BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1965

MÜNCHEN 1966

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Ein allgemeiner Entwicklungssatz für die Lösungen der Differentialgleichung $(1+\varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1)w = 0$ in der Nähe isolierter Singularitäten

Von Karl Wilhelm Bauer und Ernst Peschl in Bonn

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 8. Oktober 1965

Inhaltsübersicht

1. Einleitung 113
2. Komplexwertige Lösungen 117
3. Reellwertige Lösungen 135
Literaturhinweise 146

1. Einleitung

Die Differentialgleichung

$$(1)\quad (1+\varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1)\,w = 0,\quad n \in \mathbf{N},^1\ \varepsilon = \pm 1,$$

steht in enger Beziehung zur Potentialgleichung und zur Wellengleichung für drei bzw. zwei Raumdimensionen. Man erhält sie durch Übergang zu räumlichen Polar- bzw. Hyperbelkoordinaten und anschließende Separation (vgl. [1] und [4]).

Nach einem in [1] entwickelten Verfahren lassen sich alle Lösungen der Differentialgleichung (1), die in einfach zusammenhängenden Gebieten[2] G der Riemannschen Zahlenkugel ($\varepsilon = +1$) bzw. des Einheitskreises ($\varepsilon = -1$) definiert sind, unter Verwendung von zwei in G holomorphen Funktionen und deren Ableitungen bis zur Ordnung n angeben. Der entsprechende Satz

[1] Mit $\mathbf{N}$ wird die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet.

[2] Im Falle $\varepsilon = +1$ bezeichnet G stets ein endliches Teilgebiet der Riemannschen Zahlenkugel E^*, wenn das Gegenteil nicht besonders betont wird.

lautet (vgl. [1], Satz 1 und 6), wenn man zur Vereinfachung der Schreibweise den folgenden linear homogenen Operator

$$\underset{z}{E}(g(z)) = (Eg)(z) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \bar{\tau}^{n-\nu} g^{(\nu)}(z), \quad g(z) \text{ holomorph},$$

$$A_\nu = (-\varepsilon)^{n-\nu} \frac{(2n-\nu)!}{\nu!\,(n-\nu)!}, \qquad \tau = \frac{z}{1+\varepsilon z \bar{z}},$$

verwendet:

Satz I

a) Zu jeder in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G definierten (komplexwertigen) Lösung der Differentialgleichung (1) gibt es in G holomorphe Funktionen $g(z)$ und $h(z)$, so daß

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eh)(z)}. \tag{2}$$

b) Andererseits stellt (2) für jedes Paar von in G holomorphen Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ eine Lösung der Differentialgleichung (1) dar.

c) Bei vorgegebener Lösung $w = w(z, \bar{z})$ sind die Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ bis auf ein Polynom $P(z)$ vom Grade $2n$ in z bestimmt. Das allgemeinste Paar $\tilde{g}(z)$ und $\tilde{h}(z)$ ergibt sich aus

$$\tilde{g}(z) = g(z) + P(z), \quad \tilde{h}(z) = h(z) - (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{P\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}. \tag{3}$$

Benennt man die in [1], Satz 1 und 6, vorkommenden Funktionen $g(z)$, $h(\bar{z})$ in $g_1(z)$, $h_1(\bar{z})$ um, so besteht mit den hier verwendeten Funktionen der Zusammenhang

$$g(z) = g_1(z), \quad h(z) = \overline{h_1(\bar{z})}.$$

Darüber hinaus wurde in [1] gezeigt, daß sich jede reellwertige Lösung von (1) mit Hilfe einer holomorphen Funktion $g(z)$ (und deren Ableitungen bis zur Ordnung n) allein darstellen läßt (vgl. [1], Satz 4 und 9). Hier gilt der

Satz II

a) Zu jeder in G definierten reellwertigen Lösung der Differentialgleichung (1) gibt es in G holomorphe Funktionen $g(z)$, so daß

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eg)(z)}. \tag{4}$$

b) Andererseits stellt (4) für jede in G holomorphe Funktion $g(z)$ eine reellwertige Lösung der Differentialgleichung (1) dar.

Für die auf der ganzen Zahlenkugel ($\varepsilon = +1$) definierten reellwertigen Lösungen (vgl. [1], Satz 5) gilt außerdem der folgende

Satz III

Zu jeder auf der ganzen Riemannschen Zahlenkugel definierten reellwertigen Lösung der Differentialgleichung

$$(1 + z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + n(n+1)w = 0, \quad n \in \mathbf{N},$$

gibt es $n+1$ komplexwertige[1] *Konstanten c_μ, $\mu = 0, 1, \ldots, n$, so daß*

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eg)(z)} \text{ mit } g(z) = \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu z^\mu. \tag{5}$$

Andererseits stellt (5) bei beliebiger Wahl der Konstanten c_μ eine reellwertige Lösung der Differentialgleichung auf der ganzen Kugel dar.

Die in den Lösungen auftretenden Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ werden als ein „Erzeugenden-Paar" oder als „Erzeugende" bezeichnet. Außerdem erweist es sich als zweckmäßig, die Lösungen der Differentialgleichung (1) in gewisse Klassen einzuteilen; und zwar verwenden wir die nachstehenden Bezeichnungen, wobei G jetzt nicht notwendig einfach zusammenhängend zu sein braucht:

1. $\mathfrak{F}^\varepsilon(G)$ sei die Menge aller in G definierten Lösungen w von (1),

[1] Der Operator E bewirkt, daß in die beliebige Lösung w $2n+1$ unabhängige reelle Parameter eingehen.

2. $\mathfrak{F}_h^e(G)$ sei die Menge aller in G definierten Lösungen w von (1), die sich in der Umgebung jedes Punktes von G mit Hilfe einer einzigen dort holomorphen Funktion $g(z)$ erzeugen lassen:

$$w = (Eg)(z).^1$$

3. $\mathfrak{F}_r^e(G)$ sei die Menge aller reellwertigen Funktionen $w \in \mathfrak{F}^e(G)$.

Dann gilt

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{F}_h^e(G)\\ \mathfrak{F}_r^e(G)\end{matrix}\right\} \subset \mathfrak{F}^e(G).$$

Wir weisen besonders darauf hin, daß damit auch jede Funktion w deren Erzeugende $h(z)$ lediglich ein Polynom vom Grade $k \leq 2n$ ist, als eine Funktion der Klasse $\mathfrak{F}_h^e(G)$ betrachtet werden kann. Nach Satz I, c kann jede solche Lösung, wenn man zur Erzeugenden $g(z)$ ein geeignetes Polynom vom Grade $2n$ hinzufügt, auch ohne Verwendung der Erzeugenden $h(z)$ dargestellt werden.

Ist eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G definierte Lösung w von (1) vorgegeben, so lassen sich die $(2n+1)$ten Ableitungen der Erzeugenden $g(z)$ und $h(z)$ mit Hilfe des Operators

$$D_\varepsilon = (1+\varepsilon z\bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial z} \tag{6}$$

eindeutig bestimmen. Liegt eine Lösung w der Klasse $\mathfrak{F}_h^e(G)$ vor, so läßt sich die Erzeugende $g(z)$ unmittelbar mit Hilfe des Operators D_ε bestimmen (vgl. [1], Beweis zu Satz 1 und 6). Hier gilt der

---

[1] In [2] wurde eine der Differentialgleichung (1) zugeordnete Funktionentheorie entwickelt. Dabei zeigt es sich, daß die in der Klasse $\mathfrak{F}_h^e(G)$ zusammengefaßten Lösungen von (1) ein Analogon zu den in G holomorphen Funktionen der klassischen Funktionentheorie darstellen.

Satz IV

Ist eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G definierte Lösung $w \in \mathfrak{F}^{\varepsilon}(G)$ vorgegeben, so sind die $(2n+1)$ten Ableitungen der Erzeugenden $g(z)$ und $h(z)$ eindeutig bestimmt und es gilt:

$$g^{(2n+1)}(z) = \frac{D_{\varepsilon}^{n+1} w}{(1+\varepsilon z\bar{z})^{2n+2}}, \tag{7}$$

$$h^{(2n+1)}(z) = \frac{D_{\varepsilon}^{n+1} \overline{w}}{(1+\varepsilon z\bar{z})^{2n+2}}. \tag{8}$$

Für die Lösungen $w \in \mathfrak{F}_h^{\varepsilon}(G)$ gilt darüber hinaus:

$$g(z) = \frac{(-\varepsilon)^n}{(2n)!}\,\overline{(D_{\varepsilon}^{n}\,\overline{w})}^{1}. \tag{9}$$

Corollar

Wegen der Gleichungen (7) und (8) sind die $(2n+1)$ten Ableitungen der Erzeugenden für eine in einem beliebigen (eventuell auch nicht einfach zusammenhängenden) Gebiet G definierte eindeutige Lösung w von (1) in jedem Punkt von G eindeutig bestimmt und stellen daher in G (global) eindeutige holomorphe Funktionen dar.

