BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1965

MÜNCHEN 1966

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über eine Transformation zur Linearisierung partieller Differentialgleichungen

Herrn Josef Lense zum 75. Geburtstag am 28. Oktober 1965 gewidmet

Von Robert Sauer in München

Vorgelegt am 8. Oktober 1965

Die nichtlinearen Grundgleichungen der ebenen stationären isentropischen Strömungen von Gasen bei Vernachlässigung der Viskosität, der Wärmeübertragung und äußerer Kräfte lassen sich sowohl durch die wohlbekannte Berührungstransformation von Legendre als auch durch eine wohl weniger bekannte, von P. Molenbroek (1890) und später auch von C. A. Tschapligin (1904) ad hoc eingeführte Transformation[1] linearisieren.

In der vorliegenden Note wird gezeigt, wie sich die Linearisierungsmethode von Molenbroeck und Tschapligin auf sehr viel allgemeinere Differentialgleichungssysteme anwenden läßt. Als Beispiel wird die Linearisierung der Grundgleichungen der eindimensionalen nichtstationären isentropischen Strömungen von Gasen (Ausbreitung eindimensionaler nichtlinearer Druckwellen) erörtert.

§ 1. Problem

Gegeben sind zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

$$G_j(\varphi_x, \varphi_y, \psi_x, \psi_y) = 0, \qquad j = 1, 2 \tag{1.1}$$

für zwei Funktionen φ, ψ der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y. Wir nehmen an, daß sich die Gleichungen (1.1) nach den Ableitungen einer der beiden Funktionen, etwa nach ψ_x und

[1] Vgl. z. B. Sauer, R.: Einführung in die theoretische Gasdynamik, 3. Aufl. (1960), S. 83–85, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg.

ψ_y, auflösen lassen. Dann können wir die Gln. (1.1) ersetzen durch

$$\psi_x = P(\varphi_x, \varphi_y), \quad \psi_y = Q(\varphi_x, \varphi_y) \tag{1.2}$$

und die Funktion $\psi(x, y)$ genügt, wenn die Ableitungen von P und Q nach φ_x, und φ_y stetige Funktionen von x, y sind, der Integrierbarkeitbedingung

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi_x}\varphi_{xy} + \frac{\partial P}{\partial \varphi_y}\varphi_{yy} = \frac{\partial Q}{\partial \varphi_x}\varphi_{xx} + \frac{\partial Q}{\partial \varphi_y}\varphi_{xy}, \tag{1.3}$$

also der quasilinearen und in den zweiten Ableitungen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$a\varphi_{xx} + 2b\varphi_{xy} + c\varphi_{yy} = 0. \tag{1.4}$$

Die Koeffizienten

$$a(\varphi_x, \varphi_y) := \frac{\partial Q}{\partial \varphi_x}, \quad 2b(\varphi_x, \varphi_y) := \frac{\partial Q}{\partial \varphi_y} - \frac{\partial P}{\partial \varphi_x}, \tag{1.5}$$
$$c(\varphi_x, \varphi_y) := -\frac{\partial P}{\partial \varphi_y}$$

sind Funktionen der ersten Ableitungen φ_x, φ_y der gesuchten Funktion, hängen aber von x, y und von φ nicht explizite ab.

Die Legendre-*Transformation*

$$u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y, \quad f = ux + vy - \varphi \tag{1.6}$$

verwandelt bekanntlich die nichtlineare Differentialgleichung (1.4) für die Funktion $\varphi(x, y)$ in die lineare Differentialgleichung

$$a(u, v)f_{vv} - 2b(u, v)f_{uv} + c(u, v)f_{uu} = 0 \tag{1.7}$$

für die Funktion $f(u, v)$.

