BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1964

MÜNCHEN 1965

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über ebene nicht beschränkte Bogen dritter Ordnung

Von Otto Haupt in Erlangen

Vorgelegt am 8. Mai 1964

1. In einer früheren Note [1]* wurde (a.a.O. Nr. 3.3.) behauptet, daß jeder Bogen B vom Punktordnungswert POW $(B;\, \mathfrak{k})$ $= 3$ $\mathfrak{k}$-beschränkt sei. Dabei handelte es sich um einfache, abgeschlossene Bogen B in einer topologisch ebenen projektiven Ebene $(E,\, \mathfrak{k})$. Unter E wird die gewöhnliche reelle projektive Ebene (oder ein topologisches Bild von ihr) verstanden und unter $\mathfrak{k}$ ein System verallgemeinerter „Geraden", d. h. topologischer Bilder der Kreislinie, die als Ordnungscharakteristiken, abgekürzt OCh, bezeichnet werden. Für diese OCh gilt – kurz gesagt: Zu je zwei (verschiedenen) Punkten $p', p'' \in E$ gibt es genau eine, p' und p'' enthaltende OCh $K(p', p'')$ und zu je zwei beliebigen (verschiedenen) OCh K', K'' gibt es genau einen Punkt $p(K', K'') \in K' \cap K''$; mit p', p'' bzw. K', K'' ändert sich $K(p', p'')$ bzw. $p(K', K'')$ stetig. Es heißt B $\mathfrak{k}$-beschränkt, wenn es eine OCh K gibt mit $B = \bar{B} \subset E - K$, also mit $B \cap K = \theta$.

2. Wie sich bei erneuter Nachprüfung herausstellte, ist die in Nr. 1 erwähnte Behauptung, alle Bogen B mit POW$(B; \mathfrak{k}) = 3$ seien $\mathfrak{k}$-beschränkt, nur bedingt richtig. Sie gilt nämlich nur bei einer Definition der Ordnung in einem engeren Sinne, kurz POW i. e. S., wie sie den Arbeiten von *C. Juel*, *J. v. Sz.-Nagy* und anderen zugrunde liegt. Bei diesem POW i. e. S. werden die Berührungspunkte auf den Tangenten mit entsprechender Vielfachheit gezählt, hingegen bei den von uns (in [1]) verwendeten POW (im weiteren Sinne, kurz i. w. S.) nur einfach. Daher ist der POW i. e. S. eines Bogens im allgemeinen größer als der POW i. w. S.

---

* Zahlen in eckiger Klammer im Text verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Note. Die im Text benutzten Bezeichnungen (vgl. auch [1]) wie ($\mathfrak{k}$-)konvex, ($\mathfrak{k}$-)beschränkt usw. stimmen für den Fall der gewöhnlichen projektiven Ebene mit den dort üblichen überein.

So wird es erklärlich, daß es zwar keine nicht-$\mathfrak{k}$-beschränkten Bogen vom POW 3 i. e. S. gibt, wohl aber solche vom POW 3 i.w.S. Der Unterschied zwischen POW i. e. und i. w. S. besteht (soweit der Reduktionssatz gilt) allgemein zu reden darin, daß beim POW i. w. S. eine gewisse, in $\mathfrak{k}$ nirgends dichte Menge von OCh außer Betracht bleibt, die beim POW i. e. S. mit berücksichtigt wird (vgl. Genaueres hierüber in [2], § 1).

In Berichtigung und Ergänzung der in Nr. 1 erwähnten Behauptung sollen im folgenden alle einfachen nicht $\mathfrak{k}$-beschränkten Bogen vom POW 3 bestimmt werden. Dabei handelt es sich *von jetzt ab* stets um den *POW i. w. S.*, kurz POW$(B; \mathfrak{k})$.

Zur Abkürzung bezeichnen wir dabei als $\mathfrak{k}$-Wendepunkte im weiteren Sinne (i.w.S.) jeden $\mathfrak{k}$-Schnabel einschließlich der $\mathfrak{k}$-Wendepunkte (und ausschließlich der $\mathfrak{k}$-Schnabelspitzen), während jeder $\mathfrak{k}$-Dorn, einschließlich der $\mathfrak{k}$-Dornspitzen, als *zwei* $\mathfrak{k}$-Wendepunkte i.w.S. gezählt wird.

Die gewünschte Bestimmung aller nicht-$\mathfrak{k}$-beschränkten Bogen 3. Ordnung wird nun geleistet mit dem

Satz. Vor. *Es sei $B = B(a|b)$ ein einfacher Bogen mit* POW$(B; \mathfrak{k}) = 3$, *der nicht $\mathfrak{k}$-beschränkt ist.*

Beh. (1) *Es besitzt B genau zwei $\mathfrak{k}$-Wendepunkte im weiteren Sinne.* – (2) *Es ist $\{s\} = \underset{\sim}{B} \cap K(a, b)$ und s Stützpunkt von B auf der* OCh $K(a,b)$. *Dabei liegt s im abgeschlossenen, von den $\mathfrak{k}$-Wendepunkten* i. w. S. *begrenzten Teilbogen von B, der sich also bei Vorhandensein eines $\mathfrak{k}$-Dorns auf den Punkt s reduziert.* – (3) *Es ist B fast-$\mathfrak{k}$-beschränkt, d. h.: Ist A eine beliebig kleine Umgebung von a auf B, so ist $(B - A)$ $\mathfrak{k}$-beschränkt.*

Zusatz. Es gibt der Vor. genügende Bogen B. Sie lassen sich auf Grund der Beh. (1) und (2) sämtlich konstruieren.

