BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1965

MÜNCHEN 1966

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Miszellen zur hyperbolischen Geometrie. II

Von Oskar Perron in München

Mit 13 Figuren

Vorgelegt am 10. Dezember 1965

Übersicht

§ 1. Doppelverhältnis von Geraden und Punkten 153
§ 2. Doppelverhältnis von Punkten und Überpunkten . . 158
§ 3. Die Kreisformen als Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel 167
§ 4. Falsche Vermutung über den „Satz von Ptolemäus". 172
§ 5. Der Pascalsche Satz 173
§ 6. Wechselseitige Abstände von Punkten in der Ebene . 176
§ 7. Wechselseitige Abstände von Punkten im Raum . . 180

§ 1. Doppelverhältnis von Geraden und Punkten

Den Winkel zweier von einem Punkt M auslaufender Strahlen a, b bezeichnen wir mit (ab). Sind a, b, c, d, vier in einer Ebene von einem Punkt M auslaufende Strahlen, von denen keine zwei derselben Geraden angehören, so bezeichnen wir als ihr Doppelverhältnis (abgekürzt DV) $(abcd)$ den Ausdruck

$$(abcd) = \frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)}, \tag{1.1}$$

wobei die Winkel alle im gleichen Drehungssinn gemeint sind, also Vorzeichen haben. Dann ist klar, daß das DV unverändert bleibt, wenn wir einen Strahl durch den entgegengesetzten ersetzen, so daß wir auch vom DV der vier Geraden reden können, denen die vier Strahlen angehören. Bei Permutation der vier Strahlen (oder Geraden) ändert sich das DV in der aus der Euklidischen Geometrie bekannten Weise:

$$(abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba),$$
$$(adcb) = 1 : (abcd), \quad (acbd) = 1 - (abcd),$$

woraus die Werte für alle 24 Permutationen fließen. Außerdem gilt der

Satz 1. *Wenn von vier Geraden a, b, c, d eines Büschels drei fest gegeben sind, dann ist durch Angabe des DV $(abcd)$ die vierte eindeutig bestimmt.*

Sind A, B, C, D vier Punkte einer Geraden, so bezeichnen wir als ihr DV $(ABCD)$ den Ausdruck

$$(ABCD) = \frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} : \frac{\sinh(AD)}{\sinh(CD)}, \tag{1.2}$$

wobei die Strecken mit Richtungssinn gemeint sind. Selbstverständlich gelten auch hier bei Permutation der Punkte die entsprechenden Formeln. Wenn eine Gerade g vier Geraden a, b, c, d eines Büschels in den Punkten A, B, C, D schneidet, so ist in Fig. 1 nach dem Sinussatz

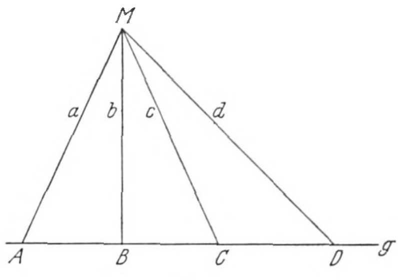

Fig. 1

$$\frac{\sinh(AB)}{\sin(ab)} = \frac{\sinh(AM)}{\sin(bg)}, \qquad \frac{\sinh(CB)}{\sin(cb)} = \frac{\sinh(CM)}{\sin(bg)},$$
$$\frac{\sinh(AD)}{\sin(ad)} = \frac{\sinh(AM)}{\sin(dg)}, \qquad \frac{\sinh(CD)}{\sin(cd)} = \frac{\sinh(CM)}{\sin(dg)},$$

woraus sofort folgt:

$$\frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} : \frac{\sinh(AD)}{\sinh CD)} = \frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)},$$

und zwar offensichtlich auch mit dem richtigen Vorzeichen, also

$$(1.3) \qquad (ABCD) = (abcd).$$

Betrachten wir jetzt vier Strahlen a, b, c, d mit einem gemeinsamen Ende E (also parallel), so sind die Winkel (ab) usw. alle gleich 0, und wir können das DV nicht wie oben definieren. Zu einer Definition verhilft uns der

Hilfssatz. *In dem Viereck $ABB'A'$, wo die Seiten AA' und BB' das Ende E gemein haben (Fig. 2), gilt die Formel*

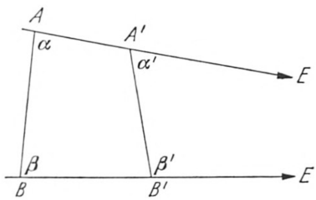

Fig. 2

$$\frac{\sinh(AB)}{\sinh(A'B')} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\exp(BB') = \frac{\sin\beta'}{\sin\beta}\exp(AA').$$