Die Differentialgleichungen (1.2) lassen sich auch durch eine Transformation anderer Art transformieren. Bei dieser Transformation (– im Folgenden als *Transformation* T bezeichnet –) werden wie bei der Legendre-Transformation an Stelle von x und y als unabhängige Veränderliche

$$u = \varphi_x(x, y), \quad v = \varphi_y(x, y) \tag{1.8}$$

eingeführt (Übergang zur „*Hodographenebene*"), und es wird wie bei der Legendre-Transformation vorausgesetzt, daß in dem in Frage kommenden x, y-Bereich die Gln. (1.8) nach x, y auflösbar sind, also

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{1.9}$$

Während aber bei der Legendre-Transformation an Stelle von $\varphi(x, y)$ eine neue Funktion $f(u, v) = u\,x(u, v) + v\,y(u, v) - \varphi(x(u, v), y(u, v))$ eingeführt wird, soll bei der T-Transformation die Linearisierung an den Funktionen

$$\varphi(x(u, v), y(u, v)) = \Phi(u, v), \quad \psi(x(u, v), y(u, v)) = \Psi(u, v) \tag{1.10}$$

selbst vollzogen werden.

§ 2. Durchführung der Linearisierung mittels der T-Transformation

Aus den Gln. (1.8) und (1.2) ergeben sich die beiden Beziehungen

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy, \quad d\psi = P\,dx + Q\,dy. \tag{2.1}$$

Unter der Annahme

$$D := uQ - vP \neq 0 \tag{2.2}$$

folgt hieraus

$$D\,dx = Q\,d\varphi - v\,d\psi, \quad D\,dy = -P\,d\varphi + u\,d\psi$$

oder

$$dx = A\,d\varphi + B\,d\psi, \quad dy = A'\,d\varphi + B'\,d\psi \tag{2.3}$$

mit den Abkürzungen

$$A(u, v) := {}^{Q}/_{D}, \quad B(u, v) := -{}^{v}/_{D}, \quad A' = -{}^{P}/_{D}, \quad B' = {}^{u}/_{D}. \tag{2.4}$$

Die Integrierbarkeitsbedingungen

$$x_{uv} = x_{vu}, \quad y_{uv} = y_{vu}$$

der aus den Gln. (2.3) folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} x_u &= A\,\Phi_u + B\,\Psi_u, \quad y_u = A'\,\Phi_u + B'\,\Psi_u, \\ x_v &= A\,\Phi_v + B\,\Psi_v, \quad y_v = A'\,\Phi_v + B'\,\Psi_v \end{aligned} \tag{2.5}$$

liefern dann für $\Phi(u, v)$ und $\Psi(u, v)$ die linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} A_v\,\Phi_u + B_v\,\Psi_u - A_u\,\Phi_v - B_u\,\Psi_v &= 0, \\ A'_v\,\Phi_u + B'_v\,\Psi_u - A'_u\,\Phi_v - B'_u\,\Psi_v &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Hiermit ist die Linearisierung der Differentialgleichungen (1.2) bzw. (1.1) vollzogen.

Zu jeder Lösung $\Phi(u, v)$, $\Psi(u, v)$ der linearen Gln. (2.6) erhält man aus den Gln. (2.5) lediglich durch Quadraturen

$$x = x\,(u, v) \quad \text{und} \quad y = y\,(u, v),$$

womit dann auch, falls die erforderlichen Eliminationsprozesse ausführbar sind, φ und ψ als Funktionen von x und y bestimmt sind.

Bei Voraussetzung hinreichender Eliminations- und Differenzierbarkeitsbedingungen liefern die Gleichungen (2.6) vermöge der Integrierbarkeitsbedingungen

$$\Phi_{uv} = \Phi_{vu}, \quad \Psi_{uv} = \Psi_{vu}$$

für Φ und ebenso für Ψ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \alpha(u, v)\,\Phi_{uu} + 2\beta(u, v)\,\Phi_{uv} + \gamma(u, v)\,\Phi_{vv} + \\ + 2\sigma(u, v)\,\Phi_u + 2\tau(u, v)\,\Phi_v = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \bar\alpha(u, v)\,\Psi_{uu} + 2\bar\beta(u, v)\,\Psi_{uv} + \bar\gamma(u, v)\,\Psi_{vv} + \\ + 2\bar\sigma(u, v)\,\Psi_u + 2\bar\tau(u, v)\,\Psi_v = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Durch geeignete Koordinatentransformationen in der u, v-Ebene

