T\frac{d\eta_3}{dT} = \eta_3 + \iota_2 T + P_3; \qquad T\frac{d\eta_4}{dT} = -\eta_4 - \iota_2 T - P_3;$$
$$T\frac{d\eta_5}{dT} = -3\eta_5 + \omega_2 T + P_5; \quad T\frac{d\eta_6}{dT} = -\eta_6 + \frac{1}{3}\omega_2 T + \frac{1}{3}P_5; \quad \text{usw.}$$

Die Ausdrücke $P_1 \ldots P_{11}$ entstehen aus $P_{2x}, P_{2y} \ldots$ dadurch, daß X_2 durch $\eta_1 + \eta_2$ ersetzt wird usw.

Die charakteristische Gleichung dieses Systems lautet:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda &&&&&&&&&&& \\ & -1-\lambda &&&&&&&&&& \\ && 1-\lambda &&&&&&&& \\ &&& -1-\lambda &&&&&&& \\ &&&& -3-\lambda &&&&&& 0 & \\ &&&&& -1-\lambda &&&&&& \\ &&&&&& 1-\lambda &&&&& \\ & 0 &&&&&& -1-\lambda &&&& \\ &&&&&&&& 1-\lambda &&& \\ &&&&&&&&& -1-\lambda && \\ &&&&&&&&&& -3-\lambda & \\ &&&&&&&&&&& -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sie hat die Lösungen:

$\lambda = -3$ (zweifach); $\lambda = +1$ (vierfach); $\lambda = -1$ (sechsfach).

Die nichtregulären Lösungen des Systems sind in Form von regulären Funktionen der beiden Veränderlichen $u = T$ und $v = T \ln T$ darstellbar.

Da

$$\frac{d(\ )}{dT} = \frac{\partial(\ )}{\partial u} + \frac{\partial(\ )}{\partial v}(1 + \ln T),$$

$$T\frac{d(\ )}{dT} = u\frac{\partial(\ )}{\partial u} + u\frac{\partial(\ )}{\partial v} + v\frac{\partial(\ )}{\partial v},$$

geht das System über in:

$$1)\qquad u\frac{\partial\eta_1}{\partial u} + v\frac{\partial\eta_1}{\partial v} + u\frac{\partial\eta_1}{\partial v} = \eta_1 + \varkappa_2 T + P_1$$

$$2)\qquad u\frac{\partial\eta_2}{\partial u} + v\frac{\partial\eta_2}{\partial v} + u\frac{\partial\eta_2}{\partial v} = -\eta_2 - \varkappa_2 T - P_1$$

$$3)\qquad u\frac{\partial\eta_3}{\partial u} + v\frac{\partial\eta_3}{\partial v} + u\frac{\partial\eta_3}{\partial v} = \eta_3 + \iota_2 T + P_3$$

$$4)\qquad u\frac{\partial\eta_4}{\partial u} + v\frac{\partial\eta_4}{\partial v} + u\frac{\partial\eta_4}{\partial v} = -\eta_4 - \iota_2 T - P_3$$

$$5)\qquad u\frac{\partial\eta_5}{\partial u} + v\frac{\partial\eta_5}{\partial v} + u\frac{\partial\eta_5}{\partial v} = -3\eta_5 + \omega_2 T + P_5$$

6) $$u\frac{\partial \eta_6}{\partial u} + v\frac{\partial \eta_6}{\partial v} + u\frac{\partial \eta_6}{\partial v} = -\eta_6 + \frac{1}{3}\omega_2 T + \frac{1}{3} P_5$$

usw.