Beweis. Man wähle auf AA' einen Punkt C und verbinde ihn mit B. Der Schnittpunkt von CB mit $A'B'$ sei B''. Wenn dann C gegen das Ende E strebt, dann strebt B'' gegen B'. Nach dem Sinussatz ist, wenn $\sphericalangle ACB = \gamma$ gesetzt wird,

$$\frac{\sinh(AB)}{\sin\gamma} = \frac{\sinh(BC)}{\sin\alpha}, \quad \frac{\sinh(A'B'')}{\sin\gamma} = \frac{\sinh(B''C)}{\sin\alpha'},$$

also

$$\frac{\sin\alpha\sinh(AB)}{\sin\alpha'\sinh(A'B'')} = \frac{\sinh(BC)}{\sinh(B''C)} = \frac{\sinh(BB''+B''C)}{\sinh(B''C)}$$
$$= \sinh(BB'')\cdot\coth(B''C) + \cosh(BB'').$$

Läßt man jetzt C gegen E wandern, also B'' gegen B', so kommt

$$\frac{\sin\alpha\sinh(AB)}{\sin\alpha'\sinh(A'B')} = \sinh(BB')\cdot 1 + \cosh(BB') = \exp(BB').$$

Das ist bereits die erste Behauptung, die zweite ergibt sich daraus durch Rollentausch der beiden Parallelen.

Nach dem Hilfssatz ist nun in Fig. 3

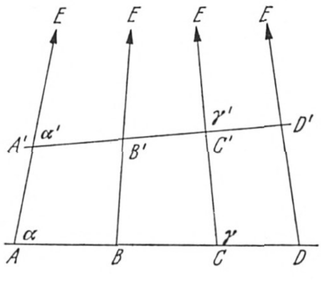

Fig. 3

$$\frac{\sin\alpha \sinh(AB)}{\sin\alpha' \sinh(A'B')} = \exp(BB'),$$

$$\frac{\sin\gamma \sinh(CB)}{\sin\gamma' \sinh(C'B')} = \exp(BB'),$$

$$\frac{\sin\alpha \sinh(AD)}{\sin\alpha' \sinh(A'D')} = \exp(DD'),$$

$$\frac{\sin\gamma \sinh(CD)}{\sin\gamma' \sinh(C'D')} = \exp(DD').$$

Daraus folgt

$$\frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} : \frac{\sinh(AD)}{\sinh(CD)} = \frac{\sinh(A'B')}{\sinh(C'B')} : \frac{\sinh(A'D')}{\sinh(C'D')}.$$

Hiernach dürfen und wollen wir das DV der vier Parallelstrahlen definieren als das DV der vier Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit den vier Strahlen.

Jetzt kommen wir zum Fall von vier Geraden a, b, c, d, die nicht einen gewöhnlichen Punkt oder ein Ende, sondern einen Überpunkt, also ein Lot gemein haben. Dann werden wir einfach das DV der vier Schnittpunkte dieses Lotes als DV der vier Geraden definieren. Man kann aber statt des Lotes auch jede andere Gerade nehmen, die die vier Geraden schneidet. Denn aus Fig. 4 liest man nach einem Hilfssatz, der in [8], § 7, Formel (I) zu finden ist, ab:

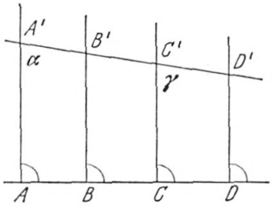

Fig. 4

$$\frac{\sinh(AB)}{\sinh(A'B')} = \frac{\sin\alpha}{\cosh(BB')}, \qquad \frac{\sinh(CB)}{\sinh(C'B')} = \frac{\sin\gamma}{\cosh(BB')},$$

$$\frac{\sinh(AD)}{\sinh(A'D')} = \frac{\sin\alpha}{\cosh(DD')}, \qquad \frac{\sinh(CD)}{\sinh(C'D')} = \frac{\sin\gamma}{\cosh(DD')}.$$

Daher ist

$$\frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} : \frac{\sinh(AD)}{\sinh(CD)} = \frac{\sinh(A'B')}{\sinh(C'B')} : \frac{\sinh(A'D')}{\sinh(C'D')},$$

also $(ABCD) = (A'B'C'D')$. W. z. b. w.

Nun fehlt uns noch das DV von vier Punkten, wenn einer davon ein Ende E ist. Wir definieren es durch Grenzprozeß, indem wir einen endlichen Punkt D gegen E hinwandern lassen, also

$$\begin{aligned}(ABCE) &= \lim_{D\to E}(ABCD) = \lim \frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} : \frac{\sinh(AD)}{\sinh(CD)}\\ &= \frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} : \lim \frac{\sinh(AC+CD)}{\sinh(CD)}\\ &= \frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} : \lim\,[\sinh(AC)\coth(CD) + \cosh(AC)].\end{aligned}$$

Wählt man die nach dem Ende E hinlaufende Richtung als die positive, so ist $\lim\coth(CD) = 1$, und es kommt

$$\begin{aligned}(1.4)\qquad (ABCE) &= \frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} : [\sinh(AC) + \cosh(AC)]\\ &= \frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} : \exp(AC) = \frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)}\exp(CA).\end{aligned}$$