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \tag{2.9}$$

läßt sich Gl. (2.7) auf die Normalform

$$\alpha^*(\xi, \eta)\, \Phi^*_{\xi\xi} + \gamma^*(\xi, \eta)\, \Phi^*_{\eta\eta} + \varrho^*(\xi, \eta)\, \Phi^*_{\xi} + \\ + \sigma^*(\xi, \eta)\, \Phi^*_{\eta} = 0 \tag{2.10}$$

bringen, wobei

$$\Phi^*(\xi, \eta) = \Phi\big(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)\big) \tag{2.11}$$

gesetzt ist. Analoges gilt für Gl. (2.8) mit

$$\Psi^*(\xi, \eta) = \Psi\big(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)\big). \tag{2.12}$$

Hierbei ist

$$\alpha^* \gamma^* \gtreqless 0, \tag{2.13}$$

wenn Gl. (2.10) vom *elliptischen* bzw. *parabolischen* bzw. *hyperbolischen Typus* ist. Die Gln. (2.6) nehmen im elliptischen und hyperbolischen Fall bei Verwendung der neuen Veränderlichen ξ, η die Normalform an

$$\Psi^*_{\xi} = R(\xi, \eta)\, \Phi^*_{\eta}, \quad \Psi^*_{\eta} = S(\xi, \eta)\, \Phi^*_{\xi}. \tag{2.14}$$

Man kann diese Gleichungen als Verallgemeinerung der Cauchy-Riemann-*Differentialgleichungen* betrachten, die sich ergeben würden, wenn Gl. (2.10) sich auf die Potentialgleichung $\Phi^*_{\xi\xi} + \Phi^*_{\eta\eta} = 0$ reduzieren würde.

Ist die Differentialgleichung (2.10) vom hyperbolischen Typus, dann kann man die Koordinatentransformation, Gln. (2.9), auch so wählen, daß $\xi = \text{const}$ und $\eta = \text{const}$ die Gleichungen der *charakteristischen Kurven* sind. Dann tritt an Stelle der Gl. (2.10) die Normalform

$$2\beta^*(\xi, \eta)\, \Phi^*_{\xi\eta} + \mu^*(\xi, \eta)\, \Phi^*_{\xi} + \nu^*(\xi, \eta)\, \Phi^*_{\eta} = 0 \tag{2.15}$$

und an Stelle der Gln. (2.14) erhält man die Normalform

$$\Psi^*_\xi = M(\xi, \eta)\, \Phi^*_\xi, \quad \Psi^*_\eta = N(\xi, \eta)\, \Phi^*_\eta. \tag{2.16}$$

In den folgenden beiden Paragraphen erläutern wir die hier eingeführte T-Transformation durch zwei Beispiele aus der *Gasdynamik* (= Strömungslehre kompressibler Medien).

§ 3. Ebene stationäre Gasströmungen

Wir betrachten eine *stationäre zweidimensionale Strömung* eines Gases und vernachlässigen die Viskosität, die Wärmeübertragung und äußere Kräfte. Die Strömung sei wirbelfrei, woraus sich ergibt, daß die Zustandsänderungen des Gases isentropisch sind. Dann ist die Dichte ϱ eine Funktion des Druckes p und $a = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}$ ist die Schallgeschwindigkeit. Aus dem Energiesatz (*Gleichung von* Bernoulli)

$$w\,dw + \frac{dp}{\varrho} = 0, \tag{3.1}$$

wobei w der Betrag der Strömungsgeschwindigkeit ist, und der Zustandsgleichung $\varrho = \varrho(p)$ folgt, daß p, ϱ und a durch die Natur des Gases festgelegte Funktionen von w sind.

Sind u und v die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit ($w^2 = u^2 + v^2$), dann kann man ein *Geschwindigkeitspotential* $\varphi(x, y)$ und eine *Stromfunktion* $\psi(x, y)$ definieren durch[2]

$$\varphi_x = u, \quad \varphi_y = v, \quad \psi_x = -\varrho v, \quad \psi_y = \varrho u. \tag{3.2}$$

Die Gln. (1.2) spezialisieren sich daher zu

$$\psi_x = -\varrho\varphi_y, \quad \psi_y = \varrho\varphi_x \quad \text{mit} \quad \varrho = \varrho(w) = \varrho\left(\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}\right). \tag{3.3}$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe der Integrierbarkeitsbedingung (1.3) für das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y)$ nach elementaren Um-

[2] Vgl. z. B. das in Fußnote 1 zitierte Werk, § 13.

formungen die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(u^2 - a^2)\,\varphi_{xx} - 2uv\varphi_{xy} + (v^2 - a^2)\,\varphi_{yy} = 0. \tag{3.4}$$

Die Koeffizienten sind Funktionen von φ_x und φ_y wegen $u = \varphi_x$, $v = \varphi_y$, $a = a(w) = a\left(\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}\right)$.