2. Komplexwertige Lösungen

Wir betrachten zunächst eine in einem Kreisring $R: 0 \leq \varrho_1 < |z-z_0| < \varrho_2$ definierte und dort eindeutige Lösung w der Differentialgleichung (1). Dann sind die $(2n+1)$ten Ableitungen der Erzeugenden eindeutige holomorphe Funktionen in R und lassen sich um den Punkt z_0 in Laurentreihen

$$g^{(2n+1)}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_{\lambda}(z-z_0)^{\lambda}, \quad h^{(2n+1)}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{b}_{\lambda}(z-z_0)^{\lambda}$$

[1] Hieraus ergibt sich, daß die Lösungen $w \in \mathfrak{F}_h^{\varepsilon}(G)$ durch die Gleichung $D_{\varepsilon}^{n+1}\,\overline{w} = 0$ charakterisiert werden.

entwickeln. Durch unbestimmte Integration erhält man sodann unter Verwendung von

$$\int (z-z_0)^m \log(z-z_0)\,dz = \frac{(z-z_0)^{m+1}}{m+1}\log(z-z_0) - \frac{(z-z_0)^{m+1}}{(m+1)^2},$$

$$m = 0 \text{ bzw. } m \in \mathbf{N},$$

(10)

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\lambda (z-z_0)^\lambda + S_1(z)\cdot\log(z-z_0) \text{ mit } S_1(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} c_\mu z^\mu$$

und

(11)

$$h(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_\lambda (z-z_0)^\lambda + S_2(z)\cdot\log(z-z_0) \text{ mit } S_2(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} d_\mu z^\mu.$$

Wir untersuchen nun, welchen Bedingungen die Polynome $S_1(z)$ und $S_2(z)$ genügen müssen, damit die durch (10) und (11) erzeugten Lösungen $w \in \mathfrak{F}^e(G)$ in R eindeutig sind. Aus

$$\underset{z}{E}\left(S_j(z)\cdot\log(z-z_0)\right) = \log(z-z_0)\cdot(E\,S_j)(z) + \Sigma_{(j)}$$

mit

$$\Sigma_{(j)} = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \bar{\tau}^{n-\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} S_j^{(\nu-\mu)}(z)\,\frac{(\mu-1)!\,(-1)^{\mu-1}}{(z-z_0)^\mu}, \quad j = 1, 2,$$

folgt, wenn man noch

$$\log(z-z_0) = \log r + i\varphi$$

setzt,

(12)

$$w = \underset{z}{E}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\lambda (z-z_0)^\lambda\right) + \underset{z}{E}\left(\overline{\sum_{-\infty}^{+\infty} b_\lambda (z-z_0)^\lambda}\right) + \Sigma_{(1)} + \overline{\Sigma_{(2)}}$$
$$+ \log r\left\{(E\,S_1)(z) + \overline{(E\,S_2)(z)}\right\} + i\varphi\left\{(E\,S_1)(z) - \overline{(E\,S_2)(z)}\right\}$$

und damit die Bedingung

$$(13) \qquad (E S_1)(z) - \overline{(E S_2)(z)} = 0.$$

Die Funktion

$$\overline{w_1} = (E S_1)(z) - \overline{(E S_2)(z)} = (E S_1)(z) + \overline{(E(-S_2))(z)}$$

stellt jedoch eine Lösung der Klasse $\mathfrak{F}^{\varepsilon}(G)$ dar, die in der gesamten Kreisscheibe $K: |z-z_0| < \varrho_2$ definiert ist. Nach Satz I, c erhält man die gleiche Lösung, wenn man $S_1(z)$ durch

$$\tilde{S}_1(z) = S_1(z) + P(z)$$

und $-S_2(z)$ durch

$$(14) \qquad \tilde{S}_2(z) = -S_2(z) - (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{P\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}$$

ersetzt. Wählt man nun

$$(15) \qquad P(z) = -S_1(z),$$

so folgt

$$\tilde{S}_1(z) = 0 \text{ und } w_1 = (E\tilde{S}_2)(z) = 0.$$

Mit

$$w_1 = (E\tilde{S}_2)(z)$$

liegt aber eine Lösung der Klasse $\mathfrak{F}^{\varepsilon}_h(G)$ vor, deren Erzeugende nach Satz IV, Gleichung (9), eindeutig durch

$$\tilde{\tilde{S}}_2(z) = \frac{(-\varepsilon)^n}{(2n)!} \overline{(D^n_{\varepsilon} \overline{w_1})}$$

bestimmt ist. Also folgt

$$\tilde{S}_2(z) = 0$$

und unter Berücksichtigung von (14)

$$(16) \qquad S_2(z) = (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S_1\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}.$$

Setzt man nun $S_1(z) = S(z)$ und beachtet noch (12) und (13), so erhält man den folgenden

Satz 1

Jede im Kreisring $R: \varrho_1 < |z-z_0| < \varrho_2$, $\varrho_1 \geq 0$, *definierte und eindeutige Lösung der Differentialgleichung*

$$(1+\varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1)w = 0,\ n \in \mathbf{N},\ \varepsilon = \pm 1,$$

läßt sich in R *gemäß*

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eh)(z)}$$

mit den Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S(z) \cdot \log(z-z_0), \tag{17}$$

$$h(z) = h_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} \cdot \log(z-z_0) \tag{18}$$

darstellen, wobei $g_1(z)$ *und* $h_1(z)$ *in* R *holomorph und eindeutig sind und* $S(z)$ *ein beliebiges Polynom vom Grade* $2n$ *in* z *darstellt. Setzt man für* $g_1(z)$ *und* $h_1(z)$ *die entsprechenden Laurentreihen ein und beachtet den linear homogenen Charakter des Operators* E, *so ergibt sich hieraus eine allgemeine Darstellung der Form*

$$\begin{aligned} w = {} & \underset{z}{E}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\lambda (z-z_0)^\lambda\right) + \overline{\underset{z}{E}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} b_\lambda (z-z_0)^\lambda\right)} \\ & + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \bar{\tau}^{n-\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} S^{(\nu-\mu)}(z) \frac{(\mu-1)!\,(-1)^{\mu-1}}{(z-z_0)^\mu} \\ & + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \tau^{n-\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (-\varepsilon)^n \overline{\left(z^{2n} S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)\right)^{(\nu-\mu)}} \frac{(\mu-1)!\,(-1)^{\mu-1}}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^\mu} \\ & + 2\log|z-z_0| \cdot (ES)(z). \end{aligned} \tag{19}$$

Dieser Satz enthält einige wichtige Spezialfälle. Mit

$$h^{(2n+1)}(z) \equiv 0$$

folgt sofort

$$S(z) \equiv 0.$$

Man erhält dieses Ergebnis auch unmittelbar, wenn man Satz IV, Gleichung (9), berücksichtigt. Damit gilt für die Lösungen der Differentialgleichung (1), die sich mit einer holomorphen Erzeugenden $g(z)$ allein darstellen lassen, der folgende

Satz 2

Jede im Kreisring $R: \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2$, $\varrho_1 \geq 0$, *definierte und eindeutige Lösung* $w \in \mathfrak{F}_h^\varepsilon(R)$ *der Differentialgleichung*

$$(1 + \varepsilon z \bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

läßt sich mit einer in R *holomorphen und eindeutigen Erzeugenden*

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\lambda (z - z_0)^\lambda$$

darstellen.

Insbesondere ergibt sich für den Fall, daß der Kreisring in eine punktierte Kreisscheibe entartet, der folgende wichtige Darstellungssatz:

Satz 3

Eine komplexwertige Lösung w *von (1) habe in* $z = z_0$ *eine isolierte Singularität, d. h. die komplexwertige Funktion* w *sei in einer punktierten Umgebung* $K: 0 < |z - z_0| < \varrho$ *als eindeutige Funktion definiert und dort Lösung der Differentialgleichung*

$$(1 + \varepsilon z \bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Dann läßt sich w *in* K *gemäß*

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eh)(z)}$$

darstellen, wobei die Erzeugenden $g(z)$ *und* $h(z)$ *den in Satz 1 genannten Bedingungen genügen.*

Im Falle der in der punktierten Umgebung $\dot{U}_\varrho(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < \varrho\}$ von z_0 eindeutigen Lösung $w \in \mathfrak{F}_h^\varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_0))$ ist damit die Möglichkeit einer Klassifizierung der isolierten Singularitäten wie in der klassischen Funktionentheorie gegeben (vgl. [2]).

Darüber hinaus lassen sich über die Gestalt der in einer Umgebung $\dot{U}_\varrho(z_0)$ definierten und eindeutigen Lösungen der Klasse $\mathfrak{F}^\varepsilon$, deren Erzeugende (17) und (18) logarithmische Glieder enthalten können, noch weitere Aussagen herleiten.