Strebt D gegen das andere Ende E', so ist $\lim\coth(CD) = -1$ und es kommt

(1.5)

$$(ABCE') = \frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} : \exp(-AC) = \frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} \exp(AC).$$

Wenn schließlich beide Enden zu unseren vier Punkten gehören, etwa $D = E$, $B = E'$, so können wir an (1.4) anknüpfen und erhalten zunächst

$$\begin{aligned}(ABCE) &= \frac{\sinh(AC + CB)}{\sinh(CB)} \exp(CA) \\ &= [\sinh(AC)\coth(CB) + \cosh(AC)] \exp(CA).\end{aligned}$$

Für $B \to E'$ strebt $\coth(CB)$ gegen -1, und es kommt

(1.6) $$(AE'CE) = \exp(-AC)\exp(CA) = \exp(2CA).$$

Wir überlassen es dem Leser, sich zu überzeugen, daß auch in diesen Fällen, wenn wir die vier Punkte der Geraden, worunter ein oder zwei Enden sein können, mit irgendeinem Punkt außerhalb der Geraden verbinden, das DV der vier Verbindungsgeraden gleich dem DV der vier Punkte ist. Dazu sind nur an Fig. 1 nochmals die Grenzprozesse $D \to E$ und $B \to E'$ durchzuführen.

§ 2. Doppelverhältnis von Punkten und Überpunkten

Bisher ist alles nicht sehr verschieden von dem, was in der Euklidischen projektiven Geometrie über Schneiden und Projizieren, über projektive Strahlenbüschel und Punktreihen gilt. In der hyperbolischen Geometrie kommt aber noch etwas Neues hinzu, nämlich der Fall, daß die vier Geraden eines Büschels alle oder zum Teil eine Gerade g überhaupt nicht schneiden, also einen Überpunkt, das heißt ein Lot mit g gemein haben. Es erhebt sich die Frage, was man unter dem DV $(ABCD)$ von vier Punkten einer Geraden g verstehen soll, wenn auch Überpunkte dabei sind. Zur Beantwortung dieser Frage verbinden wir einen beliebigen nicht auf g gelegenen Punkt M mit A, B, C, D, wobei als Verbindungsgerade von M mit einem Überpunkt D, der ja in Wahrheit ein Lot zu g mit einem gewissen Fußpunkt D_1 ist, eine

Gerade durch M verstanden werden muß, die mit g den Überpunkt D, also das in D_1 auf g errichtete Lot ebenfalls zum Lot hat; das ist einfach das von M auf dieses Lot gefällte Lot. So bekommen wir von M auslaufend vier Strahlen a, b, c, d, die ein gewisses DV $(abcd)$ haben. *Es wird sich zeigen, daß dieses DV von der Wahl des Punktes M gar nicht abhängt*, so daß wir das DV $(ABCD)$ einfach als $(abcd)$ definieren können.

Wir beginnen mit dem Fall, daß die Gerade g von den Geraden a, b, c in A, B, C geschnitten wird, mit der Geraden d aber einen Überpunkt, nämlich das Lot D_1D_2 gemein hat (Fig. 5)[1]. Dann ist zunächst nach dem Sinussatz

$$\frac{\sinh(AB)}{\sin(ab)} = \frac{\sinh(AM)}{\sin(bg)}, \qquad \frac{\sinh(CB)}{\sin(cb)} = \frac{\sinh(CM)}{\sin(bg)},$$

und nach dem schon oben benutzten Hilfssatz aus [8], § 7, Formel (I)

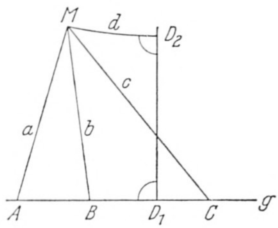

Fig. 5

$$\frac{\sinh(D_1D_2)}{\sinh(AM)} = \frac{\sin(ad)}{\cosh(AD_1)}, \qquad \frac{\sinh(D_1D_2)}{\sinh(CM)} = \frac{\sin(cd)}{\cosh(CD_1)}.$$

Aus den vier Formeln folgt

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)} = \frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} : \frac{\cosh(AD_1)}{\cosh(CD_1)}, \tag{2.1}$$

und zwar gleich mit dem richtigen Vorzeichen; man beachte, daß ja cosh stets positiv ist. Hier steht links das DV $(abcd)$ und die rechte Seite zeigt, daß es von M unabhängig ist. Wir können also

[1] In allen Figuren außer in Fig. 11 kommen nur gerade Linien vor, die sich aber wegen der aus bekannten Gründen unvermeidlichen Verzerrungen zum Teil starke Krümmung gefallen lassen müssen. Die durch kleine Viertelkreise markierten Winkel sind durchweg rechte.

definieren:

$$(2.2) \qquad (ABCD) = \frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} : \frac{\cosh(AD_1)}{\cosh(CD_1)}.$$