Bei der Durchführung der T-Transformation nach § 2 benützen wir statt der Cartesischen Geschwindigkeitskoordinaten u, v die Polarkoordinaten $w = \sqrt{u^2 + v^2}$, $\vartheta = \operatorname{arc\,tan}\,(v/u)$. Wir werden sogleich sehen, daß die w, ϑ die Rolle der in den Gln. (2.9) eingeführten ξ, η spielen, daß nämlich bei ihrer Verwendung die T-Transformation auf die in den Glm. (2.14) und (2.10) angegebenen Normalformen führt.

Wir verfahren nach § 2 und erhalten an Stelle der Gln. (2.1) und (2.3)

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy, \quad d\psi = -\varrho(v\,dx - u\,dy), \tag{3.5}$$

$$\varrho w^2 dx = \varrho u\,d\varphi - v\,d\psi, \quad \varrho w^2 dy = \varrho v\,d\varphi + u\,d\psi. \tag{3.6}$$

Setzt man dann entsprechend den Gln. (2.11) und (2.12)

$$\begin{aligned} \varphi(x(w,\vartheta),\, y(w,\vartheta)) &= \Phi^*\,(w,\vartheta),\\ \psi(x(w,\vartheta),\, y(w,\vartheta)) &= \Psi^*(w,\vartheta), \end{aligned} \tag{3.7}$$

dann erhält man statt der Gln. (2.5)

(3.8)

$$x_w = \frac{1}{\varrho w^2}\,(\varrho u\,\Phi_w^* - v\,\Psi_w^*) = \frac{1}{w}\left(\cos\vartheta\;\Phi_w^* - \frac{1}{\varrho}\sin\vartheta\;\Psi_w^*\right),$$

$$y_w = \frac{1}{\varrho w^2}\,(\varrho v\Phi_w^* + u\;\Psi_w^*) = \frac{1}{w}\left(\sin\vartheta\;\Phi_w^* + \frac{1}{\varrho}\cos\vartheta\;\Psi_w^*\right)$$

und

$$\begin{aligned} x_\vartheta &= \frac{1}{w}\left(\cos\vartheta\;\Phi_\vartheta^* - \frac{1}{\varrho}\sin\vartheta\;\Psi_\vartheta^*\right),\\ y_\vartheta &= \frac{1}{w}\left(\sin\vartheta\;\Phi_\vartheta^* + \frac{1}{\varrho}\cos\vartheta\;\Psi_\vartheta^*\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Die Integrierbarkeitsbedingungen

$$x_{w\vartheta} = x_{\vartheta w}, \quad y_{w\vartheta} = y_{\vartheta w}$$

liefern hierauf nach elementaren Umformungen die den Gln. (2.14) entsprechenden Beziehungen in der Normalform

$$(3.10)\qquad \Phi_w^* = \frac{1}{\varrho w}\left(\frac{w^2}{a^2} - 1\right)\Psi_\vartheta^*, \quad \Phi_\vartheta^* = \frac{w}{\varrho}\Psi_\vartheta^*.$$

Mit Hilfe der Integrierbarkeitsbedingungen

$$\Psi_{w\vartheta}^* = \Psi_{\vartheta w}^*, \quad \Phi_{w\vartheta}^* = \Phi_{\vartheta w}^*$$

ergeben sich der Gl. (2.10) entsprechende lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, nämlich

$$(3.11)\qquad \left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right)\left[w^2 \Phi_{ww}^* + \left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right)\Phi_{\vartheta\vartheta}^*\right] + \\ + w\left[1 - \frac{w^4}{a^4} - 2\frac{w^3}{a^3}\frac{da}{dw}\right]\Phi_w^* = 0,$$

$$(3.12)\qquad w^2\Psi_{ww}^* + \left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right)\Psi_{\vartheta\vartheta}^* + w\left(1 + \frac{w^2}{a^2}\right)\Psi_\vartheta^* = 0.$$