1. Anmerkung. Da der Stützpunkt von B auf $K = K(a,b)$ für zwei Punkte zu zählen ist, wenn man den POW i. e. S. zugrunde legt, sind alle Bogen vom POW 3 i.e.S. $\mathfrak{k}$-beschränkt (denn es ist POW$(B \cap K) = 4$ i. e. S. für nicht-$\mathfrak{k}$-beschränkte Bogen B).

2. Anmerkung. Die übrigen in [1] angezeigten Ergebnisse sind unabhängig von der in Nr. 1 erwähnten unrichtigen Behauptung. – Der vorstehende Satz erscheint übrigens insofern nicht

unwichtig, als mit seiner Hilfe die Untersuchung aller einfachen Bogen vom POW 3 i. w. S. und i. e. S. auf die von $\mathfrak{k}$-beschränkten zurückführbar ist.

Auf die Untersuchung der nicht-$\mathfrak{k}$-beschränkten Bogen vom POW 3 *mit* Doppelpunkt soll an anderer Stelle eingegangen werden.

Für Kritik bei der Ausarbeitung des nachfolgenden Beweises für den vorstehenden Satz sowie für eine wesentliche Vereinfachung (vgl. Nr. 3 1., (VI)) bin ich Herrn H. Künneth herzlich zu Dank verpflichtet.

2. 1. Vorbemerkungen zum Beweis.

2. 1. 1. In den folgenden Nummern wird von den in [1] eingeführten Bezeichnungen Gebrauch gemacht; insbesondere bedeutet $K(p, q) \in \mathfrak{k}$ die OCh mit $p, q \in K(p, q)$ $(p \neq q)$, ferner $K(p\,|\,q)$ einen der von p und q begrenzten Teilbogen von $K(p, q)$, der jeweils näher zu bestimmen ist. Mit $B(p'\,|\,q') \subset B$ wird entsprechend der von p' und q' begrenzte Teilbogen des Bogens B bezeichnet und es wird $\underset{\sim}{B}(p'\,|\,q') = B(p'\,|\,q') - \{p'\} - \{q'\}$ gesetzt. Dabei ist stets B als abgeschlossen (und einfach) angenommen: $B = \bar{B}$. In den Bezeichnungen wie $\mathfrak{k}$-konvex, $\mathfrak{k}$-beschränkt usw. wird das „$\mathfrak{k}$-" meist fortgelassen.

Als AusnahmeOCh eines Bogens $B = B(a\,|\,b)$ wird die, a und b enthaltende OCh $K(a, b)$ bezeichnet, wenn $\underset{\sim}{B} \cap K(a, b) = \{s\}$, also einpunktig, und wenn überdies s Stützpunkt von $\underset{\sim}{B}$ auf $K(a, b)$ ist.

2. 1. 2. Aus POW $(B; \mathfrak{k}) = 3$ folgt: Es ist B Vereinigung endlich vieler ($\mathfrak{k}$-)konvexer Bogen (vgl. [1], Nr. 3. 1.), besitzt folglich nur endlich viele ($\mathfrak{k}$-)singuläre Punkte, hier also Schnäbel und Dorne; dabei gelten (vgl. Nr. 2., Satz) Wendepunkte bzw. Dornspitzen als Spezialfälle der Schnäbel bzw. Dorne (Schnabelspitzen treten wegen POW $(B; \mathfrak{k}) = 3$ nicht auf) (vgl. auch [1], Nr. 3. 2. 2.).

3. Beweis des Satzes.

3. 1. Zunächst wird angenommen: *Sämtliche singulären Punkte des Bogens* $B = B(a\,|\,b)$ *seien Wendepunkte*, etwa $w_1, \ldots, w_m$; $m \geq 0$.

Gezeigt wird: (1) Es ist $m = 2$. – (2) Es ist $K(a, b)$ Ausnahme-OCh. Der Stützpunkt $s \in \underset{\sim}{B} \cap K(a,b)$ liegt zwischen w_1 und w_2. – (3) Es ist B fast-beschränkt. (Vor: B einfach, POW $(B; \mathfrak{k}) = 3$, B nicht beschränkt).

Bew. (I) Auf B sei a vor w_1 und w_μ vor $w_{\mu+1}$ gelegen; $\mu = 1, \ldots, m - 1$; $m \geq 1$. Für $x \in B$ werde mit $T(x)$ bezeichnet: Falls x End- oder Wendepunkt ist, die Tangente an B in x; falls $x \in \underset{\sim}{B}$ und nicht Wendepunkt ist, jede OCh, von der $\underset{\sim}{B}$ in x gestützt wird. – Für festes $x = x' \in B$ besitzt die Menge $\mathfrak{t}(x')$ der $T(x')$ genau ein Element, falls x' differenzierbar (vgl. [1], Nr. 2.2.2), insbesondere also End- oder Wendepunkt, ist; hingegen ist für einen nicht-differenzierbaren Hut x' die Menge $\mathfrak{t}(x')$ homöomorph zu einer ($\mathfrak{k}$-)Strecke.

(II) Es sei $B' = B - \{x\}$ gesetzt. Wegen POW $(B; \mathfrak{k}) = 3$ und der Nicht-Beschränktheit von B sind bezüglich $T(x)$ nur folgende Möglichkeiten denkbar: Ist x *End*punkt von B, so enthält $D = B' \cap T(x)$ entweder genau einen Schnittpunkt und dazu höchstens den anderen Endpunkt oder genau einen Stützpunkt und dazu stets den anderen Endpunkt. Ist x *Wende*punkt, so enthält D, wenn $D \neq 0$, keinen Schnittpunkt, sondern höchstens einen Stützpunkt und höchstens Endpunkte. Ist x *weder End- noch Wende*punkt, so enthält D keine Stützpunkte, sondern entweder genau einen Punkt, der Schnittpunkt ist, oder die beiden Endpunkte.