Übrigens dürfte der Punkt M auch ein Ende sein, wie sich sofort durch Grenzübergang ergibt. Wichtig ist aber, daß er sogar ein Überpunkt sein darf, das heißt eine Gerade g', auf der a, b, c, d senkrecht stehen. An Stelle von Fig. 5 tritt dann Fig. 5a. Allerdings ist für M nicht jeder Überpunkt, das heißt für g' nicht jede Gerade zulässig. Denn d muß ja auf g' und auf dem in D_1 errichteten Lot zu g senkrecht stehen; g' muß also mit diesem Lot ein Lot gemein haben, das heißt, zu ihm überparallel sein. Entsprechendes gilt bei Fig. 6a. Aus Fig. 5a liest man zunächst nach dem bereits benutzten Hilfssatz aus [8], § 7, Formel (I) ab:

$$\frac{\sinh(A'B')}{\sinh(AB)} = \frac{\sin(bg)}{\cosh(AA')}, \qquad \frac{\sinh(C'B')}{\sinh(CB)} = \frac{\sin(bg)}{\cosh(CC')},$$

woraus durch Division folgt:

$$\frac{\cosh(AA')}{\cosh(CC')} = \frac{\sinh(AB)}{\sinh(A'B')} : \frac{\sinh(CB)}{\sinh(C'B')}.$$

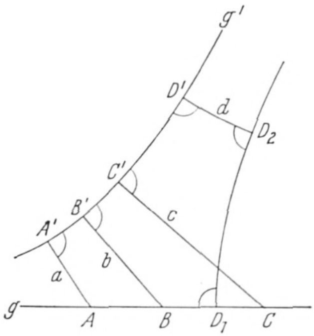

Fig. 5a

Ferner ist nach einem Hilfssatz aus [8], § 5 über das Fünfeck mit vier rechten Winkeln $D_1 D_2 D' A' A$

$$\sin(ag)\cosh(AA') = \sinh(D_1 D_2)\sinh(D'D_2),$$
$$\sin(ag)\cosh(AD_1) = \sinh(A'D')\sinh(D'D_2).$$

Also durch Division

$$\frac{\cosh(AA')}{\cosh(AD_1)} = \frac{\sinh(D_1 D_2)}{\sinh(A'D')} \text{ und analog } \frac{\cosh(CC')}{\cosh(CD_1)} = \frac{\sinh(D_1 D_2)}{\sinh(C'D')},$$

woraus folgt

$$\frac{\cosh(AA')}{\cosh(CC')} = \frac{\cosh(AD_1)}{\sinh(A'D')} : \frac{\cosh(CD_1)}{\sinh(C'D')}.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke für $\frac{\cosh(AA')}{\cosh(CC')}$ einander gleich, so kommt nach leichter Umstellung

$$\frac{\sinh(A'B')}{\sinh(C'B')} : \frac{\sinh(A'D')}{\sinh(C'D')} = \frac{\sinh(AB)}{\sinh(CB)} : \frac{\cosh(AD_1)}{\cosh(CD_1)}.$$

Jetzt steht links wieder das DV $(abcd)$, welches ja definitionsgemäß gleich dem DV $(A'B'C'D')$ ist, so daß die Formel mit (2.1) übereinstimmt.

Wir kommen jetzt zum Fall, daß zwei Gerade c und d über-

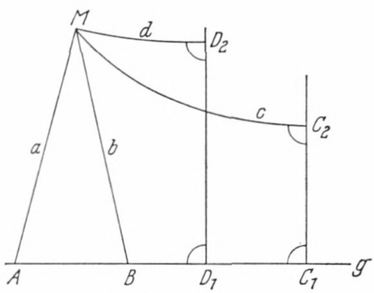

Fig. 6

parallel zu g sind (Fig. 6). Zunächst ist nach dem Sinussatz

$$(2.3) \qquad \frac{\sinh(AB)}{\sin(ab)} = \frac{\sinh(AM)}{\sin(bg)},$$

sodann nach dem schon mehrfach benutzten Hilfssatz aus [8], § 7, Formel (I)

$$(2.4) \qquad \left(\frac{\sinh(C_1 C_2)}{\sinh(BM)}\right) = \frac{\sin(cb)}{\cosh(C_1 B)} = \frac{\sin(bg)}{\cosh(MC_2)},$$

$$(2.5) \qquad \frac{\sinh(D_1 D_2)}{\sinh(AM)} = \frac{\sin(ad)}{\cosh(AD_1)}.$$

Bezeichnet man den spitzen Winkel, unter dem sich $D_1 D_2$ und $M C_2$ schneiden, mit φ, so ist nach [4], § 28, Formel (VI)

$$\cos\varphi = \sin(c\,d)\cosh(M D_2)$$

und nach [4], § 29, Formel (III)

$$\cos\varphi = \sinh(C_1 D_1)\sinh(C_1 C_2).$$

Daher ist

$$\frac{\sin(cd)}{\sinh(C_1 D_1)} = \frac{\sinh(C_1 C_2)}{\cosh(M D_2)}. \tag{2.6}$$