Diese Gleichungen sind bei $\frac{w}{a} \lesseqgtr 0$, d. h. wenn die Strömungsgeschwindigkeit w kleiner, gleich oder größer als die Schallgeschwindigkeit a ist (*Unterschallströmungen*, *Schalldurchgang*, *Überschallströmungen*) vom elliptischen bzw. parabolischen bzw. hyperbolischen Typus.

Die hier benützte T-Transformation wurde, wie bereits in der Einleitung[3] erwähnt wurde, schon von Molenbroek und Tschapligin eingeführt.

§ 4. Eindimensionale nichtstationäre Gasströmungen

Wir betrachten jetzt eine *nichtstationäre eindimensionale Strömung* eines Gases oder, was dasselbe ist, die Ausbreitung eindimensionaler Druckwellen in Gasen. Bekanntlich hat sich mit diesem Problem bereits Riemann beschäftigt und bei dieser Gelegenheit das später als Riemann*sche Integrationstheorie* bezeichnete *Charakteristikenverfahren*[4] entwickelt.

[3] Vgl. Fußnote 1.

[4] Vgl. z. B. Sauer, R.: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, 2. Aufl. (1958), § 29, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.

Unter denselben Voraussetzungen wie in § 3 (Vernachlässigung der Viskosität usw., isentropische Zustandsänderungen) existiert ein *Geschwindigkeitspotential* $\varphi(x, t)$ und eine *Stromfunktion* $\psi(x, t)$, wobei jetzt die eindimensionale Ortskoordinate x und die Zeit t die unabhängigen Veränderlichen sind. Dann ist[5]

$$(4.1) \qquad \varphi_x = u, \quad \varphi_t = q, \quad \psi_x = \varrho, \quad \psi_t = -u\varrho$$

mit

$$(4.2) \qquad dq = -u\,du - \frac{dp}{\varrho}, \quad \text{also } q = -\frac{u^2}{2} - \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho(p)};$$

u ist die Strömungsgeschwindigkeit, $|u| = w$ ihr Betrag, p_0 ein beliebiger Bezugswert. Auf Grund der Gln. (4.1) und (4.2) sind

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho(p)} \text{ und demnach auch } p, \varrho \text{ und } a$$

Funktionen von $q + \frac{u^2}{2} = \varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_x^2$, also $p = p(\varphi_x, \varphi_t)$, $\varrho = \varrho(\varphi_x, \varphi_t)$ und $a = a(\varphi_x, \varphi_t)$.

Aus den Gln. (4.1) erhält man sofort die den Gln. (1.2) entsprechenden Gleichungen

$$(4.3) \qquad \psi_x = \varrho(\varphi_x, \varphi_t), \quad \psi_t = -\varphi_x \varrho(\varphi_x, \varphi_t).$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Integrierbarkeitsbedingung (1.3) die Differentialgleichung zweiter Ordnung.

$$(4.4) \qquad (a^2 - u^2)\varphi_{xx} - 2u\varphi_{xt} - \varphi_{tt} = 0.$$

Die Koeffizienten sind nach dem Vorangehenden Funktionen von φ_x und φ_t und sind wie in § 3 durch die Natur des Gases festgelegt.

---

[5] Vgl. z. B. Sauer, R.: Ecoulements des fluides compressibles (1951), S. 31/32 und § 16, Verlag Béranger, Paris-Liège.