Jede in $\dot{U}_\varrho(z_0)$[1] definierte und eindeutige Lösung $w \in \mathfrak{F}^\varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_0))$ bzw. $\mathfrak{F}_r^\varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_0))$ läßt sich nach Satz 3 in der Form

$$w = \varphi_1(z, \bar{z}) \cdot \log|z - z_0| + \varphi_2(z, \bar{z}) \tag{20}$$

mit

$$\varphi_1(z, \bar{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} C^{(1)}_{\lambda_1 \lambda_2} (z - z_0)^{\lambda_1} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\lambda_2}, \tag{21}$$

$$\varphi_2(z, \bar{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} C^{(2)}_{\lambda_1 \lambda_2} (z - z_0)^{\lambda_1} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\lambda_2} \tag{22}$$

darstellen. Wir sagen im Hinblick auf diese Gestalt der Entwicklung (20), die in $0 < |z - z_0| < \varrho$ definierte und eindeutige Lösung w habe in $z = z_0$ eine isolierte Singularität *mit logarithmischem Hauptglied der asymptotischen Entwicklung*, wenn

(1) die Summen (21) und (22) nach links abbrechen, d. h. wenn in ihnen $\lambda_1, \lambda_2 \geq -m$ mit einer geeigneten natürlichen Zahl m gilt, und

(2) die Funktionen $\varphi_1(z, \bar{z})$ und $\varphi_2(z, \bar{z})$ in $\dot{U}_\varrho(z_0)$ beschränkt sind.

Die in dieser Weise definierten Funktionen fassen wir in der Klasse

$$\overset{*}{\mathfrak{F}}{}^\varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_0)) \quad \text{bzw.} \quad \overset{*}{\mathfrak{F}}{}_r^\varepsilon(\dot{U}_\varrho(z_0))$$

zusammen und leiten zunächst einige Aussagen über die Koeffizienten der zugehörigen Entwicklungen (21) und (22) her.

Im Falle (22) gilt gemäß (19)

$$\varphi_1(z, \bar{z}) = 2(E\,S)(z),$$

[1] Mit z_0 wird im folgenden eine feste endliche Zahl bezeichnet. Der Fall, daß eine Singularität in $z = \infty$ ($\varepsilon = +1$) auftritt, kann durch Anwendung der Transformation $z = \zeta^{-1}$ stets auf den Fall $\zeta = 0$ zurückgeführt werden.

d. h. $\varphi_1(z, \bar{z})$ läßt sich in jedem Fall in eine Potenzreihe

$$\varphi_1(z, \bar{z}) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0} C^{(1)}_{\lambda_1 \lambda_2} (z - z_0)^{\lambda_1} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\lambda_2}$$

entwickeln.

Wir nehmen nun an, es liege eine Lösung w der Klasse $\mathfrak{F}^e(\dot{U}_\varrho(0))$ vor. Dann sind die Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S(z) \cdot \log z$$
$$h(z) = h_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} \cdot \log z$$

bis auf ein Polynom vom Grade $2n$ in z bestimmt. Bei vorgegebener Lösung w sind also die Hauptteile der Laurentreihen

$$g_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\lambda z^\lambda, \tag{23}$$

$$h_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_\lambda z^\lambda \tag{24}$$

eindeutig bestimmt. Entwickelt man

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{z}}{1 + \varepsilon z \bar{z}}$$

an der Stelle $z_0 = 0$, so erhält man

$$\bar{\tau} = \sum_{\lambda = 0}^{\infty} \bar{z} (-\varepsilon z \bar{z})^\lambda. \tag{25}$$

Setzt man (25) in die Darstellung

$$w_1 = (E g_1)(z) \tag{26}$$

ein, so ergibt sich eine Entwicklung der Form

$$w_1 = \sum_{\substack{-\infty < \mu_1 < \infty \\ \mu_2 \geq 0}} \alpha_{\mu_1 \mu_2} z^{\mu_1} \bar{z}^{\mu_2}. \tag{27}$$

Da das von $\bar{\tau}$ freie Glied in (26) die Gestalt

$$g_1^{(n)}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\lambda \lambda (\lambda - 1) \ldots (\lambda - n + 1) z^{\lambda - n}$$

hat, folgt für die Koeffizienten $\alpha_{\mu_1,0}$ in (27) nunmehr unter Berücksichtigung von (25)

$$\alpha_{\mu_1,0} = a_{\mu_1+n}(\mu_1+n)(\mu_1+n-1)\ldots(\mu_1+1). \tag{28}$$

Entsprechend erhält man unter Verwendung von (24) für die Koeffizienten β_{0,μ_2} in

$$w_2 = \overline{(E h_1)(z)} = \sum_{\substack{\mu_1 \geq 0 \\ -\infty < \mu_2 < \infty}} \beta_{\mu_1\mu_2} z^{\mu_1} \bar{z}^{\mu_2} \tag{29}$$

die Bedingung

$$\beta_{0,\mu_2} = \overline{b_{\mu_2+n}}(\mu_2+n)(\mu_2+n-1)\ldots(\mu_2+1). \tag{30}$$

Betrachtet man nun die Darstellung

$$w = (E g)(z) + \overline{(E h)(z)} = \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\mu_1\mu_2} z^{\mu_1}\bar{z}^{\mu_2} + \\ + (E S)(z)\cdot\log(z\bar{z}), \tag{31}$$

so gilt unter Verwendung von (28) und (30), falls $g_1(z)$ in $z_0 = 0$ wesentlich singulär,

$$\gamma_{\mu_1,0} \neq 0 \text{ für unendlich viele } \mu_1 < 0.$$

Hat $g_1(z)$ in $z_0 = 0$ eine Polstelle, so gilt $\gamma_{\mu_1,0} \neq 0$ nur für endlich viele $\mu_1 < 0$. Entsprechend gilt

$$\gamma_{0,\mu_2} \neq 0$$

für unendlich viele bzw. endlich viele $\mu_2 < 0$, falls $h_1(z)$ in $z_0 = 0$ wesentlich singulär ist bzw. eine Polstelle besitzt.

Da die Hauptteile der Laurentreihen $g_1(z)$ und $h_1(z)$ jedoch bei Vorgabe von w eindeutig bestimmt sind, so gilt umgekehrt, daß $g_1(z)$ und $h_1(z)$ wesentlich singulär sind in $z_0 = 0$ oder dort eine Polstelle besitzen, falls in (31)

$$\gamma_{\mu_1,0} \neq 0$$

für unendlich viele oder endlich viele $\mu_1 < 0$ bzw.

$$\gamma_{0,\mu_2} \neq 0$$

für unendlich viele oder endlich viele $\mu_2 < 0$. Darüber hinaus gilt in (31), wenn man (27), (29) und (19) berücksichtigt, daß

$$\mu_1,\ \mu_2 \text{ nicht beide } < 0.$$

Wir bringen letzteres durch die Schreibweise

$$w = (E\,g)(z) + \overline{(E\,h)(z)} = \sum_{*} \gamma_{\mu_1\mu_2} z^{\mu_1} \bar{z}^{\mu_2} + (E\,S)(z) \cdot \log(z\,\bar{z})$$

zum Ausdruck. Darüber hinaus folgt, daß bei festem $\mu_2\ (> 0)$

$$\gamma_{\mu_1\mu_2} \neq 0 \text{ nur für jeweils endlich viele } \mu_1 < 0$$

gilt, falls

$$\gamma_{\mu_1,0} \neq 0 \text{ nur für endlich viele } \mu_1 < 0 \text{ ist.}$$

Eine entsprechende Aussage gilt, falls $\mu_2 < 0$ und $\mu_1\ (> 0)$ fest.

Wir untersuchen nun den Fall, daß die isolierte Singularität in einem beliebigen Punkte z_0 liegt. Berücksichtigt man hier, daß die Differentialgleichung (1) invariant ist gegenüber Kugeldrehungen ($\varepsilon = +1$) bzw. Automorphismen des Einheitskreises ($\varepsilon = -1$), so erhält man ausgehend von den Lösungen

$$\hat{w}(\zeta,\bar{\zeta}) = (E\hat{g})(\zeta) + \overline{(E\hat{h})(\zeta)} \in \mathfrak{F}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(0))$$

die Lösungen

$$w(z,\bar{z}) = (E\,g)(z) + \overline{(E\,h)(z)} \in \mathfrak{F}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(z_0))$$

gemäß

$$w(z,\bar{z}) = \left[\hat{w}(\zeta,\bar{\zeta})\right]_{\zeta = \frac{\eta(z-z_0)}{1+\varepsilon\bar{z}_0 z}}, \quad |\eta| = 1.$$