Diese Differentialgleichungen werden n-mal nach u und m-mal nach v differenziert und dann $u = v = 0$ gesetzt. Dabei erhält man auf den linken Seiten:

$$(n + m - 1)\frac{\partial^{n+m}\eta_i}{\partial u^n \partial v^m} + n\frac{\partial^{n+m}\eta_i}{\partial u^{n-1}\partial v^{m+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots 12)$$

Da die P_i als niedrigste Terme solche zweiter Ordnung enthalten, entstehen beim n-maligen Differenzieren nach u und m-maligen Differenzieren nach v höchstens Ableitungen von der Ordnung $n + p - 1$. Daher können alle Ableitungen sukzessive aus solchen niedrigerer Ordnung gewonnen werden. Die formale Entwicklung ist damit gerechtfertigt. Insbesondere erhält man:

1) $n = 1$, $m = 0$:

$$\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\right)_0 + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial v}\right)_0 = \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\right)_0 + \varkappa_2$$

Hieraus folgt: $\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\right)_0$ ist willkürlich, $\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial v}\right)_0 = 0$;

2) $n = 0$, $m = 1$:

$$\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial v}\right)_0 = -\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial v}\right)_0; \text{ das ergibt: } \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial v}\right)_0 = 0.$$

$n = 1$, $m = 0$:

$$2\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial u}\right)_0 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial v}\right)_0 = -\varkappa_2; \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial u}\right)_0 = -\frac{\varkappa_2}{2};$$

5) $n = 1$, $m = 0$:

$$4\left(\frac{\partial \eta_5}{\partial u}\right)_0 + \left(\frac{\partial \eta_5}{\partial v}\right)_0 = \omega_2;$$

$n = 0$, $m = 1$:

$$\left(\frac{\partial \eta_5}{\partial v}\right)_0 = 0; \left(\frac{\partial \eta_5}{\partial u}\right)_0 = -\frac{\omega_2}{4};$$

6) $n = 1, \; m = 0$:

$$2\left(\frac{\partial \eta_6}{\partial u}\right)_0 + \left(\frac{\partial \eta_6}{\partial v}\right)_0 = \frac{1}{3}\,\omega_2$$

$$\left(\frac{\partial \eta_6}{\partial v}\right)_0 = 0; \quad \text{hieraus folgt:} \left(\frac{\partial \eta_6}{\partial u}\right)_0 = \frac{1}{6}\,\omega_2.$$

Ebenso errechnen sich die Differentialquotienten erster Ordnung für die anderen Reihen.

Man erhält daher:

$$X_2 = a_1 T + \frac{\varkappa_2}{2} T \ln T + \ldots = a_1 T + A\gamma T \ln T + \ldots$$

$$Y_2 = b_1 T + \frac{\iota_2}{2} T \ln T + \ldots = b_1 T + B\gamma T$$

$$W_2 = \frac{1}{8}\,\omega_2 T + \ldots \qquad = \frac{1}{4}\,\delta_2 T + \ldots$$

usw.

Hieraus ergibt sich:

$$x_2 = A + A a_0 T + a_1 T^2 + A\gamma T^2 \ln T + \ldots$$
$$y_2 = B + B a_0 T + b_1 T^2 + B\gamma T^2 \ln T + \ldots$$
$$\overline{w}_2 = (A a_1 + B b_1 + C c_1)\, T^2 + \alpha_1 T^3 + \frac{1}{4}\,\delta T^4 + \ldots$$
$$C z_2 = \overline{w}_2 - A x_2 - B y_2 = C^2 + C^2 a_0 T + C c_1 T^2 + {} \\ + C^2 \gamma T^2 \ln T + \ldots$$
$$z_2 = C + C a_0 T + c_1 T^2 + C\gamma T^2 \ln T.$$