(II 1) Es sei $w = w_\mu$ Wendepunkt und V bzw. H eine vordere bzw. hintere Umgebung von w auf B. Für hinreichend kleine V, H gilt: Ist $x \in \underset{\sim}{V}$, so existiert ein (in $V \cup H$ einziger) Schnittpunkt $s(x) \in \underset{\sim}{H} \cap T(x)$. Bewegt sich x stetig und monoton auf $\underset{\sim}{V}$ und ändert sich $T(x)$ in $\mathfrak{t}(x)$ im entsprechenden Sinne (speziell, wenn x ein Hut ist), so bleibt $s(x)$ Schnittpunkt und wandert stetig und monoton auf B in der entgegengesetzten Richtung wie x (vgl. den Beweis in (II 2)). Es folgt weiter: Bewegt sich x nach vorn (monoton und stetig) über V hinaus und bleibt x in $\underset{\sim}{B}$, so geht $s(x)$ nicht verloren (weil $s(x)$ nicht Stützpunkt und nicht gleich x werden kann), bleibt also Schnittpunkt, solange nicht $s(x) = b$ wird.

(II 2) *In Abhängigkeit von x bzw. von $T(x)$ ändert $s(x)$ seine Bewegungsrichtung auf $\underset{\sim}{B}$ genau dann, wenn x einen Wendepunkt überschreitet, der von $s(x)$ verschieden ist.* In der Tat:

(A) *Es sei $x \in \underset{\sim}{B}$ nicht Wende*punkt, so daß konvexe Umgebungen U von x auf B existieren. Es sei W bzw. W' eine Umgebung von x bzw. von $s(x)$ in E mit $\overline{W} \cap \overline{W}' = \theta$. Liegt nun $x' \in U$ vor x und $x'' \in U$ hinter x, ist ferner $T(x') \in \mathfrak{t}(x')$, $T(x) \in \mathfrak{t}(x)$, $T(x'') \in \mathfrak{t}(x'')$, so sei D' bzw. D'' das von $T(x')$ und $T(x)$ bzw. von $T(x)$ und $T(x'')$ begrenzte offene Dieder (in E) mit $D' \cap U = \theta = D'' \cap U$. Ist U hinreichend klein, so gilt $D' \cap D'' \cap (E - W) = \theta$, mithin $\underset{\sim}{B} \cap W' \cap D' \cap D'' = \theta$; außerdem existiert (zu hinreichend kleinem U) eine Umgebung $\mathfrak{S}$ des Schnittpunktes $s(x)$ auf B derart, daß $\mathfrak{S} \cap T(z)$ einpunktig ist für jedes $z \in U$ bzw. $T(z) \in \mathfrak{t}(z)$; mithin ist $D' \cap \mathfrak{S}$ fremd zu $D'' \cap \mathfrak{S}$, woraus die Monotonie (und Stetigkeit) von $s(x)$ bei monotoner (stetiger) Änderung von x bzw. von $T(x)$ (in U bzw. in $\mathfrak{t}(x)$) folgt. (Es soll $\mathfrak{S} \subset W'$ sein).

Es sei noch bemerkt, daß die Begrenzung von $D' \cap D''$ ein Dreieck ist, auf dessen einer Seite $T(y'|y'')$ das x liegt; dabei ist $T(y'|y'')$ Teilstrecke von $T(x)$, für deren Endpunkte y', y'' gilt: $\{y'\} = T(x') \cap T(x)$, $\{y''\} = T(x'') \cap T(x)$.

(B) *Es sei jetzt $x \in \underset{\sim}{B}$ Wende*punkt. Dann ist in $U = V \cup H$ zwar V und H konvex (wenn U hinreichend klein), aber nicht U. Für $x' \in \underset{\sim}{V}$, $x'' \in \underset{\sim}{H}$ sei D' bzw. D'' das von einem $T(x') \in \mathfrak{t}(x')$ und einem $T(x) \in \mathfrak{t}(x)$ bzw. von $T(x)$ und einem $T(x'') \in \mathfrak{t}(x'')$ begrenzte offene Dieder mit $D' \cap V = \theta$ bzw. mit $D'' \cap H = \theta$. Es ist dann die Begrenzung von $D' \cap D''$ ein Dreieck Δ, dessen Seiten je eine Teilstrecke von $T(x')$, $T(x)$, $T(x'')$ sind; hierbei ist x fremd zu Δ und $s(x) \in \Delta$. Für hinreichend kleines U sind die auf $T(x)$ gelegenen Ecken von Δ beliebig benachbart zu x. Daher gibt es eine, in S (vgl. (A)) enthaltene einseitige Umgebung S' von $s(x)$ auf B derart, daß $D' \cap D'' \cap S'$ ein Teilbogen von S' mit $s(x)$ als dem einen Endpunkt ist. Daraus folgt, daß $s(z)$ für $z \in U$ seine Bewegungsrichtung in $s(x)$ wechselt.