Nun ist aber

$$\sinh(C_1 C_2)\cosh(M C_2) = \sinh(D_1 D_2)\cosh(M D_2), \tag{2.7}$$

da beide Seiten nach [4], § 29, Formel (I) gleich sinh des von M auf g gefällten Lotes sind. Aus den letzten beiden Gleichungen folgt noch:

$$\frac{\sin(cd)}{\sinh(C_1 D_1)} = \frac{\sinh(D_1 D_2)}{\cosh(M C_2)}. \tag{2.8}$$

Nun ergibt sich aus (2.3) und (2.4) durch Multiplikation

$$\frac{\sinh(A B)}{\sin(ab)}\cdot\frac{\sin(cb)}{\cosh(C_1 B)} = \frac{\sinh(A M)}{\cosh(M C_2)}, \tag{2.9}$$

während aus (2.5) und (2.8) folgt:

$$\frac{\cosh(A D_1)}{\sin(ad)}\cdot\frac{\sin(cd)}{\sinh(C_1 D_1)} = \frac{\sinh(A M)}{\sinh(D_1 D_2)}\cdot\frac{\sinh(D_1 D_2)}{\cosh(M C_2)} = \frac{\sinh(A M)}{\cosh(M C_2)}.$$

Durch Vergleich mit (2.9) erhält man nach leichter Umstellung

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)} = \frac{\sinh(A B)}{\cosh(C_1 B)} : \frac{\cosh(A D_1)}{\sinh(C_1 D_1)}, \tag{2.10}$$

und zwar mit dem richtigen Vorzeichen. Jetzt steht links das DV $(abcd)$ und die rechte Seite zeigt, daß es von M unabhängig ist. Wir können also definieren:

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{\sinh(A B)}{\cosh(C_1 B)} : \frac{\cosh(A D_1)}{\sinh(C_1 D_1)}. \tag{2.11}$$

Auch hier kann M durch Grenzübergang zu einem Ende gemacht werden. Aber auch ein Überpunkt ist wieder zulässig. An Stelle von Fig. 6 tritt dann Fig. 6a. Aus dieser liest man zunächst nach dem Hilfssatz aus [8], § 7, Formel (I) ab:

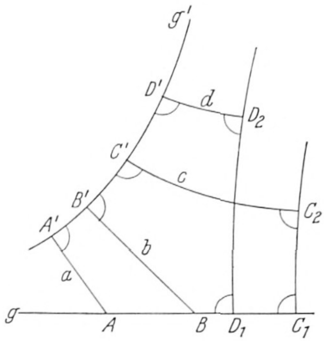

Fig. 6a

$$\frac{\sinh(A'B')}{\sinh(AB)} = \frac{\sin(bg)}{\cosh(AA')}; \tag{2.12}$$

sodann aus den zwei Fünfecken mit vier rechten Winkeln $BB'C'C_2C_1$ und $AA'D'D_2D_1$ gemäß dem Hilfssatz aus [8] § 5:

$$\sin(bg)\cosh(C_1B) = \sinh(C'B')\sinh(C'C_2), \tag{2.13}$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin(ag)\cosh(AD_1) &= \sinh(A'D')\sinh(D'D_2),\\ \sin(ag)\cosh(AA') &= \sinh(D_1D_2)\sinh(D'D_2). \end{aligned}\right. \tag{2.14}$$

Aus den letzten beiden Formeln folgt sofort:

$$\frac{\sinh(A'D')}{\cosh(AD_1)} = \frac{\sinh(D_1D_2)}{\cosh(AA')}. \tag{2.15}$$

Wenn man den spitzen Winkel, unter dem sich D_1D_2 und $C'C_2$ schneiden, mit φ bezeichnet, so ist nach [4], § 29, Formel (III)

$$\cos\varphi = \sinh(C'D')\sinh(D'D_2)$$

und auch $$\cos\varphi = \sinh(C_1C_2)\sinh(C_1D_1).$$

Daher

$$\frac{\sinh(C'D')}{\sinh(C_1D_1)} = \frac{\sinh(C_1C_2)}{\sinh(D'D_2)}.$$

Nun ist aber

$$\sinh(C_1C_2)\sinh(C'C_2) = \sinh(D_1D_2)\sinh(D'D_2).$$

Denn beide Seiten sind, wenn g und g' sich schneiden, etwa unter dem Winkel ν, nach [4], § 29, Formel (III) gleich $\cos\nu$; wenn sie sich aber nicht schneiden und infolgedessen ein gemeinsames Lot n haben, nach dem Hilfssatz aus [8], § 5 gleich $\sin\frac{\pi}{2}\cosh n$. Aus den letzten beiden Formeln folgt jetzt

$$\frac{\sinh(C'D')}{\sinh(C_1D_1)} = \frac{\sinh(D_1D_2)}{\sinh(C'C_2)}. \tag{2.16}$$