Zur Bestimmung der neuen Erzeugenden $g(z)$ und $h(z)$ bei Vorgabe von $\hat{g}(\zeta)$ und $\hat{h}(\zeta)$ greifen wir zunächst den Fall

$$\hat{w}_1(\zeta, \bar{\zeta}) = (E\hat{g})(\zeta), \tag{32}$$

$$w_1(z, \bar{z}) = \left[\hat{w}_1(\zeta, \bar{\zeta})\right]_{\zeta = \frac{\eta(z-z_0)}{1+\varepsilon\bar{z}_0 z}} = (Eg)(z) \tag{33}$$

heraus. Hier treten die Erzeugenden $\hat{g}(\zeta)$ bzw. $g(z)$ zusammen mit A_0 als Faktor von

$$\left(\frac{\bar{\zeta}}{1+\varepsilon\zeta\bar{\zeta}}\right)^n \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\bar{z}}{1+\varepsilon z\bar{z}}\right)^n$$

auf. Berücksichtigt man noch

$$\left[\frac{\bar{\zeta}}{1+\varepsilon\zeta\bar{\zeta}}\right]_{\zeta = \frac{\eta(z-z_0)}{1+\varepsilon\bar{z}_0 z}} = \frac{\bar{\eta}(1+\varepsilon\bar{z}_0 z)}{1+\varepsilon z_0\bar{z}_0}\left\{\frac{\bar{z}(1+\varepsilon\bar{z}_0 z)}{1+\varepsilon z\bar{z}} - \bar{z}_0\right\},$$

so folgt

$$g(z) = \left[\hat{g}(\zeta)\right]_{\zeta = \frac{\eta(z-z_0)}{1+\varepsilon\bar{z}_0 z}} \left(\frac{\bar{\eta}}{1+\varepsilon z_0\bar{z}_0}\right)^n (1+\varepsilon\bar{z}_0 z)^{2n}. \tag{34}$$

Im Falle

$$\hat{w}_2(\zeta, \bar{\zeta}) = \overline{(E\hat{h})(\zeta)}, \tag{35}$$

$$w_2(z, \bar{z}) = \left[\hat{w}_2(\zeta, \bar{\zeta})\right]_{\zeta = \frac{\eta(z-z_0)}{1+\varepsilon\bar{z}_0 z}} = \overline{(Eh)(z)} \tag{36}$$

folgt entsprechend

$$h(z) = \left[\hat{h}(\zeta)\right]_{\zeta = \frac{\eta(z-z_0)}{1+\varepsilon\bar{z}_0 z}} \left(\frac{\bar{\eta}}{1+\varepsilon z_0\bar{z}_0}\right)^n (1+\varepsilon\bar{z}_0 z)^{2n}. \tag{37}$$

Analoge Überlegungen gelten für den Fall, daß die Singularität im Punkte ∞ liegt. Unter Benutzung der Isometrie $\zeta = \frac{1}{z}$ führen sie zu den Transformationsformeln

$$g(z) = \left[\hat{g}(\zeta)\right]_{\zeta = \frac{1}{z}} (-1)^n z^{2n}, \tag{34a}$$

$$h(z) = \left[\hat{h}(\zeta)\right]_{\zeta = \frac{1}{z}} (-1)^n z^{2n}. \tag{37a}$$

Wir gehen nun von dem in (31) gewonnenen Ergebnis aus, d. h. wir nehmen an, $w(\zeta, \bar{\zeta})$ habe eine isolierte Singularität in $\zeta = 0$, dann gilt

$$\hat{w}(\zeta,\bar{\zeta}) = (E\hat{g})(\zeta) + \overline{(E\hat{h})(\zeta)}$$
$$= \sum_{*} \gamma_{\mu_1\mu_2} \zeta^{\mu_1} \bar{\zeta}^{\mu_2} + (E\hat{S})(\zeta) \cdot \log(\zeta,\bar{\zeta})$$

mit

$$\ddot{\hat{g}}(\zeta) = \ddot{\hat{g}}_1(\zeta) + \hat{S}(\zeta) \cdot \log \zeta, \tag{38}$$

$$\hat{h}(\zeta) = \hat{h}_1(\zeta) + (-\varepsilon)^n \zeta^{2n} \overline{\hat{S}\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{\zeta}}\right)} \log \zeta. \tag{39}$$

Wir transformieren nun die isolierte Singularität vermöge

$$\zeta = \frac{\eta(z-z_0)}{1+\varepsilon\bar{z}_0 z} \tag{40}$$

in den Punkt z_0. Dann erhält man die neuen Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S(z)\log(z-z_0)$$
$$h(z) = h_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} \log(z-z_0)$$

gemäß (34) und (37), und es gilt: Falls $\hat{g}_1(\zeta)$ bzw. $\hat{h}_1(\zeta)$ eine wesentliche Singularität oder eine Polstelle in $\zeta = 0$ besitzen, so ist dies auch für die neuen Laurentreihen $g_1(z)$ und $h_1(z)$ in $z = z_0$ der Fall und umgekehrt. Betrachtet man andererseits die Lösungen (32) und (33), so gilt wegen

$$\left[\frac{\bar{\zeta}}{1+\varepsilon\zeta\bar{\zeta}}\right]_{\zeta=\frac{\eta(z-z_0)}{1+\varepsilon\bar{z}_0 z}} = \frac{\bar{\eta}}{1+\varepsilon z_0\bar{z}_0}\,\frac{1+\varepsilon\bar{z}_0 z}{1+\varepsilon z\bar{z}}\,(\bar{z}-\bar{z}_0),$$

daß alle Summanden von (32), die einen Faktor

$$\left(\frac{\bar{\zeta}}{1+\varepsilon\zeta\bar{\zeta}}\right)^{n-\nu}, \quad n-\nu > 0,$$

aufweisen, nach der Transformation (40) einen Faktor

$$(\bar{z}-\bar{z}_0)^{\sigma}, \quad \sigma \in \mathbf{N},$$

besitzen. Lediglich die Größe

$$A_n \hat{g}^{(n)}(\zeta) \tag{41}$$

geht durch (40) in einen von $(\bar{z}-\bar{z}_0)$ freien Summanden über. Entsprechend liefert im Falle der Lösungen (35) und (36) lediglich die Größe

$$\overline{A_n \hat{h}^{(n)}(\zeta)} \tag{42}$$

einen von $(z-z_0)$ freien Summanden von (36).

Berücksichtigt man noch, daß mit $\hat{g}_1(\zeta)$ bzw. $\hat{h}_1(\zeta)$ (vgl. (38) und (39)) auch $\hat{g}_1^{(n)}(\zeta)$ bzw. $\hat{h}_1^{(n)}(\zeta)$ in $\zeta = 0$ wesentlich singulär sind, so liefern die Größen (41) und (42) nach Anwendung von (40) eine in $z = z_0$ wesentlich singuläre in $\dot{U}(z_0)$ holomorphe bzw. antiholomorphe Funktion. Damit gilt der folgende

Satz 4

Jede in $0 < |z-z_0| < \varrho$ *definierte und eindeutige Lösung* $w \in \mathfrak{F}^e(\dot{U}_\varrho(z_0))$ *der Differentialgleichung*

$$(1+\varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1)w = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

hat die Form

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eh)(z)} = \sum_{*} \gamma_{\mu_1 \mu_2} (z-z_0)^{\mu_1} (\bar{z}-\bar{z}_0)^{\mu_2} + \\ + 2(ES)(z) \log|z-z_0|. \tag{43}$$

Dabei stellt $S(z)$ *ein Polynom vom Grade* $2n$ *in* z *dar.*

Falls $\gamma_{\mu_1, 0} \neq 0$ *für unendlich viele* $\mu_1 < 0$, *so ist die Laurentreihe* $g_1(z)$ *in*

$$g(z) = g_1(z) + S(z) \cdot \log(z-z_0) \tag{44}$$

wesentlich singulär in $z = z_0$.

Falls $\gamma_{0, \mu_2} \neq 0$ *für unendlich viele* $\mu_2 < 0$, *so ist die Laurentreihe* $h_1(z)$ *in*

$$h(z) = h_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n} S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right) \cdot \log(z - z_0) \tag{45}$$

wesentlich singulär in $z = z_0$.

Falls

$$\sum \gamma_{\mu_1, 0} (z - z_0)^{\mu_1}$$

polartig in $z = z_0$, *so enthalten die Teilsummen*

$$p_{\mu_2} = \sum_{\mu_1 < 0} \gamma_{\mu_1 \mu_2} (z - z_0)^{\mu_1} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\mu_2}, \quad \mu_2 > 0 \text{ und fest},$$

von (43) jeweils nur endlich viele Glieder.

Falls

$$\sum \gamma_{0, \mu_2} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\mu_2}$$

polartig in $z = z_0$, *so enthalten auch die Teilsummen*

$$q_{\mu_1} = \sum_{\mu_2 < 0} \gamma_{\mu_1 \mu_2} (z - z_0)^{\mu_1} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\mu_2}, \quad \mu_1 > 0 \text{ und fest},$$

von (43) jeweils nur endlich viele Glieder.

Unter Verwendung von Satz 4 folgt damit, daß alle Lösungen

$$w \in \overset{*}{\mathfrak{H}}{}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(z_0))$$

Erzeugende besitzen, bei denen die auftretenden Laurentreihen $g_1(z)$ und $h_1(z)$ in $z = z_0$ höchstens eine Polstelle aufweisen. Damit gilt zunächst (vergl. (7) und (8))

$$g^{(2n+1)}(z) = \sum_{\lambda = -k_1}^{\infty} \tilde{a}_\lambda (z - z_0)^\lambda, \tag{46}$$

$$h^{(2n+1)}(z) = \sum_{\lambda = -k_2}^{\infty} \tilde{b}_\lambda (z - z_0)^\lambda \tag{47}$$

mit $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$.

