

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1964

MÜNCHEN 1965

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Zur Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes

Von Siegfried Guber in Hamburg

Vorgelegt von Herrn Georg Aumann am 9. Oktober 1964

Für die Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes wurde schon verschiedentlich ein Beweis gegeben, man vergleiche etwa E. Schmidt [5], R. Schmidt [6] und W. Jurkat [4]. Besonders durchsichtig ist der von G. Aumann ([1]; [2], 8. 11. 9) geführte Beweis, dessen wesentliche Ideen im folgenden alle wieder aufgegriffen werden. Dieser von G. Aumann stammende Beweis läßt sich nämlich noch vereinfachen, wenn man den folgenden Eindeutigkeitssatz der Maßtheorie (H. Bauer [3], S. 29) heranzieht:

**Eindeutigkeitssatz.** *Es sei  $\Omega$  eine Menge,  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra in  $\Omega$  und  $\mathcal{C}$  sei ein  $\cap$ -stabiler<sup>1</sup> Erzeuger von  $\mathcal{A}$ , der eine Folge  $(E_n)$  von Mengen enthält mit  $E_n \uparrow \Omega$ . Sind dann  $\mu$  und  $\nu$  Maße auf  $\mathcal{A}$  mit  $\mu(E) = \nu(E)$  für alle  $E \in \mathcal{C}$  und mit  $\mu(E_n) < \infty$  für alle  $n$ , so gilt  $\mu(A) = \nu(A)$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ .<sup>2</sup>*

Dieser Eindeutigkeitssatz ist es nun, welcher, zweimal angewandt, das Gewünschte liefert. Es sei von jetzt an speziell  $\Omega$  der  $p$ -dimensionale euklidische Raum  $\mathbf{R}^p$ ,  $\mathcal{A}$  die  $\sigma$ -Algebra der  $p$ -dimensionalen Borelschen Mengen und  $\mu$  das  $p$ -dimensionale Borel-Lebesgue-Maß auf  $\mathcal{A}$ . Liegt in  $\mathbf{R}^p$  irgendein orthonormiertes Koordinaten-System  $\mathfrak{K}$  zugrunde, so hat die Menge  $\mathcal{C}_{\mathfrak{K}}$  aller kompakten,  $\mathfrak{K}$ -achsenparallelen Intervalle  $I$  bezüglich des Borel-Lebesgue-Maßes  $\mu$  alle Eigenschaften der Menge  $\mathcal{C}$  des Eindeutigkeitssatzes.

---

<sup>1</sup> D. h.  $\mathcal{C}$  enthält mit je zwei Mengen auch deren Durchschnitt.

<sup>2</sup> Dieser Satz gibt u. a. ein Beispiel für den kürzlich von G. Aumann eingeführten Begriff der Signifikanz. (Vgl. G. Aumann, Über den mathematischen Begriff der Signifikanz, Sitz. Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-Naturw. Kl. 1964).

1. Es bezeichne  $t_a$  die Translation um den Vektor  $a \in \mathbf{R}^p$ . Als stetige Abbildung ist  $t_a$  Borel-meßbar, d. h.  $\mathcal{A}$ -meßbar, so daß das Bildmaß  $\nu := t_a(\mu)$  ein Maß auf  $\mathcal{A}$  ist. Für jedes kompakte,  $\mathfrak{K}$ -achsenparallele Intervall  $I = [b, c]$  gilt aber

$$t_a(\mu)([b, c]) = \mu(t_a^{-1}([b, c])) = \mu([b-a, c-a]) = \mu([b, c]),$$

woraus nach dem Eindeutigkeitsatz  $t_a(\mu) = \mu$ , d. h. die Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes folgt. (Diesen Beweis entnehmen wir [3], S. 37–38).

2. Weiter bezeichne  $s_H$  die Spiegelung an einer Hyperebene  $H \subset \mathbf{R}^p$ .  $\mathfrak{K}_H$  sei ein (neues) Koordinaten-System in  $\mathbf{R}^p$ , welches  $H$  als eine Koordinaten-Hyperebene enthält (vgl. [1]; [2], 8. 11. 9).  $s_H$  ist als stetige Abbildung Borel-meßbar und somit ist  $\nu := s_H(\mu)$  ein Maß auf  $\mathcal{A}$ . Jedes kompakte,  $\mathfrak{K}_H$ -achsenparallele Intervall  $I_H$  liegt in  $\mathcal{A}$  und  $s_H(I_H)$  ist gleich einem  $\mathfrak{K}_H$ -achsenparallelen Intervall, welches aus  $I_H$  durch eine Translation (senkrecht zu  $H$ ) hervorgeht (vgl. [1]; [2], 8. 11. 9). Somit gilt nach 1. für jedes kompakte,  $\mathfrak{K}_H$ -achsenparallele Intervall  $I_H$  die Beziehung  $s_H(\mu)(I_H) = \mu(I_H)$ , was aufgrund des Eindeutigkeitsatzes  $s_H(\mu) = \mu$  zur Folge hat.

Also ist das Borel-Lebesgue-Maß auch invariant bezüglich Spiegelungen an Hyperebenen von  $\mathbf{R}^p$  und somit (vgl. [1]; [2], 8. 11. 9) bewegungsinvariant, da jede Bewegung von  $\mathbf{R}^p$  als endliche Hintereinanderschaltung solcher Spiegelungen  $s_H$  dargestellt werden kann. Es ist klar, daß damit auch die Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes nachgewiesen ist.

#### Literatur

- [1] G. Aumann: Zur Spiegelungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes, Arch. Math. 3 (1952), 360.
- [2] G. Aumann: Reelle Funktionen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
- [3] H. Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, Band I, Sammlung Göschen, Nr. 1216/1216a, Berlin 1964.
- [4] W. Jurkat: Zur Bewegungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes, Math. Zeitschr. 54 (1951), 343–346.
- [5] E. Schmidt: Über die Darstellung der Lehre vom Inhalt in der Integralrechnung, Math. Zeitschr. 12 (1922), 298–316.
- [6] R. Schmidt: Zur Orthogonalinvarianz des Inhalts, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Nr. 7 (1950), 103–106.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1965

Band/Volume: [1964](#)

Autor(en)/Author(s): Guber Siegfried

Artikel/Article: [Zur Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes 91-92](#)