Nun ergibt sich aus (2.12) und (2.13) durch Elimination von $\sin(bg)$

$$\frac{\sinh(A'B')}{\sinh(AB)}\cdot\frac{\cosh(C_1B)}{\sinh(C'B')} = \frac{\sinh(C'C_2)}{\cosh(AA')},$$

während aus (2.15) und (2.16) folgt:

$$\frac{\sinh(A'D')}{\cosh(AD_1)}\cdot\frac{\sinh(C_1D_1)}{\sinh(C'D')} = \frac{\sinh(D_1D_2)}{\cosh(AA')}\,\frac{\sinh(C'C_2)}{\sinh(D_1D_2)} = \frac{\sinh(C'C_2)}{\cosh(AA')}.$$

In den letzten beiden Formeln sind die rechten Seiten einander gleich, also auch die linken, woraus sich nach leichter Umstellung ergibt:

$$\frac{\sinh(A'B')}{\sinh(C'B')} : \frac{\sinh(A'D')}{\sinh(C'D')} = \frac{\sinh(AB)}{\cosh(C_1B)} : \frac{\cosh(AD_1)}{\sinh(C_1D_1)},$$

und zwar mit dem richtigen Vorzeichen. Die linke Seite ist definitionsgemäß das DV $(abcd)$, so daß die Formel mit (2.10) übereinstimmt.

Wir wenden uns jetzt dem Fall zu, daß drei Gerade b, c, d überparallel zu g sind (Fig. 7). Zunächst folgt aus den Vier-

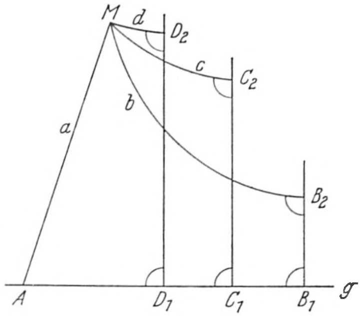

Fig. 7

ecken MAB_1B_2 und MAD_1D_2 nach [8], § 7, Formel (I)

$$\frac{\sinh(B_1B_2)}{\sinh(AM)} = \frac{\sin(ab)}{\cosh(AB_1)}, \qquad \frac{\sinh(D_1D_2)}{\sinh(AM)} = \frac{\sin(ad)}{\cosh(AD_1)},$$

also durch Division:

$$\frac{\sin(ab)}{\cosh(AB_1)} \cdot \frac{\cosh(AD_1)}{\sin(ad)} = \frac{\sinh(B_1B_2)}{\sinh(D_1D_2)}. \tag{2.17}$$

Ferner folgt aus dem überschlagenen Fünfeck $MD_2D_1C_1C_2$, das auch schon in Fig. 6 vorkommt, genau wie dort (2.6) und (2.8), also

$$\frac{\sin(cd)}{\sinh(C_1D_1)} = \frac{\sinh(C_1C_2)}{\cosh(MD_2)} = \frac{\sinh(D_1D_2)}{\cosh(MC_2)},$$

und analog aus $MC_2C_1B_1B_2$

$$\frac{\sin(cb)}{\sinh(C_1B_1)} = \frac{\sinh(B_1B_2)}{\cosh(MC_2)} = \frac{\sinh(C_1C_2)}{\cosh(MB_2)}.$$

Daher durch Division:

$$\frac{\sin(cb)}{\sinh(C_1B_1)} \cdot \frac{\sinh(C_1D_1)}{\sin(cd)} = \frac{\sinh(B_1B_2)}{\sinh(D_1D_2)}. \tag{2.18}$$

In (2.17) und (2.18) sind die rechten Seiten einander gleich, also auch die linken, woraus sich nach leichter Umstellung ergibt:

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)} = \frac{\cosh(AB_1)}{\sinh(C_1B_1)} : \frac{\cosh(AD_1)}{\sinh(C_1D_1)}. \tag{2.19}$$

Daher ist das links stehende DV $(abcd)$ wieder von M unabhängig und wir können definieren

$$(2.20)\qquad (ABCD) = \frac{\cosh(AB_1)}{\sinh(C_1B_1)} : \frac{\cosh(AD_1)}{\sinh(C_1D_1)}.$$

Natürlich dürfte M auch wieder ein Ende sein, ja sogar ein Überpunkt, wofür wir den Nachweis dem Leser überlassen können, der nur die der Fig. 7 entsprechende Fig. 7a zu zeichnen und dann nur die schon bisher gebrauchten Hilfssätze und Formeln zu benutzen braucht.