Falls $k_1 > 2n + 1$ bzw. $k_2 > 2n + 1$ ist, haben die Funktionen

$$g_1(z) = \sum_{\mu = -m_1}^{\infty} a_\mu (z - z_0)^\mu$$

bzw.

$$h_1(z) = \sum_{\mu=-m_2}^{\infty} b_\mu (z-z_0)^\mu$$

in $z = z_0$ einen Pol der Ordnung m_1 bzw. m_2, und es gilt

$$k_1 = m_1 + 2n + 1, \quad k_2 = m_2 + 2n + 1. \tag{48}$$

Im Falle $k_1 \leqq 2n+1$ bzw. $k_2 \leqq 2n+1$ sind $g_1(z)$ bzw. $h_1(z)$ holomorph in z_0. Wenn die Funktionen $g_1(z)$ bzw. $h_1(z)$ in $z = z_0$ Polstellen der Ordnung m_1 bzw. m_2 besitzen, so treten in

$$(E g_1)(z) \text{ bzw. } \overline{(E h_1)(z)}$$

Potenzen

$$(z-z_0)^{\delta_1} \text{ bzw. } (\bar{z}-\bar{z}_0)^{\delta_2}$$

mit

$$-(m_1+n) \leqq \delta_1 < (-n) \text{ bzw. } -(m_2+n) \leqq \delta_2 < (-n)$$

auf. Unter Berücksichtigung von (19) müßte also für eine Lösung $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_0))$ im Falle $\max(k_1, k_2) > 2n+1$

$$m_1 = m_2$$

gelten. Betrachtet man außerdem in

$$(E g_1)(z) + \overline{(E h_1)(z)}$$

die Glieder mit $(z-z_0)^{-m_1-n}$ und $(\bar{z}-\bar{z}_0)^{-m_1-n}$, so folgt aus der Forderung

$$\frac{a_{-m_1}}{(z-z_0)^{m_1+n}} + \frac{\overline{b_{-m_1}}}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^{m_1+n}} = 0,$$

wenn man noch

$$z - z_0 = \varrho e^{i\vartheta}$$

verwendet,

$$a_{-m_1} e^{-i\vartheta(m_1+n)} + \overline{b_{-m_1}} e^{i\vartheta(m_1+n)} = 0$$

für alle $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ und deshalb

$$a_{-m_1} = b_{-m_1} = 0.$$

Damit reduzieren sich die Laurentreihen $g_1(z)$ und $h_1(z)$ auf Potenzreihen und für die Entwicklungen (46) und (47) gilt

$$(49)\quad g^{(2n+1)}(z) = \sum_{\lambda=-2n-1}^{\infty} \tilde{a}_\lambda (z-z_0)^\lambda = \underset{z_0}{T}\{g(z)\} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \tilde{a}_\lambda (z-z_0)^\lambda$$

und

$$(50)\quad h^{(2n+1)}(z) = \sum_{\lambda=-2n-1}^{\infty} \tilde{b}_\lambda (z-z_0)^\lambda = \underset{z_0}{T}\{h(z)\} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \tilde{b}_\lambda (z-z_0)^\lambda.$$

Soll nun eine Lösung der Klasse $\overset{*}{\mathfrak{H}}^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_0))$ vorliegen, so dürfen die Spezialteile

$$(51)\quad \underset{z_0}{T}\{g(z)\} = \sum_{\lambda=-2n-1}^{-1} \tilde{a}_\lambda (z-z_0)^\lambda$$

und

$$(52)\quad \underset{z_0}{T}\{h(z)\} = \sum_{\lambda=-2n-1}^{-1} \tilde{b}_\lambda (z-z_0)^\lambda$$

nicht identisch verschwinden. Generell bestehen bei eindeutigen Lösungen $w \in \overset{*}{\mathfrak{H}}^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_0))$ zwischen den Koeffizienten $\tilde{c}_\mu$ des Polynoms

$$S(z) = \sum_{\mu=0}^{2n} c_\mu z^\mu = \sum_{\mu=0}^{2n} \tilde{c}_\mu (z-z_0)^\mu$$

und den Koeffizienten $\tilde{a}_\lambda$ des Spezialteils $\underset{z_0}{T}\{g(z)\}$ notwendig die Beziehungen

$$(53)\quad \bar{\tilde{c}}_\mu = \frac{(-1)^\mu \tilde{a}_{-(2n+1-\mu)}}{\mu!\,(2n-\mu)!},\quad 0 \leq \mu \leq 2n.$$

(Es gelten weitere Koeffizientenrelationen, die sich im Falle $z_0 = 0$ in der folgenden einfachen Form schreiben lassen:

$$(54)\quad \tilde{b}_{-(\mu+1)} = (-\varepsilon)^{n+\mu}\, \overline{\tilde{a}_{-(2n+1-\mu)}},\quad 0 \leqq \mu \leqq 2n).$$

Für die Lösungen $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(z_0))$ folgen jedoch darüber hinaus aus der Forderung, daß das logarithmische Glied das Hauptglied der asymptotischen Entwicklung darstellen soll, weitere Bedingungen für die Koeffizienten $\tilde{a}_\lambda$, $\tilde{b}_\lambda$ der Spezialteile $\underset{z_0}{T}\{g(z)\}$ und $\underset{z_0}{T}\{h(z)\}$.

Dazu betrachten wir zunächst wiederum eine Lösung $\hat{w}(\zeta, \bar{\zeta})$ mit einer isolierten Singularität in $\zeta = 0$ und verwenden

$$S(\zeta) = \sum_{\lambda=0}^{2n} c_\lambda \zeta^\mu, \quad \tau = \frac{\zeta}{1 + \varepsilon \zeta \bar{\zeta}}.$$

In diesem Fall dürfen in den Summanden

$$(55) \qquad \sum_{(1)} = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \bar{\tau}^{n-\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} S^{(\nu-\mu)}(\zeta) \frac{(\mu-1)!\,(-1)^{\mu-1}}{\zeta^\mu}$$

und

$$(56) \qquad \overline{\sum_{(2)}} = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \tau^{n-\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (-\varepsilon)^n \overline{\left(\zeta^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{\zeta}}\right)}\right)^{(\nu-\mu)}} \frac{(\mu-1)!\,(-1)^{\mu-1}}{\zeta^\mu}$$

der Darstellung (19) keine Potenzen von ζ bzw. $\bar{\zeta}$ mit negativem Exponenten auftreten. Diese Forderung liefert im Falle $\sum_{(1)}$

$$c_\lambda = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq \lambda < n$$

und im Falle $\overline{\sum_{(2)}}$

$$c_\lambda = 0 \quad \text{für} \quad n < \lambda \leq 2n.$$

Damit reduziert sich das Polynom $S(\zeta)$ auf

$$S(\zeta) = c_n \zeta^n, \quad c_n \text{ bel. } (\neq 0).$$

Um eine entsprechende Aussage für eine isolierte Singularität in z_0 (bel.) zu gewinnen, unterwerfen wir die Lösung

$$\hat{w}(\zeta, \bar{\zeta}) = (E\hat{g})(\zeta) + \overline{(E\hat{h})(\zeta)}$$

mit

$$\hat{g}(\zeta) = \hat{g}_1(\zeta) + c_n \zeta^n \log \zeta,$$

$$\hat{h}(\zeta) = \hat{h}_1(\zeta) + \bar{c}_n \zeta^n \log \zeta$$

(wobei $\hat{g}_1(\zeta)$ und $\hat{h}_1(\zeta)$ Potenzreihen darstellen) der Transformation (40) und erhalten

$$w(z,\bar{z}) = (Eg)(z) + \overline{(Eh)(z)}$$

mit den Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S_1(z) \cdot \log(z - z_0),$$

$$h(z) = h_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S_1\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} \cdot \log(z - z_0).$$

Hier stellen $g_1(z)$ und $h_1(z)$ wiederum Potenzreihen dar, während das Polynom $S_1(z)$ die Gestalt

$$S_1(z) = c_n \left(\frac{(z - z_0)(1 + \varepsilon \bar{z}_0 z)}{1 + \varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^n \tag{57}$$

$$= c_n \sum_{\varrho=0}^{n} \binom{n}{\varrho} \left(\frac{\varepsilon \bar{z}_0}{1 + \varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^{\varrho} (z - z_0)^{n+\varrho}, \quad c_n \text{ bel. } (\neq 0),$$

hat. Liegt die Singularität im Punkte ∞, so setzt man zunächst im obigen Ergebnis $z_0 = 0$ und transformiere dann mittels $z = \frac{1}{\zeta}$. Die neuen Erzeugenden erhält man unter Verwendung der Formeln (34a) und (37a). Damit gilt der folgende

Satz 5

Jede in $0 < |z - z_0| < \varrho$ *definierte und eindeutige Lösung* $w \in \overset{*}{\mathfrak{H}}^{\varepsilon}(\dot{U}_{\varrho}(z_0))$ *der Differentialgleichung*

$$(1 + \varepsilon z \bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

läßt sich in $\dot{U}_{\varrho}(z_0)$ *gemäß*

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eh)(z)}$$

mit den Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S(z) \cdot \log(z - z_0),$$

$$h(z) = h_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n} S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right) \cdot \log(z - z_0)$$

darstellen. Dabei gilt

$$S(z) = C \sum_{\varrho=0}^{n} \binom{n}{\varrho} \left(\frac{\varepsilon \bar{z}_0}{1+\varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^{\varrho} (z-z_0)^{n+\varrho}, \quad C \text{ komplex } (\neq 0),$$

während es sich bei $g_1(z)$ und $h_1(z)$ um in $z = z_0$ holomorphe Funktionen handelt.