(III) Es wird gezeigt: Für $m \geq 2$ ist $K(a, b)$ AusnahmeOCh mit einem Stützpunkt s zwischen w_1 und w_2; ($\{s\} = \underset{\sim}{B} \cap K(a, b)$). – In der Tat: Wir starten mit einem x vor und nahe bei w_2. Gemäß (II) liegt ein Schnittpunkt $s(x) \in B' \cap T(x)$ hinter w_2 und wandert gegen b, wenn x gegen w_1 geht. Ist x in hinreichende Nähe hinter w_1 gelangt, so existiert ein $s'(x) \in B' \cap T(x)$ nahe und vor w_1. Da aber $s'(x)$ Schnittpunkt ist und $B \cap T(x)$ nicht mehr als einen Schnittpunkt enthalten kann, ist $s(x)$ verlorengegangen, also über b hinausgerückt. Mithin gibt es ein $x' \in \underset{\sim}{B}(w_1 | w_2)$ mit $s(x') = b$. Gemäß (II) ist dann $T(x') = K(a, b)$ mit dem Stützpunkt x'. –

(**IV**) Ist $m \geq 3$, so folgt aus (III) bei Vertauschung von a mit b und von w_1, w_2 mit w_m, w_{m-1}: Es besitzt $K(a, b)$ auch einen Stützpunkt zwischen w_m und w_{m-1} (neben dem zwischen w_1 und w_2). Wegen $m \geq 3$ ist aber $\underset{\sim}{B}(w_1 | w_2) \cap \underset{\sim}{B}(w_m | w_{m-1}) = \theta$. Somit trägt $K(a, b)$, falls $m \geq 3$, zwei verschiedene Stützpunkte mit $\underset{\sim}{B}$, was mit $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 3$ unvereinbar ist. Somit ist $m \leq 2$, d. h. die Existenz höchstens zweier Wendepunkte zulässig.

(**V**) Gemäß (IV) ist $0 \leq m \leq 2$. Es ist aber sogar $1 \leq m$. Denn für $m = 0$ enthält $F = \underset{\sim}{B} \cap K(a, b)$ einen Schnittpunkt s. Im Falle $F = \theta$ ist nämlich $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 2$ (vgl. [4], Nr. 1.4.1., Satz, Zusatz); auch kann F keinen Stützpunkt t enthalten, weil sonst etwa $\underset{\sim}{B}(a | t)$ einen Wendepunkt enthält (vgl. auch [4], Nr. 1.4.) oder $\underset{\sim}{B}(t | b)$ in der konvexen Hülle des beschränkten Bogens $B(a | t)$ enthalten und folglich B selbst beschränkt wäre. Es sei also $B = B(a | s) \cup B(s | b)$ mit s als Schnittpunkt von $\underset{\sim}{B} \cap K(a, b)$. Dann sind $B(a | s)$ und $B(s | b)$ je konvex (vgl. [4], Nr. 1.4.1.), also beschränkt. Es ist $(\underset{\sim}{B} - \{s\}) \cap T(s) \neq \theta$ für $T(s) \in \mathfrak{t}(s)$, weil B nicht beschränkt und $T(s) \neq K(a, b)$ (es ist ja s kein Wendepunkt, also $T(s)$ nicht Wendetangente). Ist aber $\{t\} = \underset{\sim}{B}(s | b) \cap T(s)$, so liegt $\underset{\sim}{B}(a | s)$ im Innern der konvexen Hülle des (konvexen, beschränkten) Bogens $B(s | t)$, woraus $(\underset{\sim}{B} - \{s\}) \cap K(a, b) \neq 0$ also $\mathrm{POW}(B \cap K(a, b)) \geq 4$ folgt. Widerspruch.

(**VI**) Für $m = 1$ ist B beschränkt. In der Tat*: Es sei also $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 3$, ferner enthalte der einfache Bogen $B = B(a | b)$ genau einen Wendepunkt (und keine weiteren singulären Punkte), auch sei B nicht beschränkt.

---

* Der Beweis rührt von Herrn H. Künneth her.

(VI 1) Es sei $K = K(a, b)$ gesetzt. Wegen $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 3$ und der Unbeschränktheit von B ist $\underset{\sim}{B} \frown K = \{p\}$ einpunktig. Es ist p Schnittpunkt. In der Tat: Andernfalls ist p Stützpunkt und folglich $K = T(p) \in \mathfrak{t}(p)$ sowie $w \neq p$, wenn w der (einzige) Wendepunkt von B. Setzt man $B' = B(a|p)$ und $B'' = B(p|b)$, so ist o. B. d. A. $w \in \underset{\sim}{B}'$. Wir starten mit einem, zu w hinreichend benachbarten x hinter w. Dann enthält $\underset{\sim}{B}(a|w) \frown T(x)$ einen Schnittpunkt z nahe bei und vor w; und wegen $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 3$ ist sogar $\{z\} = (\underset{\sim}{B} - \{x\}) \frown T(x)$. Gemäß (II) (2) bewegt sich z gegen a, wenn x gegen b wandert; solange noch $x \in \underset{\sim}{B}$ ist und x seine Bewegungsrichtung nicht ändert, geht z höchstens dadurch verloren, daß $z = a$ wird. Für $x = p$ bzw. $T(x) = T(p)$ wird aber $z = a$. Da $p \neq w$, also regulärer Punkt ist, ändert $T(x)$ beim Durchgang durch $T(p)$ seine Bewegungsrichtung nicht, also tut dies auch z nicht und geht damit verloren. Für zu p, bzw. entsprechend zu $T(p)$, hinreichend benachbarte x hinter p, bzw. entsprechende $T(x)$, existiert mithin gemäß (II) ein zu b beliebig benachbarter Schnittpunkt $\{y\} = \underset{\sim}{B}(x|b) \frown T(x)$. Es bewegt sich daher $y \in \underset{\sim}{B}''$ zunächst, also gemäß (II 1) überhaupt, gegen a und damit dem x entgegen, solange x gegen b geht und keinen Wendepunkt überschreitet. Wegen $w \notin B''$ kommen daher x und y einander beliebig nahe, im Widerspruch zu $w \notin B''$. – Somit ist p Schnittpunkt.