Schließlich ist in Fig. 8 der Fall gezeichnet, daß a, b, c, d alle vier zu g überparallel sind. Aus den verschiedenen überschlagenen Fünfecken liest man analog zu den Formeln (2.6) und (2.8) ab:

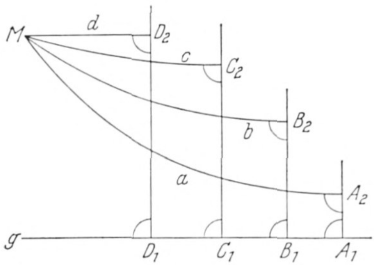

Fig. 8

$$\frac{\sin(ab)}{\sinh(A_1B_1)} = \frac{\sinh(A_1A_2)}{\cosh(MB_2)}, \qquad \frac{\sinh(cb)}{\sinh(C_1B_1)} = \frac{\sinh(C_1C_2)}{\cosh(MB_2)},$$

$$\frac{\sin(ad)}{\sinh(A_1D_1)} = \frac{\sinh(A_1A_2)}{\cosh(MD_2)}, \qquad \frac{\sin(cd)}{\sinh(C_1D_1)} = \frac{\sinh(C_1C_2)}{\cosh(MD_2)}.$$

Wenn man jetzt die erste dieser Formeln durch die zweite dividiert, kommt rechts dasselbe heraus, wie wenn man die dritte durch die vierte dividiert. Also muß auch links dasselbe herauskommen, wodurch sich nach leichter Umordnung ergibt:

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)} = \frac{\sinh(A_1B_1)}{\sinh(C_1B_1)} : \frac{\sinh(A_1D_1)}{\sinh(C_1D_1)},$$

und zwar mit dem richtigen Vorzeichen. Daher ist das DV $(abcd)$

wieder von M unabhängig, und wir können definieren:

$$(2.21) \qquad (A\,B\,C\,D) = \frac{\sinh(A_1 B_1)}{\sinh(C_1 B_1)} : \frac{\sinh(A_1 D_1)}{\sinh(C_1 D_1)}.$$

Das gilt natürlich auch wieder, wenn M ein Ende ist, und auch, wenn M ein Überpunkt ist, wobei wir den Beweis wieder dem Leser überlassen können, der nur die der Fig. 8 entsprechende Fig. 8a zu zeichnen und nochmals unsere bereits benutzten Formeln anzuwenden braucht.

Satz 2. *Wenn von vier Punkten oder Überpunkten A, B, C, D einer Geraden drei fest gegeben sind, dann ist durch Angabe des DV $(A\,B\,C\,D)$ der vierte eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sind a, b, c, d die Verbindungsgeraden von A, B, C, D mit einem beliebigen Punkt M, so ist nach unseren Definitionen $(A\,B\,C\,D) = (a\,b\,c\,d)$, so daß der Satz 2 unmittelbar aus Satz 1 folgt.

Man mag sich für die Formeln (2.2), (2.11), (2.20), (2.21) die mechanische Regel merken: Es kommen rechts dieselben Buchstabenpaare wie beim gewöhnlichen DV $(A\,B\,C\,D)$. Bei den Überpunkten setzt man den Index 1 bei und bei Strecken der Form $X\,Y$ oder $X_1\,Y_1$ nimmt man den sinh, bei Strecken der Form $X\,Y_1$ aber den cosh. Übrigens werden wir die Formeln selbst gar nicht gebrauchen, sondern nur die durch sie vermittelte Erkenntnis, daß das DV $(a\,b\,c\,d)$ von M unabhängig ist.

§ 3. Die Kreisformen als Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel

Satz 3.1. *Sind A, B, C, D vier Punkte auf einer Kreisform (Kreis oder Grenzkreis oder Abstandslinie) und ist P ein variabler Punkt auf dieser Kreisform, dann ist das DV der vier Verbindungsstrahlen von P mit A, B, C, D konstant.*

Beweis. Wir bezeichnen den Strahl $P\,A$ mit a, $P\,B$ mit b usw. Da P, A, B drei Punkte der Kreisform sind, so ist nach [7], Seite 162

$$\frac{\cosh\frac{PA}{2}\cosh\frac{PB}{2}\sin(ab)}{\sinh\frac{AB}{2}} = \coth r \text{ oder } 1 \text{ oder } \tanh s, \tag{3.1}$$

je nachdem es sich um einen Kreis vom Radius r oder einen Grenzkreis oder eine Abstandslinie mit dem Abstand s von ihrer Null-Linie handelt. Ebenso ist auch

$$\frac{\cosh\frac{PC}{2}\cosh\frac{PB}{2}\sin(cb)}{\sinh\frac{CB}{2}} = \coth r \text{ oder } 1 \text{ oder } \tanh s,$$

$$\frac{\cosh\frac{PA}{2}\cosh\frac{PD}{2}\sin(ad)}{\sinh\frac{AD}{2}} = \coth r \text{ oder } 1 \text{ oder } \tanh s,$$

$$\frac{\cosh\frac{PC}{2}\cosh\frac{PD}{2}\sin(cd)}{\sinh\frac{CD}{2}} = \coth r \text{ oder } 1 \text{ oder } \tanh s.$$

Hieraus folgt sofort

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)} = \frac{\sinh\frac{AB}{2}}{\sinh\frac{CB}{2}} : \frac{\sinh\frac{AD}{2}}{\sinh\frac{CD}{2}}.$$

Dabei sind die Winkel links zunächst zwischen 0 und π gedacht und die Strecken rechts positiv. Wir können aber nachträglich die Winkel auch gemäß einem bestimmten Umlaufsinn festlegen, so daß links das DV $(abcd)$ steht, wenn wir nur auch rechts die Strecken gemäß dem Umlaufsinn ihrer Bogen mit Vorzeichen verstehen. Die Formel zeigt dann an, daß dieses DV von P unabhängig ist. W. z. b. w.