Liegt eine Lösung $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}^{+1}(\dot{U}_\varrho(\infty))$ vor, so haben die Erzeugenden die Gestalt

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{2n} a_\mu z^\mu + C z^n \log z,$$

$$h(z) = \sum_{-\infty}^{2n} b_\mu z^\mu + \bar{C} z^n \log z, \quad C \text{ komplex } (\neq 0).$$

Für eine Lösung $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_0))$ gilt außerdem für die Koeffizienten $\tilde{a}_\lambda$ des Spezialteils (51) unter Berücksichtigung von (53)

$$\tilde{a}_\lambda = 0 \text{ für } -(n+1) > \lambda \geq -(2n+1), \tag{58}$$

(59)

$$\tilde{a}_\lambda = C \binom{n}{n+1+\lambda} (2n+1+\lambda)!\,(-\lambda-1)!\,(-1)^{\lambda+1} \left(\frac{\varepsilon \bar{z}_0}{1+\varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^{n+1+\lambda},$$
$$C \text{ bel. } (\neq 0), \text{ für } -1 \geq \lambda \geq -(n+1).$$

Für die Koeffizienten $\tilde{b}_\lambda$ von (52) gilt wegen

$$(-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} = \frac{\bar{C}}{C} S(z)$$

die Beziehung

$$\tilde{b}_\lambda = \frac{\bar{C}}{C} \tilde{a}_\lambda, \quad -1 \geq \lambda \geq -(2n+1). \tag{60}$$

Ist also eine eindeutige Lösung

$$w = (E g)(z) + \overline{(E h)(z)} \in \overset{*}{\mathfrak{F}}^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_0)) \tag{61}$$

mit einer isolierten Singularität in $z = z_0$ vorgegeben, so erhält man unter Verwendung von (7) und (8) die $(2n+1)$ten Ableitungen der Erzeugenden in der Form

$$(62)\qquad g^{(2n+1)}(z) = \sum_{\lambda=-k_1}^{\infty} \tilde{a}_\lambda (z-z_0)^\lambda,\quad k_1 \in \mathbf{N} \text{ bzw. } k_1 = \infty,$$

$$(63)\qquad h^{(2n+1)}(z) = \sum_{\lambda=-k_2}^{\infty} \tilde{b}_\lambda (z-z_0)^\lambda,\quad k_2 \in \mathbf{N} \text{ bzw. } k_2 = \infty.$$

Es handelt sich bei (61) genau dann um eine Lösung der Klasse $\overset{*}{\mathfrak{F}}^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_0))$, d. h. um eine Lösung mit logarithmischem Hauptglied der asymptotischen Entwicklung, falls in (62), (63) die Anfangsgrade $-k_1, -k_2$ endlich sind, die Beziehung

$$k_1 = k_2 = n+1$$

erfüllt ist und die Koeffizienten $\tilde{a}_\lambda$, $\tilde{b}_\lambda$ für $(-1) \geq \lambda \geq -(n+1)$ den Bedingungen (59) und (60) genügen.

3. Reellwertige Lösungen

Nach Satz 1 läßt sich jede im Kreisring R: $\varrho_1 < |z-z_0| < \varrho_2$, $\varrho_1 \geq 0$, definierte und eindeutige komplexwertige Lösung von (1) in der Form

$$w = (E\,g)(z) + \overline{(E\,h)(z)}$$

mit den Erzeugenden

$$(64)\qquad g(z) = g_1(z) + S_1(z)\cdot \log(z-z_0),$$

$$(65)\qquad h(z) = h_1(z) + S_2(z)\cdot \log(z-z_0)$$

darstellen. Dabei bezeichnet $S_1(z)$ ein Polynom vom Grade $2n$ in z; $g_1(z)$ und $h_1(z)$ sind holomorphe und eindeutige Funktionen im Kreisring R, und $S_2(z)$ genügt der Bedingung

$$(66)\qquad S_2(z) = (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S_1\left(\frac{-\varepsilon}{z}\right)}.$$

Wir setzen

$$(67)\qquad (Eg)(z) = \Phi,\quad (Eh)(z) = \Psi,$$

dann gilt für eine reellwertige Lösung w von (1), wenn wir außerdem

$$F = \Phi - \overline{\Psi}$$

verwenden,

$$w - \overline{w} = (\Phi + \Psi) - (\overline{\Phi} + \overline{\Psi}) = (\Phi - \overline{\Psi}) - (\overline{\Phi} - \Psi) = F - \overline{F} = 0.$$

Damit folgt, da es sich bei F um eine reellwertige Funktion handelt,

$$w = \Phi + \Psi = \Phi + \overline{\Phi} - F = \frac{1}{2}\left\{(2\Phi - F) + \overline{(2\Phi - F)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(\Phi + \overline{\Psi}) + \overline{(\Phi + \overline{\Psi})}\right\}.$$

Wir erhalten also unter Berücksichtigung von (67) mit $f = \frac{1}{2}(g + h)$

$$w = \frac{1}{2}\left\{(Eg)(z) + (Eh)(z) + \overline{(Eg)(z) + (Eh)(z)}\right\} =$$

$$= (Ef)(z) + \overline{(Ef)(z)}.$$

Dabei gilt für $f(z)$ unter Verwendung von (64) und (65)

$$f(z) = \frac{1}{2}\left\{g_1(z) + h_1(z)\right\} + S(z) \cdot \log(z - z_0)$$

mit

$$S(z) = \frac{1}{2}\left\{S_1(z) + S_2(z)\right\}.$$

Unter Berücksichtigung von (66) erhält man also für das Polynom $S(z)$

$$S(z) = \frac{1}{2}\left\{S_1(z) + (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S_1\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}\right\}.$$

Diese Forderung ist jedoch wegen

$$(-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} = (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{\left\{\frac{1}{2} S_1\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right) + \frac{1}{2}(-\varepsilon)^n \left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)^{2n} \overline{S_1(z)}\right\}}$$

$$= \frac{1}{2}(-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S_1\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} + \frac{1}{2} S_1(z) = S(z)$$

gleichbedeutend mit der Bedingung

$$S(z) = (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}.$$

Damit lautet der Entwicklungssatz für die reellwertigen Lösungen von (1) wie folgt:

Satz 6

Jede im Kreisring $R: \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2$, $\varrho_1 \geq 0$, *definierte und eindeutige reellwertige Lösung der Differentialgleichung*

$$(1 + \varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

läßt sich in R *gemäß*

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eg)(z)}$$

mit der Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S(z) \cdot \log(z - z_0)$$

darstellen, wobei $g_1(z)$ *in* R *holomorph und eindeutig ist, während* $S(z)$ *ein Polynom vom Grade* $2n$ *in* z *bezeichnet, welches der Bedingung*

$$S(z) = (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}$$

genügt.

Entartet der Kreisring R in eine punktierte Kreisscheibe, so gilt speziell:

Satz 7

Eine reellwertige Lösung w *von (1) habe in* $z = z_0$ *eine isolierte Singularität, d. h. die reellwertige Funktion* w *sei in einer punktierten Umgebung* $K: 0 < |z - z_0| < \varrho$ *als eindeutige Funktion definiert und dort Lösung der Differentialgleichung*

$$(1 + \varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Dann läßt sich w *in* K *gemäß*

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eg)(z)}$$

darstellen, wobei die Erzeugende $g(z)$ der in Satz 6 genannten Bedingung genügt.

