BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1964

MÜNCHEN 1965

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Bewegungsinvarianz des *Lebesgue*-Maßes

Von **Siegfried Guber** in Hamburg

Vorgelegt von Herrn Georg Aumann am 9. Oktober 1964

Für die Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes wurde schon verschiedentlich ein Beweis gegeben, man vergleiche etwa E. Schmidt [5], R. Schmidt [6] und W. Jurkat [4]. Besonders durchsichtig ist der von G. Aumann ([1]; [2], 8. 11. 9) geführte Beweis, dessen wesentliche Ideen im folgenden alle wieder aufgegriffen werden. Dieser von G. Aumann stammende Beweis läßt sich nämlich noch vereinfachen, wenn man den folgenden Eindeutigkeitssatz der Maßtheorie (H. Bauer [3], S. 29) heranzieht:

Eindeutigkeitssatz. *Es sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $\mathcal{E}$ sei ein $\cap$-stabiler*[1] *Erzeuger von $\mathcal{A}$, der eine Folge (E_n) von Mengen enthält mit $E_n \uparrow \Omega$. Sind dann μ und ν Maße auf $\mathcal{A}$ mit $\mu(E) = \nu(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$ und mit $\mu(E_n) < \infty$ für alle n, so gilt $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.*[2]

Dieser Eindeutigkeitssatz ist es nun, welcher, zweimal angewandt, das Gewünschte liefert. Es sei von jetzt an speziell Ω der p-dimensionale euklidische Raum $\boldsymbol{R}^p$, $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der p-dimensionalen Borelschen Mengen und μ das p-dimensionale Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathcal{A}$. Liegt in $\boldsymbol{R}^p$ irgendein orthonormiertes Koordinaten-System $\mathfrak{K}$ zugrunde, so hat die Menge $\mathcal{E}_{\mathfrak{K}}$ aller kompakten, $\mathfrak{K}$-achsenparallelen Intervalle I bezüglich des Borel-Lebesgue-Maßes μ alle Eigenschaften der Menge $\mathcal{E}$ des Eindeutigkeitssatzes.

---

[1] D. h. $\mathcal{E}$ enthält mit je zwei Mengen auch deren Durchschnitt.

[2] Dieser Satz gibt u.a. ein Beispiel für den kürzlich von G. Aumann eingeführten Begriff der Signifikanz. (Vgl. G. Aumann, Über den mathematischen Begriff der Signifikanz, Sitz. Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-Naturw. Kl. 1964).

1. Es bezeichne t_a die Translation um den Vektor $a \in \boldsymbol{R}^p$. Als stetige Abbildung ist t_a Borel-meßbar, d. h. $\mathscr{A}$-meßbar, so daß das Bildmaß $\nu := t_a(\mu)$ ein Maß auf $\mathscr{A}$ ist. Für jedes kompakte, $\mathfrak{K}$-achsenparallele Intervall $I = [b, c]$ gilt aber

$$t_a(\mu)\,([b, c]) = \mu(t_a^{-1}\,([b, c])) = \mu([b-a, c-a]) = \mu([b, c]),$$

woraus nach dem Eindeutigkeitssatz $t_a(\mu) = \mu$, d.h. die Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes folgt. (Diesen Beweis entnehmen wir [3], S. 37–38).

2. Weiter bezeichne s_H die Spiegelung an einer Hyperebene $H \subset \boldsymbol{R}^p$. $\mathfrak{K}_H$ sei ein (neues) Koordinaten-System in $\boldsymbol{R}^p$, welches H als eine Koordinaten-Hyperebene enthält (vgl. [1]; [2], 8. 11. 9). s_H ist als stetige Abbildung Borel-meßbar und somit ist $\nu := s_H(\mu)$ ein Maß auf $\mathscr{A}$. Jedes kompakte, $\mathfrak{K}_H$-achsenparallele Intervall I_H liegt in $\mathscr{A}$ und $s_H(I_H)$ ist gleich einem $\mathfrak{K}_H$-achsenparallelen Intervall, welches aus I_H durch eine Translation (senkrecht zu H) hervorgeht (vgl. [1]; [2], 8. 11. 9). Somit gilt nach 1. für edes kompakte, $\mathfrak{K}_H$-achsenparallele Intervall I_H die Beziehung $s_H(\mu)\,(I_H) = \mu(I_H)$, was aufgrund des Eindeutigkeitssatzes $s_H(\mu) = \mu$ zur Folge hat.

Also ist das Borel-Lebesgue-Maß auch invariant bezüglich Spiegelungen an Hyperebenen von $\boldsymbol{R}^p$ und somit (vgl. [1]; [2], 8. 11. 9) bewegungsinvariant, da jede Bewegung von $\boldsymbol{R}^p$ als endliche Hintereinanderschaltung solcher Spiegelungen s_H dargestellt werden kann. Es ist klar, daß damit auch die Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes nachgewiesen ist.

Literatur

[1] G. Aumann: Zur Spiegelungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes, Arch. Math. 3 (1952), 360.

[2] G. Aumann: Reelle Funktionen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.

[3] H. Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, Band I, Sammlung Göschen, Nr. 1216/1216a, Berlin 1964.

[4] W. Jurkat: Zur Bewegungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes, Math. Zeitschr. 54 (1951), 343–346.

[5] E. Schmidt: Über die Darstellung der Lehre vom Inhalt in der Integralrechnung, Math. Zeitschr. 12 (1922), 298–316.

[6] R. Schmidt: Zur Orthogonalinvarianz des Inhalts, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Nr. 7 (1950), 103–106.