Somit erhält man für die Lösungen des Differentialgleichungssystems (1) aus § 4:

$$\left.\begin{aligned}
x_2 &= A + A a_0 T + a_1 T^2 + A\gamma T^2 \ln T + \ldots \\
y_2 &= B + B a_0 T + b_1 T^2 + B\gamma T^2 \ln T + \ldots \\
z_2 &= C + C a_0 T + c_1 T^2 + C\gamma T^2 \ln T + \ldots \\
x_3 &= A' + A' a_0' T + a_1' T^2 + A'\gamma' T^2 \ln T + \ldots \\
y_3 &= B' + B' a_0' T + b_1' T^2 + B'\gamma' T^2 \ln T + \ldots \\
z_3 &= C' + C' a_0' T + c_1' T^2 + C'\gamma' T^2 \ln T + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad T = t^{1/2} \qquad (2)$$

Daß diese Entwicklungen nach T und $T \ln T$ konvergieren, folgt aus einem Satz von J. Horn im Journal für Mathematik Bd. 116 (1896), S. 292–306, Bd. 117 (1897), S. 104–128 und S. 254–266.

§ 10. Berechnung der Flächengeschwindigkeit

Es soll die Flächengeschwindigkeit der drei Massenpunkte bezüglich des Schwerpunktes ermittelt werden.

$\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ seien die vom Punkt m_1 nach m_2 und m_3, $\bar{\mathfrak{r}}_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ die vom Schwerpunkt der drei Massenpunkte nach den Punkten m_ν gezogenen Vektoren.

Für den Gesamtdrehimpuls erhält man:

$$J = m_1[\bar{\mathfrak{r}}_1 \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_1] + m_2[\bar{\mathfrak{r}}_2 \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_2] + m_3[\bar{\mathfrak{r}}_3 \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_3]$$

Es ist

$$\bar{\mathfrak{r}}_2 = \bar{\mathfrak{r}}_1 + \mathfrak{r}_2$$
$$\bar{\mathfrak{r}}_3 = \bar{\mathfrak{r}}_1 + \mathfrak{r}_3$$

Für den Schwerpunkt gilt: $m_1 \bar{\mathfrak{r}}_1 + m_2 \bar{\mathfrak{r}}_2 + m_3 \bar{\mathfrak{r}}_3 = 0$.

Hieraus ergibt sich die Gleichung:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\bar{\mathfrak{r}}_1 + m_2 \mathfrak{r}_2 + m_3 \mathfrak{r}_3 = 0 .$$

Durch rechtsseitige vektorielle Multiplikation mit $\dot{\bar{\mathfrak{r}}}_1$ erhält man daraus:

$$(m_1 + m_2 + m_3)[\bar{\mathfrak{r}}_1 \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_1] + m_2[\mathfrak{r}_2 \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_1] + m_3[\mathfrak{r}_3 \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_1] = 0.$$

Für $\bar{\mathfrak{r}}_2$, $\bar{\mathfrak{r}}_3$ werden die obigen Ausdrücke in die Gleichung für den Gesamtdrehimpuls eingesetzt:

$$\begin{aligned} J &= m_1[\bar{\mathfrak{r}}_1, \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_1] + m_2[\bar{\mathfrak{r}}_1 + \mathfrak{r}_2, \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_1 + \dot{\mathfrak{r}}_2] + m_3[\bar{\mathfrak{r}}_1 + \mathfrak{r}_3, \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_1 + \dot{\mathfrak{r}}_3] \\ &= (m_1 + m_2 + m_3)[\bar{\mathfrak{r}}_1 \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_1] + m_2[\mathfrak{r}_2 \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_1] + m_3[\mathfrak{r}_3 \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_1] \\ &\quad + m_2([\bar{\mathfrak{r}}_1 \dot{\mathfrak{r}}_2] + [\mathfrak{r}_2 \dot{\mathfrak{r}}_2]) + m_3[\bar{\mathfrak{r}}_1 \dot{\mathfrak{r}}_3] + m_3[\mathfrak{r}_3 \dot{\mathfrak{r}}_3] \\ &= m_2[\bar{\mathfrak{r}}_1 \dot{\mathfrak{r}}_2] + m_3[\bar{\mathfrak{r}}_1 \dot{\mathfrak{r}}_3] + m_2[\mathfrak{r}_2 \dot{\mathfrak{r}}_2] + m_3[\mathfrak{r}_3 \dot{\mathfrak{r}}_3] \end{aligned}$$