Um zu einer Darstellung für die Lösungen der Klasse $\overset{*}{\mathfrak{F}}_r^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_0))$ zu kommen, ist zu prüfen, welche Einschränkungen aus der in Satz 6 genannten Bedingung

$$S(z) = (-\varepsilon)^n z^{2n} \overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)}$$

für das Polynom (57) folgen. Wegen

$$S(z) = C\left(\frac{(z-z_0)(1+\varepsilon\bar{z}_0 z)}{1+\varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^n$$

und

$$\overline{S\left(\frac{-\varepsilon}{\bar{z}}\right)} = \frac{(-\varepsilon)^n \bar{C}}{z^{2n}}\left(\frac{(z-z_0)(1+\varepsilon\bar{z}_0 z)}{1+\varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^n$$

folgt hier jedoch lediglich

$$C = \bar{C}.$$

Liegt die Singularität in ∞, so verwende man das obige Ergebnis für $z_0 = 0$, transformiere durch die Isometrie $z = \frac{1}{\zeta}$ und verwende (34a). Damit gilt der folgende

Satz 8

Jede in $0 < |z - z_0| < \varrho$ definierte und eindeutige Lösung $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}_r^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_0))$ der Differentialgleichung

$$(1+\varepsilon z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

läßt sich in $(\dot{U}_\varrho(z_0))$ gemäß

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eg)(z)}$$

mit der Erzeugenden

$$g(z) = g_1(z) + S(z) \cdot \log(z - z_0)$$

darstellen, wobei $g_1(z)$ eine Potenzreihe bezeichnet, während für $S(z)$ gilt

$$S(z) = C \sum_{\varrho=0}^{n} \binom{n}{\varrho} \left(\frac{\varepsilon \bar{z}_0}{1+\varepsilon z_0 \bar{z}_0}\right)^{\varrho} (z-z_0)^{n+\varrho}, \quad C \text{ reell } (\neq 0).$$

Liegt eine Lösung $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}_r^{+1}(\dot{U}_\varrho(\infty))$ vor, so gilt für die Erzeugende

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{2n} a_\mu z^\mu + C z^n \log z, \quad C \text{ reell } (\neq 0).$$

Hieran ist besonders bemerkenswert, daß $S(z)$ abgesehen von dem (von w abhängigen, konstanten) Faktor C für alle Lösungen $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}_r^{e}(\dot{U}_\varrho(z_0))$ die gleiche Gestalt hat. Eine entsprechende Aussage gilt für

$$\varphi_1(z,\bar{z}) = 2(ES)(z) = \frac{2C}{(1+\varepsilon z_0 \bar{z}_0)^n} \underset{z}{E}\left([(z-z_0)(1+\varepsilon \bar{z}_0 z)]^n\right)$$

in der Entwicklung

$$w = \varphi_1(z,\bar{z}) \cdot \log|z-z_0| + \varphi_2(z,\bar{z}).$$

Zum Beispiel erhält man im Falle $z_0 = 0$ für

$$U(z,\bar{z};0) = \underset{z}{E}(z^n \log z) + \overline{\underset{z}{E}(z^n \log z)}$$

bei Berücksichtigung von (19)

(68)

$$U(z,\bar{z};0) = \left\{\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \frac{n!}{(n-\nu)!}\left(\frac{z\bar{z}}{1+\varepsilon z\bar{z}}\right)^{n-\nu}\right\} \log(z\bar{z})$$
$$+ 2\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\sum_{\mu=1}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}\frac{n!\,(\mu-1)!\,(-1)^{\mu-1}}{(n+\mu-\nu)!}\right\} A_\nu \left(\frac{z\bar{z}}{1+\varepsilon z\bar{z}}\right)^{n-\nu},$$

d. h. es liegt eine nur von $z\bar{z}$ abhängige Lösung von (1) vor. Zur Bestimmung aller derartigen Lösungen setzen wir

$$w(z,\bar{z}) = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{1-\varepsilon z\bar{z}}{1+\varepsilon z\bar{z}}$$

und erhalten an Stelle von (1) die Legendresche Differentialgleichung

$$(\omega^2-1)\varphi'' + 2\omega\varphi' - n(n+1)\varphi = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet (C_1, C_2 bel. komplex)

(69) $$\varphi = C_1 P_n(\omega) + C_2 Q_n(\omega) \text{ für } \varepsilon = +1$$

bzw.

(70) $$\varphi = C_1 P_n(\omega) + C_2 \mathfrak{Q}(\omega) \text{ für } \varepsilon = -1,$$

wenn man entsprechend der Schreibweise von Magnus und Oberhettinger [3] mit $P_n(\omega)$ die Legendreschen Polynome bezeichnet und

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{2} P_n(\omega) \log\frac{1+\omega}{1-\omega} - W_{n-1}(\omega),\ \varepsilon = +1,$$

$$\mathfrak{Q}_n(\omega) = \frac{1}{2} P_n(\omega) \log\frac{\omega+1}{\omega-1} - W_{n-1}(\omega),\ \varepsilon = -1,$$

$$W_{n-1}(\omega) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{2n-4\nu-1}{(n-\nu)(2\nu+1)} P_{n-2\nu-1}(\omega)$$

setzt. Die Lösung (68) ist sodann in den Lösungen (69) bzw. (70) mit

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -2\cdot n!$$

enthalten; es gilt also im Falle $z_0 = 0$

$$U(z,\bar{z};0) = n!\,\{P_n(\omega)\cdot\log(z\bar{z}) + 2\,W_{n-1}(\omega)\} \text{ mit } \omega = \frac{1-\varepsilon z\bar{z}}{1+\varepsilon z\bar{z}}.$$

Setzt man für beliebiges z_0

$$U(z,\bar{z};z_0) = \underset{z}{E}\big(S(z;z_0)\log(z-z_0)\big) + \overline{\underset{z}{E}\big(S(z;z_0)\log(z-z_0)\big)}$$

mit

$$S(z;z_0) = \left(\frac{(z-z_0)(1+\varepsilon\bar{z}_0 z)}{1+\varepsilon z_0\bar{z}_0}\right)^n.$$

dann gilt

$$U(z,\bar{z};z_0) = n!\left[P_n\left(\frac{1-\varepsilon\zeta\bar{\zeta}}{1+\varepsilon\zeta\bar{\zeta}}\right)\right]_{\zeta=\frac{z-z_0}{1+\varepsilon\bar{z}_0 z}} \log|z-z_0|^2 + \Phi(z,\bar{z})$$

mit einer in $z = z_0$ beschränkten Funktion $\Phi(z,\bar{z})$. Mit diesen Überlegungen haben wir den folgenden Satz gewonnen.

Satz 9

Zu jeder Lösung $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}_r^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_0))$ *gibt es genau eine reelle Zahl* C, *so daß*

$$w - C \cdot U(z,\bar{z};z_0)$$

in z_0 *reell analytisch ergänzbar ist.*

Wir betrachten nun ein einfach zusammenhängendes Gebiet G mit $z_\lambda \in G$, $\lambda = 1, \ldots, k$. Durch Herausnahme der Punkte z_λ aus G entstehe das Gebiet G_0. Wir nehmen außerdem an, daß G im Falle $\varepsilon = -1$ im Innern des Einheitskreises liegt.

Zu jeder Funktion $w \in \mathfrak{F}_r^{-1}(G_0)$, die in den Punkten z_λ, $\lambda = 1, \ldots, k$, isolierte Singularitäten mit logarithmischem Hauptglied der asymptotischen Entwicklung besitzt, gibt es dann unter Berücksichtigung von Satz 9 reelle Konstanten $C_1, \ldots, C_k$, so daß

$$w - \sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \cdot U(z,\bar{z};z_\lambda)$$

in allen z_λ reell analytisch ergänzbar ist und danach eine Lösung der Klasse $\mathfrak{F}_r^{-1}(G)$ darstellt.

Im Falle $\varepsilon = +1$ lassen sich ähnliche Aussagen formulieren, doch ist hier der Punkt $z = \infty$ besonders zu beachten. Wir betrachten zunächst den Fall, daß das Gebiet G nicht gleich der Riemannschen Zahlenkugel ist. Dann kann man durch eine Kugeldrehung stets erreichen, daß der Punkt ∞ nicht zu G gehört. Wir können also in diesem Fall ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß ein Gebiet G mit $z = \infty \notin G$ vorliegt. Damit haben wir die Möglichkeit, wie oben im Falle $\varepsilon = -1$ zu verfahren, und kommen so zu einer entsprechenden Aussage. Wir fassen das Ergebnis für beide Fälle im folgenden Satz zusammen.

Satz 10

Sei das einfach zusammenhängende Gebiet G im Falle $\varepsilon = -1$ im Innern des Einheitskreises, im Falle $\varepsilon = +1$ in der offenen Zahlenebene gelegen (also $\infty \notin G$). Dann gibt es zu jeder Lösung $w \in \mathfrak{F}_r^{\varepsilon}(G_0)$ mit $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}{}_r^{\varepsilon}(\dot{U}_\varrho(z_\lambda))$, $\lambda = 1, \ldots, k$, (und ϱ genügend klein) reelle Konstanten $C_1, \ldots, C_k$, so daß

$$w - \sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \cdot U(z, \bar{z}; z_\lambda)$$

in allen z_λ reell analytisch ergänzbar ist und nach dieser Ergänzung eine Lösung der Klasse $\mathfrak{F}_r^{\varepsilon}(G)$ darstellt.