An Stelle der Gln. (2.1) und (2.3) kommt

$$(4.5)\qquad d\varphi = u\,dx + q\,dt, \quad d\psi = \varrho(dx - u\,dt),$$

$$(4.6)\qquad \varrho\cdot(u^2+q)\,dx = \varrho u\,d\varphi + q\,d\psi, \quad \varrho\cdot(u^2+q)\,dt = \varrho\,d\varphi - u\,d\psi.$$

Vor der Durchführung der T-Transformation gehen wir nun von den unabhängigen Veränderlichen u, q zu neuen Veränderlichen ξ, η über mittels

$$(4.7)\qquad \left.\begin{matrix} 2\,\xi \\ 2\,\eta \end{matrix}\right\} = \pm u + \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{a\varrho}.$$

ξ, η sind „*charakteristische Parameter*" im Sinne der Charakteristikentheorie für partielle Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus,[6] d. h. $\xi = \text{const}$ und $\eta = \text{const}$ sind die Gleichungen der Charakteristiken in der u, q-Ebene. Demgemäß wird die T-Transformation auf die in den Gln. (2.16) und (2.15) angegebene Normalform führen:

Auf Grund der Gln. (4.7) und mit Berücksichtigung der Tatsache, daß p, ϱ, a und demnach auch $\int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho}$ Funktionen von $\int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{a\varrho}$ sind, ergibt sich

$$(4.8)\qquad u = \xi - \eta, \quad \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{a\varrho} = \xi + \eta,$$

$$q = -\frac{u^2}{2} - \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho} = -\frac{(\xi - n)^2}{2} - \omega(\xi+\eta),$$

$$p = p(\xi+\eta), \quad \varrho = \varrho(\xi+\eta), \quad a = a(\xi+\eta),$$

wobei die Funktionen ω, p, ϱ und a von $\xi + \eta$ wieder durch die Natur des Gases festgelegt sind.

Entsprechend den Gln. (2.11) und (2.12) setzen wir

---

[6] Vgl. z. B. das in Fußnote 4 zitierte Werk, S. 112.

$$\varphi(x(u, q),\ t(u, q)) = \Phi^*(\xi, \eta),\qquad (4.9)$$
$$\psi(x(u, q),\ t(u, q)) = \Psi^*(\xi, \eta)$$

und erhalten dann statt der Gln. (2.5)

(4.10)
$$x_\xi = \frac{1}{\varrho\cdot(u^2+q)}(\varrho u \Phi^*_\xi + q\Psi^*_\xi),\ x_\eta = \frac{1}{\varrho\cdot(u^2+q)}(\varrho u \Phi^*_\eta + q\Psi^*_\eta)$$
$$t_\xi = \frac{1}{\varrho\cdot(u^2+q)}(\varrho\Phi^*_\xi - u\Psi^*_\xi),\quad t_\eta = \frac{1}{\varrho\cdot(u^2+q)}(\varrho\Phi^*_\eta - u\Psi^*_\eta).$$

Eine zwar elementare, aber ziemlich langwierige Rechnung liefert hernach auf Grund der Integrierbarkeitsbedingungen

$$x_{\xi\eta} = x_{\eta\xi},\quad t_{\xi\eta} = t_{\eta\xi}$$

die den Gln. (2.16) entsprechenden Beziehungen

$$\begin{aligned}\Psi^*_\xi &= M(\xi,\eta)\,\Phi^*_\xi,\\ \Psi^*_\eta &= N(\xi,\eta)\,\Phi^*_\eta,\end{aligned}\quad \text{mit}\quad \left.\begin{matrix}M\\ N\end{matrix}\right\} = \mp\frac{a\varrho}{q+u(u\mp a)}\qquad (4.11)$$

und die der Gl. (2.15) entsprechenden linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(M-N)\,\Phi^*_{\xi\eta} + M_\eta\,\Phi^*_\xi - N_\xi\,\Phi^*_\eta = 0,\qquad (4.12)$$

$$\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right)\psi^*_{\xi\eta} - {}^{M_\eta}/_{M^2}\,\Psi^*_\xi + {}^{N_\xi}/_{N^2}\,\Psi^*_\eta = 0.\qquad (4.13)$$

Riemann hat in seiner oben zitierten Arbeit (vgl. Fußnote 4) nicht diese Differentialgleichungen benützt, sondern eine aus Gl. (4.4) durch Legendre-Transformation entstehende Differentialgleichung. Außerdem beschränkte er sich auf spezielle Gase, nämlich auf ideale Gase mit konstanten spezifischen Wärmen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1966

Band/Volume: 1965

Autor(en)/Author(s): Sauer Robert

Artikel/Article: Über eine Transformation zur Linearisierung partieller Differentialgleichungen 87-97