oder wegen $\bar{\mathfrak{r}}_1 = -\dfrac{m_2 \mathfrak{r}_2 + m_3 \mathfrak{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

$$J = -\frac{1}{m_1+m_2+m_3}[m_2\mathfrak{r}_2+m_3\mathfrak{r}_3,\ m_2\dot{\mathfrak{r}}_2+m_3\dot{\mathfrak{r}}_3]+m_2[\mathfrak{r}_2\dot{\mathfrak{r}}_2]+m_3[\mathfrak{r}_3\dot{\mathfrak{r}}_3]$$
$$= \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\{m_1m_2[\mathfrak{r}_2\dot{\mathfrak{r}}_2]+m_1m_3[\mathfrak{r}_3\dot{\mathfrak{r}}_3]+m_2m_3[\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_3,\ \dot{\mathfrak{r}}_2-\dot{\mathfrak{r}}_3]\}.$$

Wegen $\mathfrak{r}_2=(x_2, y_2, z_2)$ und $\mathfrak{r}_3=(x_3, y_3, z_3)$ erhält man für die z-Komponente von $[\mathfrak{r}_2\dot{\mathfrak{r}}_2]$ sowohl aus den Gleichungen (3) von § 8 als auch aus den Gleichungen (2) von § 9:

$$\begin{aligned} x_2\dot{y}_2-y_2\dot{x}_2 &= (A+A\,a_0\,t^{1/2}+\ldots)\left(\tfrac{1}{2}B\,a_0\,t^{-1/2}+b_1+\ldots\right) \\ &\quad -(B+B\,a_0t^{1/2}+\ldots)\left(\tfrac{1}{2}A\,a_0t^{-1/2}+a_1+\ldots\right) \\ &= A\,b_1-B\,a_1, \end{aligned}$$

daher für die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses

$$\begin{aligned} J_z = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\{&m_1m_2(A\,b_1-B\,a_1)+m_1m_3(A'\,b_1'-B'\,a_1') \\ &+m_2m_3[(A-A')\,(b_1-b_1')-(B-B')\,(a_1-a_1')]\} \end{aligned}$$

und durch zyklische Vertauschung

$$\begin{aligned} J_x = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\{&m_1m_2(B\,c_1-C\,b_1)+m_1m_3(B'\,c_1'-C'\,b_1') \\ &+m_2m_3[(B-B')\,(c_1-c_1')-(C-C')\,(b_1-b_1')]\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\{&m_1m_2(C\,a_1-A\,c_1)+m_1m_3(C'a_1'-A'c_1') \\ &+m_2m_3[(C-C')\,(a_1-a_1')-(A-A')\,(c_1-c_1')]\}. \end{aligned}$$

Statt A′, B' werden kA und kB eingeführt. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} J_x = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\{&m_1m_2(B\,c_1-C\,b_1)+m_1m_3k(B\,c_1'-C\,b_1') \\ &+m_2m_3(1-k)\,[B(c_1-c_1')-C(b_1-b_1')]\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\{&m_1m_2(C\,a_1-A\,c_1)+m_1m_3k(C\,a_1'-A\,c_1') \\ &+m_2m_3(1-k)[C(a_1-a_1')-A\,(c_1-c_1')]\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_z = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\{&m_1m_2(A\,b_1-B\,a_1)+m_1m_3k(A\,b_1'-B\,a_1') \\ &+m_2m_3(1-k)[A\,(b_1-b_1')-B(a_1-a_1')]\}. \end{aligned}$$

Willkürlich sind im Fall von § 9: A, B, k, a_1', b_1', c_1', a_1, b_1, c_1.