Handelt es sich bei dem Gebiet G im Falle $\varepsilon = +1$ um die Riemannsche Zahlenkugel E^*, so lassen sich die Lösungen w mit den genannten Eigenschaften explizit angeben. Wir können hier ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß (gegebenenfalls nach geeigneter Kugeldrehung) $z_\lambda \neq \infty$ für $\lambda = 1, \ldots, k$. Dann gibt es geeignete reelle Konstanten $C_1, \ldots, C_k$, so daß

$$(71) \quad F(z, \bar{z}) = w(z, \bar{z}) - \sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \cdot U(z, \bar{z}; z_\lambda) \in \mathfrak{F}_r^{+1}(E_0),$$

wenn wir mit E_0 die offene Ebene bezeichnen. Nach Satz II existiert sodann eine in E_0 holomorphe Funktion $g(z)$, so daß

$$F(z, \bar{z}) = (Eg)(z) + \overline{(Eg)(z)}.$$

Dabei ist die Erzeugende $g(z)$ unter Berücksichtigung von Satz I, c bis auf ein Polynom vom Grade $2n$ in z mit

$$(72) \qquad P(z) + (-1)^n z^{2n} \overline{P\left(\frac{-1}{\bar{z}}\right)} = 0$$

bestimmt. Zur Untersuchung der Funktion F für $z \to \infty$ transformieren wir durch $z = \frac{1}{\zeta}$. Da F eine in E_0 definierte Lösung von (1) darstellt, erhalten wir unter Verwendung von (34a) die neue Erzeugende $g_1(\zeta)$ der in $|\zeta| > 0$ definierten Lösung

$$[F(z, \bar{z})]_{z = \frac{1}{\zeta}} = F_1(\zeta, \bar{\zeta}) = (Eg_1)(\zeta) + \overline{(Eg_1)(\zeta)}$$

gemäß

$$g_1(\zeta) = g\left(\frac{1}{\zeta}\right) \cdot (-1)^n \zeta^{2n} = \sum_{-\infty}^{2n} a_\lambda \zeta^\lambda. \tag{73}$$

Diese Erzeugende ist wiederum bis auf ein Polynom $P_1(\zeta)$ vom Grade $2n$ in ζ mit

$$P_1(\zeta) + (-1)^n \zeta^{2n} \overline{P_1\left(\frac{-1}{\bar{\zeta}}\right)} = 0$$

bestimmt. Da die Funktion w in (71) nach Voraussetzung in $z = \infty$ analytisch ist, gilt nunmehr

$$w_1(\zeta, \bar{\zeta}) = w\left(\frac{1}{\zeta}, \frac{1}{\bar{\zeta}}\right) = (Ef_1)(\zeta) + \overline{(Ef_1)(\zeta)}$$

mit einer in $\zeta = 0$ holomorphen Funktion

$$f_1(\zeta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda \zeta^\lambda. \tag{74}$$

Außerdem folgt

$$\left[\sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \cdot U(z, \bar{z}; z_\lambda)\right]_{z=\frac{1}{\zeta}} = (Ef)(\zeta) + \overline{(Ef)(\zeta)}$$

mit

$$f(\zeta) = (-1)^{n+1} \cdot S(\zeta) \cdot \log \zeta + \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda \zeta^\lambda, \tag{75}$$

$$S(\zeta) = \sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \left(\frac{(1 - z_\lambda \zeta)(\zeta + \bar{z}_\lambda)}{1 + z_\lambda \bar{z}_\lambda}\right)^n,$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda \zeta^\lambda = (-1)^n \cdot S(\zeta) \cdot \log(1 - z_\lambda \zeta).$$

Für die Erzeugende $g_1(\zeta)$ gilt also in einer Umgebung von $\zeta = 0$ einerseits unter Verwendung von (73)

$$g_1(\zeta) = \sum_{-\infty}^{2n} a_\lambda \zeta^\lambda$$

und andererseits wegen (74) und (75)

$$g_1(\zeta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} d_\lambda \zeta^\lambda + (-1)^{n+1} \cdot S(\zeta) \cdot \log \zeta .$$

Damit folgt

$$d_\lambda = 0 \text{ für } \lambda > 2n \tag{76}$$

und

$$S(\zeta) \equiv 0. \tag{77}$$

Wegen (76) und (72) kann also die Funktion $F(z,\bar{z})$ durch ein Polynom in z vom Grade $p \leq n$ erzeugt werden; damit ist $F(z,\bar{z})$ nach Satz III eine in der abgeschlossenen Ebene E^* definierte Lösung von (1), und es gilt der

Satz 11

Es sei E^* die Riemannsche Zahlenkugel. E_0^* entsteht aus E^* durch Herausnahme der Punkte z_λ, $\lambda = 1, \ldots, k$, $z_\lambda \neq \infty$. Dann läßt sich jede Lösung $w \in \mathfrak{F}_r^{+1}(E_0^*)$, für die $w \in \overset{*}{\mathfrak{F}}_r^{+1}(\dot{U}_\varrho(z_\lambda))$, $\lambda = 1, \ldots, k$ (mit genügend kleinem ϱ) gilt, durch

$$w = (Eg)(z) + \overline{(Eg)(z)}$$

mit

$$g(z) = P(z) + \sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \cdot S(z; z_\lambda) \cdot \log(z - z_\lambda), \quad C_\lambda \text{ reell } (\neq 0),$$

und

$$\sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda \cdot S(z; z_\lambda) \equiv 0 \tag{78}$$

darstellen, wobei $P(z)$ ein Polynom in z vom Grade $p \leq n$ bezeichnet.

Man erhält solche in Satz 11 genannten Lösungen zum Beispiel, wenn k eine gerade Zahl ist und die isolierten Singularitäten paarweise in Diametralpunkten auftreten. Wir setzen

$$k = 2m, \quad z_{2\lambda-1} = z^{(\lambda)}, \quad z_{2\lambda} = -\frac{1}{\overline{z^{(\lambda)}}}, \quad \lambda = 1, \ldots, m.$$

Wegen

$$S\left(z; -\frac{1}{\bar{z}_0}\right) = (-1)^n \cdot S(z; z_0)$$

folgt sodann

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \left\{ C_{2\lambda-1} S(z; z^{(\lambda)}) + C_{2\lambda} S\left(z; -\frac{1}{\bar{z}^{(\lambda)}}\right) \right\}$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{m} (C_{2\lambda-1} + (-1)^n C_{2\lambda}) S(z; z^{(\lambda)}).$$

Die in Satz 11 genannte Bedingung (78) ist also mit

$$C_{2\lambda-1} + (-1)^n C_{2\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, \ldots, m,$$

erfüllt. Die isolierten Singularitäten brauchen jedoch nicht notwendig paarweise in Diametralpunkten aufzutreten. Wir greifen als Beispiel den Fall $n = 1$ heraus und nehmen an, daß die Punkte z_λ, $\lambda = 1, \ldots, k$ auf einem Großkreis liegen; nach Anwendung einer geeigneten Kugeldrehung können wir voraussetzen, daß sämtliche z_λ reell sind. Die Bedingung (78) ist erfüllt, falls

$$\sum_{\lambda=1}^{k} c_\lambda z_\lambda = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^{k} c_\lambda (1 - z_\lambda^2) = 0$$

mit

$$c_\lambda = \frac{C_\lambda}{1 + z_\lambda \bar{z}_\lambda}, \quad C_\lambda \text{ reell } (\neq 0).$$

Durch Elimination von

$$z_k = -\frac{1}{c_k} \sum_{\lambda=1}^{k-1} c_\lambda z_\lambda$$

folgt sodann

$$z_{k-1} = \frac{1}{A}(-B \pm \sqrt{B^2 - AC})$$

mit

$$A = c_{k-1}(c_k + c_{k-1}),$$

$$B = c_{k-1} \sum_{\lambda=1}^{k-2} c_\lambda z_\lambda,$$

$$C = \left(\sum_{\lambda=1}^{k-2} c_\lambda z_\lambda \right)^2 + c_k \left(\sum_{\lambda=1}^{k-2} c_\lambda z_\lambda^2 - \sum_{\lambda=1}^{k} c_\lambda \right).$$

Wir nehmen nun

$$|c_k| < c_{k-1}$$

an; damit folgt $A > 0$. Die Bedingung

$$0 \leq B^2 - AC$$

$$= -c_k c_{k-1} \left| \left(\sum_{\lambda=1}^{k-2} c_\lambda z_\lambda \right)^2 + (c_k + c_{k-1}) \sum_{\lambda=1}^{k-2} c_\lambda (z_\lambda^2 - 1) - (c_k + c_{k-1})^2 \right|$$

ist dann zum Beispiel bei Vorgabe von

$$z_\lambda \text{ mit } z_\lambda^2 > 2, \ \lambda = 1, \ldots, k-2,$$

$$c_\lambda > 1 \text{ für } \lambda = 1, \ldots, k-2$$

$$c_{k-1} = 2 \text{ und } c_k = -1$$

erfüllt.

Literaturhinweise

[1] Bauer, K. W.: Über die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1 \pm z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + \lambda w = 0.$$

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 221, 1966; Teil I, S. 48–84; Teil II, S. 176–196.

[2] Bauer, K. W.: Über eine der Differentialgleichung $(1 \pm z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} \pm \pm n(n+1) w = 0$ zugeordnete Funktionentheorie. Bonner Mathematische Schriften, Bd. 23, 1965.

[3] Magnus, W. und Oberhettinger, F.: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin 1948.

[4] Roelcke, W.: Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Math.-Nat. Klasse, Heidelberg, 1956.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1966

Band/Volume: 1965

Autor(en)/Author(s): Bauer Karl Wilhelm, Peschl Ernst

Artikel/Article: Ein allgemeiner Entwicklungssatz für die Lösungen der Differentialgleichungen (1 + [epsilon]zz?)² wzz? + [epsilon]n (n + 1)w = 0 in der Nähe isolierter Singularitäten 113-146