(VI 2) Gemäß (VI 1) ist $p \in \underset{\sim}{B} \frown K(a, b)$ Schnittpunkt; außerdem ist $\underset{\sim}{B}'' \frown K = \theta$ (mit $K = K(a, b)$) und $\underset{\sim}{B}''$ frei von Wendepunkten. Daher ist B'' beschränkt ([1], Nr. 2.1.1.) sowie konvex ([4], Nr. 1.4.1.). Ist H die konvexe Hülle von B'' (vgl. [1], Nr. 2.2.1.), so gilt $H \frown K = K(p|b) \subset K(a, b)$ und es ist $H_g = B'' \smile K(p|b)$ die Begrenzung von H.

Es ist nun $a \in \underset{\sim}{K}(p|b)$; denn andernfalls existiert $K' \neq K$ ($K' \in \mathfrak{k}$) mit $a \in K'$, welche StützOCh von H und damit (wegen $B'' \subset H_g$) auch von $\underset{\sim}{B}''$ ist; und da wegen der Nicht-Beschränktheit von B zugleich $b \in K'$ sein müßte (vgl. (II)), ergibt sich ein Widerspruch mit $\underset{\sim}{B}'' \frown K = \theta$.

(VI 3) Zufolge (VI 2) ist $B'' \subset D''$, wobei D'' eines der beiden von K und $T(p)$ begrenzten, abgeschlossenen Dieder bezeichnet. Es sei D' das zu D'' komplementäre offene Dieder. Eine Umgebung A von a auf $\underset{\sim}{B}'$ liegt in D'; andererseits liegt, da p Schnittpunkt von $\underset{\sim}{B}$ mit K ist, eine Umgebung P von p auf $\underset{\sim}{B}'$ in D'' bzw. in D', je nachdem p Wendepunkt ist oder nicht. Beachtet man, daß $\underset{\sim}{B}' \cap K = 0$ ist, weil sonst POW$(B \cap K) \geq 4$ wäre, so ergibt sich: Ist p Wendepunkt, so folgt aus $A \subset D'$ und $P \subset D''$, daß $R = \underset{\sim}{B}' \cap T(p)$ Schnittpunkte enthält; dies ist aber unvereinbar damit, daß $T(p)$ Wendetangente und daß POW$(B; \mathfrak{k}) = 3$ ist. Somit ist p nicht Wendepunkt. Dann gilt $R = 0$; denn aus $R \neq 0$ folgt die Existenz mindestens eines, also (wegen $A \cup P \subset D'$) mindestens zweier Schnittpunkte von $T(p)$ mit $\underset{\sim}{B}'$ (denn außer p können keine weiteren Stützpunkte auf $T(p)$ liegen) und damit ein Widerspruch zu POW$(B; \mathfrak{k}) = 3$.

Wegen $R = 0$ ist $T(p)$ globale StützOCh von B' mit p als Stützpunkt. Da auch B'' in p global sowie $B' \cup B''$ lokal in p von $T(p)$ gestützt werden, ist $T(p)$ globale StützOCh von B (mit dem einzigen Stützpunkt p). Daher ist B beschränkt, im Widerspruch zur Annahme in (VI).

(VII) Gemäß (VI 1)–(VI 3) ist $m = 2$. Gemäß (III) existiert die AusnahmeOCh. Damit sind die Beh. (1) und (2) in Nr. 3.1. bewiesen. Die Beh. (3) ergibt sich aus der Existenz der AusnahmeOCh; denn es enthält $(B - A) \cap K(a, b)$ nur b und einen Stützpunkt, wenn A eine Umgebung von a auf B bezeichnet. Daher gibt es zu K benachbarte OCh K' mit $(B - A) \cap K' = 0$. Es ist also $B - A$ beschränkt.

Auf Grund der Beh. (1)–(3) lassen sich alle nicht beschränkten Bogen B mit POW $(B; \mathfrak{k}) = 3$ und mit genau zwei Wendepunkten angeben.

3.2. Es ist noch zu zeigen, daß die Beh. in Nr. 3.1. und damit der Satz in Nr. 2. richtig sind auch dann, wenn B nicht nur Wendepunkte, sondern auch Schnäbel und Dorne enthält.

(1) Zunächst ersetze man (nach *Juel* [5]; vgl. auch [3]) jeden Schnabel und jeden Dorn durch einen bzw. zwei Wendepunkte. Dabei wird so verfahren: Es sei q ein Schnabel oder Dorn; ferner sei $Q = B(a' | b')$ eine beliebig kleine Umgebung von q auf B mit konvexen $B(a' | q) \subset Q$ und $B(q | b') \subset Q$ derart, daß $Q \cap K(a' | b') = 0$ für das in der konvexen Hülle H von Q enthaltene $K(a' | b')$. Solche Q gibt es, und zwar können a', b' beide als differenzierbar (vgl. [1], Nr. 2.2.2.) auf B angenommen werden. Nun wird Q ersetzt durch einen Konvexbogen $C(a'|b') \subset H$, der in a' und b' bzw. die gleiche Halbtangente (bezüglich (oder in) H) wie Q besitzt (vgl. die Konstruktion in [1], Nr. 2.2.3.). Es liegt $C(a'|b')$ in dem in H enthaltenen, von $Q \cup K(a'|b')$ begrenzten Gebiet $G(Q)$. Es hat $B'(q) = (B - Q) \cup C(a'|b')$ die gleichen Endpunkte a, b wie B und statt des Schnabels bzw. Dorns q einen bzw. zwei Wendepunkte in a' oder b' bzw. in a' und in b'; außerdem hat dieser „abgerundete“ Bogen $B'(q)$ bei hinreichend kleinem Q den POW$(B'(q); \mathfrak{k}) = 3$ (vgl. [5], auch [3]).