Als Anfangsbedingungen seien gewählt: $C = 0$, daher $B = iA$;

$$c_1 = c_1' = 0, \quad k \text{ reell} \neq 0, 1;$$
$$b_1 \text{ reell}; \quad a_1 = i\bar{a}_1 \text{ mit } \bar{a}_1 \neq -b_1; \quad A \text{ reell}, \; \bar{a}_1 \text{ reell}$$
$$b_1' \text{ reell}; \quad a_1' = i\bar{a}_1' \text{ mit } \bar{a}_1' \neq -b_1'; \quad \bar{a}_1' \text{ reell}$$

Damit wird $J_x = J_y = 0$,

$$J_z = \frac{A}{m_1 + m_2 + m_3}\{m_1 m_2(b_1 + \bar{a}_1) + m_1 m_3 k(b_1' + \bar{a}_1') + m_2 m_3(1-k)[b_1 - b_1' + \bar{a}_1 - \bar{a}_1']\}.$$

Dieser Ausdruck für J_z ist für reelle Massen m_1, m_2, m_3 reell und nicht identisch Null. Ferner ist auch

$$k^2(A a_1 + B b_1 + C c_1) - (A' a_1' + B' b_1' + C' c_1') = \\ = i A k\,[k(\bar{a}_1 + b_1) - (\bar{a}_1' + b_1')]$$

nicht identisch Null.

Im speziellen Fall von § 8 mit $A' a_1' + B' b_1' + C' c_1' = k^2(A a_1 + B b_1 + C c_1)$ ergibt sich für $C = C' = 0$, $B = iA$, $c_1 = c_1' = 0$:

$$a_1' + i b_1' = k(a_1 + i b_1);$$

Setzt man daher wieder für b_1 reell, b_1' reell, k reell, $a_1 = i\bar{a}_1$, so muß

$$a_1' = i[k(\bar{a}_1 + b_1) - b_1'] = i\,\bar{a}_1', \quad \text{wobei}$$
$$\bar{a}_1' = k(\bar{a}_1 + b_1) - b_1',$$

sein.

Es läßt sich auch im algebraisch singulären Fall eine – bei geeigneten Anfangsbedingungen – reelle Flächengeschwindigkeit erreichen, die nicht identisch Null ist, denn

$$J_z = \frac{A}{m_1 + m_2 + m_3}\{m_1 m_2(b_1 + \bar{a}_1) + m_1 m_3 k^2(\bar{a}_1 + b_1) + m_2 m_3(1-k)[b_1 - b_1' + \bar{a}_1 + b_1' - k(\bar{a}_1 + b_1)]\}$$
$$= \frac{A}{m_1 + m_2 + m_3}\{m_1(m_2 + k^2 m_3)\,(\bar{a}_1 + b_1) + m_2 m_3(1-k)^2\,(\bar{a}_1 + b_1)\};$$

$$J_z = \frac{A(\bar{a}_1 + b_1)}{m_1 + m_2 + m_3}\{m_1(m_2 + k^2 m_3) + m_2 m_3(1-k)^2\}.$$

Damit ist gezeigt, daß der Fall des betrachteten Dreierstoßes zweiter Art nicht im Widerspruch steht mit einem reellen von Null verschiedenen resultierenden Drehimpuls.

Sundman hat im Gegensatz dazu gezeigt, daß im Reellen für den Fall, daß nicht alle Komponenten des resultierenden Drehimpulses Null sind, für endliche Werte der Zeit t nur Zweierstöße auftreten können, und daß die zugehörigen Singularitäten algebraisch sind (Entwicklung nach $t^{1/3}$). Setzt man also die Differentialgleichungen ins Komplexe fort, so verhindert die eben genannte Bedingung nicht die Existenz von Dreierstößen (zweiter Art) und zugehörigen logarithmischen Singularitäten.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1965

Band/Volume: 1964

Autor(en)/Author(s): Selder Helmut

Artikel/Article: Über singuläre Stellen in den Differentialgleichungen des Dreikörperproblems 13-48