Führt man diese Abrundung der Reihe nach für alle Schnäbel und Dorne q von B in zueinander fremden Umgebungen dieser q durch, so erhält man einen Bogen $B' = B'(a|b)$ mit lauter Wendepunkten und mit POW$(B'; \mathfrak{k}) = 3$. Da die Q beliebig klein gewählt werden können, gibt es eine Folge abgerundeter B', etwa $B'_1, B'_2, \ldots$, mit $B = \lim B'_n$, wobei $B'_n = B'_n(a|b)$ ist.

(2) Es ist $K(a,b)$ AusnahmeOCh von B. – Zum Beweis unterscheiden wir die beiden Fälle: I. Unter den B'_n sind unendlich viele nicht beschränkt. – II. (Schließlich) alle B'_n sind beschränkt.

Betr. I. *Fall.* Durch ev. Übergang zu einer Teilfolge erreicht man, daß alle B'_n nicht-beschränkt sind. Da B'_n nur Wendepunkte besitzt, ist $K = K(a|b)$ AusnahmeOCh von B'_n mit genau einem Stützpunkt s'_n; dabei kann die Existenz von $s = \lim s'_n$ (ev. vermöge Übergang zu einer Teilfolge) angenommen werden. Wegen $B = \lim B'_n \frown B$ ist $s \in B$. Es ist $s = s'_n$. Es sei nämlich $s \neq s'_n$ für ein n. Wegen $\{s\} = \underset{\sim}{B} \frown K$ ist dann $s'_n \in \underset{\sim}{B}'_n - \underset{\sim}{B}'_n \frown B$; es gibt also ein auf B singuläres $q'_n \in \underset{\sim}{B} - \{s\}$ und dazu ein $Q'_n = B(a'_n|b'_n)$ mit $q'_n \in Q'_n$ sowie ein konvexes $C'_n = C(a'_n|b'_n) \subset B'_n$ mit $s'_n \in \underset{\sim}{C}'_n$. Da s'_n Stützpunkt auf $C'_n \frown K$ ist, folgt $2 \leq$ POW$(Q'_n \frown K) \leq$ POW$(\underset{\sim}{B} \frown K)$; Widerspruch. – Somit ist $K(a,b)$ AusnahmeOCh von B und von B'_n mit s als Stützpunkt für alle n. In diesem I. Fall ist s regulärer Punkt auf B, weil $s \in B \frown B'_n$.

Betr. II. *Fall.* Hier gibt es zu B'_n ein $K_n \in \mathfrak{k}$ mit $B'_n \frown K_n = 0$. Wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{k}$ kann (ev. nach Übergang zu einer Teilfolge der B'_n) angenommen werden, daß $K = \lim K_n \in \mathfrak{k}$ existiert. Weil B nicht beschränkt ist, gilt $B \frown K \neq 0$. Wegen

$B'_n \cap K_n = 0$ kann $B \cap K$ keine Schnittpunkte enthalten*. Wegen POW$(B; \mathfrak{k}) = 3$ und der Nicht-Beschränktheit von B ist (vgl. Nr. 3.1., Bew. (II)) daher $B \cap K = \{a\} \cup \{b\} \cup \{s\}$, wobei s Stützpunkt und $K = K(a, b)$, also AusnahmeOCh für B ist.

(3) Gemäß (2) existiert (genau) ein Stützpunkt $s \in \underset{\sim}{B} \cap K(a, b)$.

(3.1.) Ist s *regulär* auf B, wie im I. Fall (vgl. oben), so bleibt eine Umgebung von s auf B bei der Abrundung unverändert. Daher besitzt B ebensoviele Wendepunkte i. w. S. wie B'_n, also genau 2. Der I. Fall ist damit erledigt. Und der II. Fall kann bei regulärem s nicht vorliegen. Denn andernfalls ist $K(a,b)$ AusnahmeOCh mit s als Stützpunkt für alle B'_n; außerdem gibt es Umgebungen $A', A'', \mathfrak{S}$ von a bzw. b bzw. s auf B derart, daß $W = A' \cup A'' \cup \mathfrak{S} \subset B \cap B'_n$ für alle n, also $0 \neq W \cap K' \subset B'_n \cap K'$ für alle n und alle K' aus einer geeigneten, von n unabhängigen Umgebung von K auf $\mathfrak{k}$ (weil B nicht beschränkt ist), im Widerspruch dazu, daß $B'_n \cap K_n = 0$ und $K = \lim K_n$ ist. –
Bei regulärem s besitzt also B genau 2 Wendepunkte i. w. S. Und es ist s regulär bzw. singulär auf B je nachdem der I. oder der II. Fall vorliegt.

(3.2.) Es sei s *Schnabel oder Dorn* von B. Um zu zeigen, daß auch jetzt B genau 2 Wendepunkte i. w. S. besitzt, verwandeln wir s vermöge einer sofort (in (3.2.1.)) anzugebenden „Abrundung" von B, die von der in Nr. 3.2., (1), benutzten verschieden ist, in einen Stützpunkt des durch die Abrundung gewonnenen Bogens B^* mit $K(a,b)$, der auf B^* regulär (also weder Schnabel noch Dorn) ist.

(3.2.1) Es sei $\{s\} = \underset{\sim}{B} \cap K(a, b)$ (gemäß (3.2.)) Schnabel oder Dorn. Mit V bzw. J sei eine vordere bzw. hintere konvexe Umgebung von s auf B bezeichnet.

Ist s Schnabel, so gilt bei geeigneter Wahl der Bezeichnung „vorn", „hinten", d. h. der Orientierung von B, und bei hinreichend kleinem J: Für jede OCh K' mit POW $(J \cap K') = 2$ ist

* Ist nämlich $t \in B \cap K$ Schnittpunkt von B mit K, so enthält auch $B'_n \cap K_n$ für schl. a. n Schnittpunkte (die zu t beliebig benachbart sind).

POW $(V \cap K') = 1$ und ebenso für jede StützOCh $T(x)$ an J in $x \in \underset{\sim}{J}$. – Ist s Dorn, so gilt Entsprechendes auch bei Änderung der Orientierung. –

Bei nachstehender Beschreibung der in (3.2.) angekündigten (zweiten) „Abrundung" wird t statt s geschrieben und $S = K(a, b)$ gesetzt.

Wir setzen $U = V \cup J$ und $B' = B - U$. Es gibt nun beliebig nahe bei t solche $t' \in \underset{\sim}{J}$, daß die OCh $K(t, t')$ und dann auch alle OCh aus einer hinreichend kleinen $\mathfrak{k}$Umgebung $\mathfrak{w}$ von $K(t, t')$ höchstens Schnittpunkte mit B' enthalten und daß die Anzahl dieser Schnittpunkte die gleiche ist für alle OCh aus $\mathfrak{w}$ (wegen der stückweisen Konvexität von B gibt es nämlich zunächst ein $K' = K(t, t')$, für welches $B' \cap K'$ höchstens Schnittpunkte enthält derart, daß diese sämtlich innere Punkte von konvexen Teilbogen von B sind; daraus folgt dann die Existenz eines $\mathfrak{w}$). Es sei $t' \in \underset{\sim}{J}$ derartig gewählt.

Es ist POW $(B' \cap K) = 0$ für jedes $K \in \mathfrak{w}$. Denn POW$(B' \cap K) =$ POW$(B \cap K) -$ POW $(U \cap K)$, wobei die linke Seite für alle $K \in \mathfrak{w}$ konstant ist; wegen POW$(U \cap K) = 3$ für passendes $K \in \mathfrak{w}$ folgt die Beh.

Es kann und soll U, also auch $B(t|t')$, als beschränkt angenommen werden; dann sei H die konvexe Hülle von $B(t|t')$ und $K(t|t')$ als beschränkt gewählt $(K(t|t') = H \cap K(t, t'))$. Man ersetze $B(t|t')$ durch einen Konvexbogen $F = F(t|t')$, der streckenfrei ist und von folgender Art: Es ist S StützOCh in t an $V \cup F$; aus POW $(F \cap K) = 2$ folgt $K \in \mathfrak{w}$ und es ist $T(x) \in \mathfrak{w}$ für jede StützOCh $T(x)$ an F in $x \in \underset{\sim}{F}$ sowie für die Tangente $T(t)$, $T(t')$ an F in t bzw. t'; ferner ist POW $((J - \underset{\sim}{B}(t|t')) \cap K) = 1$ für alle solchen K und für alle $K = T(x)$, $x \in F$, wobei dann $\underset{\sim}{V} \cap K = \underset{\sim}{V} \cap T(x) = \emptyset$.

Folgerungen. Für $U' = (U - \underset{\sim}{B}(t|t')) \cup F$ gilt: Aus POW $(F \cap K) = 2$ folgt POW $(U' \cap K) = 3$, weil $U' \cap K = (\underset{\sim}{V} \cap K) \cup ((J - \underset{\sim}{B}(t|t')) \cap K) \cup (F \cap K)$; und ebenso folgt POW$(U' \cap T(x)) = 2$ für $x \in \underset{\sim}{F}$. – Weiter ist POW$(F \cap K) = 1$ für $K \neq T(x)$, $x \in \underset{\sim}{F}$, gleichwertig mit POW$(B(t|t') \cap K) = 1$ für $K \neq T(y)$, $y \in \underset{\sim}{B}(t|t')$; denn $B(t|t') \cup F$ ist eine konvexe Kurve.

Setzt man jetzt $B'' = (B - U) \cup U' = B' \cup U'$, so ergibt sich:

$$\text{POW}(B''; \mathfrak{k}) \leq \text{POW}(B; \mathfrak{k}).$$

Bew. Für OCh K bzw. $T(x)$ mit $\text{POW}(F \frown K) = 2$ bzw. $x \in \underset{\sim}{F}$ ist $K, T(x) \in \mathfrak{w}$, d.h. $\text{POW}(B' \frown K) = 0$ bzw. $\text{POW}(B' \frown T(x)) = 0$, sowie $\text{POW}(U' \frown K) = 3$ bzw. $\text{POW}(U' \frown T(x)) = 2$. – Für OCh K' mit $\text{POW}(F \frown K') = 1$, $K' \neq T(x)$, $x \in \underset{\sim}{F}$, ist $\text{POW}(B(t|t') \frown K') = 1$, also $\text{POW}(B'' \frown K') = \text{POW}((B - U) \frown K') + \text{POW}((U - B(t|t')) \frown K') + \text{POW}(F \frown K') = \text{POW}(B \frown K')$. – Für $K'' \in \mathfrak{k}$ mit $\text{POW}(F \frown K'') = 0$ ist $\text{POW}(B'' \frown K'') = \text{POW}((B - B(t|t')) \frown K'') \leq \text{POW}(B \frown K'')$.

Außerdem gilt: *Aus* $B \frown K \neq 0$ *für ein* $K \in \mathfrak{k}$, *folgt* $B'' \frown K \neq 0$. Denn für $F \frown K = 0$ ist dies richtig; für $\text{POW}(F \frown K) = 1$ mit $K \neq T(x)$, $x \in \underset{\sim}{F}$, ist $B(t|t') \frown K \neq 0$, also $B \frown K \neq 0$; für $\text{POW}(F \frown K) = 2$ bzw. $K = T(x)$, $x \in F$, ist $(J - \underset{\sim}{B}(t|t')) \frown K \neq 0$, also wieder $B'' \frown K) \neq 0$. Schließlich ist bei hinreichend kleinem U auch $\text{POW}(B''; \mathfrak{k}) = 3$. Es gibt nämlich $M \in \mathfrak{k}$ mit $\text{POW}(B \frown M) = 3$ und mit $t \notin M$; es gibt aber $U \subset U'$ mit $\bar{U} \frown M = 0$, und für solche ist $\text{POW}(B'' \frown M) = 3$.

Ist t Dorn (und nicht Schnabel) auf B, so t Schnabel auf B''. Wendet man das obige Verfahren auf B'' und t an, so ergibt sich ein $B^* = B^*(a|b)$, welches in beliebig kleiner Umgebung von t zwei Schnäbel besitzt, zwischen denen t liegt und wobei B^* im übrigen die gleichen Eigenschaften besitzt wie B.

Ergebnis: Ist t Dorn oder Schnabel auf $B = B(a|b)$, ferner S lokale StützOCh an B in t, so gibt es Bogen $B^* = B^*(a|b)$ mit $\text{POW}(B^*; \mathfrak{k}) = 3 = \text{POW}(B; \mathfrak{k})$, welche nur in beliebig kleiner Umgebung von t von B verschieden sind, in t lokal von S gestützt werden und auf welchen t regulärer Punkt ist, in dessen beliebig kleiner Nähe auf B^* 1 bzw. 2 Schnäbel von B^* liegen; im Falle zweier solcher Schnäbel liegt t zwischen ihnen. Schließlich ist B^* nicht beschränkt, weil dies für B gilt. (Denn aus $B \frown K \neq 0$ folgt $B^* \frown K \neq 0$; es ist $B \frown K \neq 0$ für jedes $K \in \mathfrak{k}$). Insbesondere besitzt also B^* genau so viele Wendepunkte i. w. S. wie B.

(**3.2.2.**) Durch Abrundung sämtlicher Schnäbel bzw. Dorne von B^* (vgl. (3.2.1.)) (die von $s = t$ verschieden sind) nach dem in Nr. 3.2., (1), benutzten (Juelschen) Verfahren erhält man eine Folge von Bogen $B_n'' = B_n''(a|b)$, $n = 1, 2, \ldots$; mit POW $(B_n''; \mathfrak{k}) = 3$ und folgenden Eigenschaften: Jedes B_n'' besitzt nur Wendepunkte, und zwar genau so viele wie B^* Wendepunkte i. w. S. besitzt; jedes B_n'' hat $S = K(a, b)$ als AusnahmeOCh mit s als Stützpunkt, und s ist regulärer Punkt auf B_n''; es ist $B^* = \lim B_n''$. Da kein Schnabel oder Dorn von B^* auf S liegt, gibt es Umgebungen A' bzw. B' bzw. S' von s auf B^* mit $W' = A' \cup B' \cup S' \subset B^* \cap B_n''$ für schließlich alle n.

Um nun zu zeigen, daß B^* und damit auch B genau zwei Wendepunkte i. w. S. besitzt, muß also gemäß der Beh. am Beginn der Nr. 3.1. nur noch gezeigt werden, daß mindestens eines der B_n'' nicht beschränkt ist. Das ist aber (sogar für schließlich alle B_n'') der Fall. Denn andernfalls gibt es $K_n \in \mathfrak{k}$ mit $B_n'' \cap K_n = \theta$ für alle n. Wie in Nr. 3.2., (2), betr. Fall II., gezeigt, kann o. B. d. A. die Existenz von $K = \lim K_n$ angenommen werden und es ist dann $K = K(a, b)$. Andererseits gibt es, wegen $W' \subset B^* \cap B_n''$ für schließlich alle n, eine Umgebung $\mathfrak{w}$ von K in $\mathfrak{k}$ derart, daß $\theta \neq W' \cap K' \subset B_n'' \cap K'$ für schließlich jedes n und *jedes* $K' \in \mathfrak{w}$. Wegen $K = \lim K_n$ liegen aber schließlich alle K_n in $\mathfrak{w}$, im Widerspruch zu $B_n'' \cap K_n = \theta$. – Man könnte auch so schließen: Da s regulärer Punkt auf B^* ist, liegt gemäß Nr. 3.2., (3.1.), für die obigen B_n'' der I. Fall aus Nr. 3.2., (2), vor; es sind also (unendlich viele) B_n'' nicht beschränkt.

Es besitzt also B genau 2 Wendepunkte i. w. S. sobald B nicht beschränkt und POW $(B; \mathfrak{k}) = 3$ ist. Damit ist der Satz in Nr. 2. bewiesen.

Literatur

[1] Haupt, Zur Theorie der Kurven insbesondere 2. und 3. Ordnung in topologisch ebenen projektiven Ebenen. Bayer. Akad. d. Wiss. Sitz.-Ber. math.-naturw. Kl. 1962, 63–77.

[2] Haupt, Über ebene Bogen und Kurven vom Maximalindex im weiteren Sinne. Bayer. Akad. d. Wiss. Sitz.-Ber. math.-naturw. Abt. 1935, 37–70.

[3] Haupt, Über ordnungsfeste Annäherung ebener Bogen. Sitz.-Ber. Heidelberger Akad. d. Wiss. math.-naturw. Kl. 1934, 7. Abh.

[4] Haupt, Verallgemeinerung eines Satzes von Möbius. Bull. Soc. math. de Grèce, N. Ser. T. 3, 1962, 1–11.

[5] Juel, C., Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung. K. Danske Vidensk. Selksk. Srifter naturv. og mathem. Afd. 7. R. XI 2 (1914).