Manchmal ist es nützlich, zwei Abstandslinien, die zu beiden Seiten ihrer gemeinsamen Null-Linie im gleichen Abstand liegen, zusammen als **ein** Gebilde anzusehen (Abstandslinienzwillingspaar). Dann gilt die folgende Ergänzung zu Satz 3.1:

Satz 3.2. *Sind A, B, C, D vier Punkte eines Abstandslinienzwillingspaars und ist P ein variabler Punkt auf diesem Zwillingspaar, dann ist das DV der vier Verbindungsstrahlen von P mit A, B, C, D konstant.*

Zum Beweis benötigen wir den

Hilfssatz. *In Fig. 9 seien bei U, V, W rechte Winkel und die drei Lote s seien gleich lang. Werden die drei Seiten des Dreiecks ABC mit a, b, c und die Winkel mit α, β, γ bezeichnet, dann ist*

$$\tanh s = \frac{\sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{c}{2}\sin\alpha}{\sinh\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{\cosh\frac{a}{2}\sinh\frac{c}{2}\sin\beta}{\cosh\frac{b}{2}}.$$

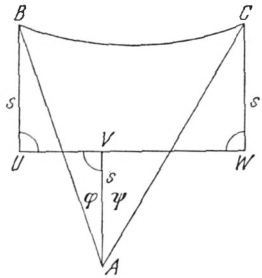

Fig. 9

Beweis. Nach [4], § 28, Formel (III) ist

$$\cos\varphi = \tanh s\ \coth\frac{c}{2}, \quad \cos\psi = \tanh s\ \coth\frac{b}{2}.$$

Daher

$$\cos\alpha = \cos(\varphi+\psi) = \tanh^2 s\cdot\coth\frac{b}{2}\ \coth\frac{c}{2}$$
$$-\sqrt{1-\tanh^2 s\ \coth^2\left(\frac{b}{2}\right)}\ \sqrt{1-\tanh^2 s\ \coth^2\left(\frac{c}{2}\right)}.$$

Bringt man das erste Glied der rechten Seite nach links und quadriert, dann kommt

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\ \tanh^2 s\ \coth\frac{b}{2}\ \coth\frac{c}{2}$$
$$= 1-\tanh^2 s\left[\coth^2\left(\frac{b}{2}\right)+\coth^2\left(\frac{c}{2}\right)\right],$$

und durch Auflösung nach $\tanh^2 s$:

$$\tanh^2 s = \frac{\sin^2 \alpha}{\coth^2\left(\frac{b}{2}\right) + \coth^2\left(\frac{c}{2}\right) - 2\cos\alpha \coth\frac{b}{2}\coth\frac{c}{2}}.$$

Nun ist nach dem ersten Cosinussatz ([4], § 30)

$$\cos\alpha = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}$$

$$= \frac{\sinh^2\left(\frac{b}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{c}{2}\right) + 2\sinh^2\left(\frac{b}{2}\right)\sinh^2\left(\frac{c}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{a}{2}\right)}{2\sinh\frac{b}{2}\cosh\frac{b}{2}\sinh\frac{c}{2}\cosh\frac{c}{2}}.$$

Setzt man das im Nenner der vorigen Formel ein, dann geht sie nach ganz trivialer Rechnung über in

$$\tanh^2 s = \frac{\sinh^2\left(\frac{b}{2}\right)\sinh^2\left(\frac{c}{2}\right)\sin^2\alpha}{\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right)},$$

und durch Wurzelziehen kommt:

$$\tanh s = \frac{\sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{c}{2}\sin\alpha}{\sinh\frac{a}{2}}.$$

Damit ist die erste Formel des Hilfssatzes bewiesen. Die zweite ergibt sich daraus sofort durch Anwendung des Sinussatzes $\frac{\sin\alpha}{\sinh a} = \frac{\sin\beta}{\sinh b}$ auf sie.

Nunmehr ist Satz 3.2 leicht zu beweisen. Man muß nur auf die vier Dreiecke PAB, PCB, PAD, PCD, falls die drei Ecken demselben Zwilling angehören, die Formel (3.1), und falls eine Ecke dem einen, die andern beiden aber dem anderen Zwilling des Paares angehören, den Hilfssatz anwenden. Liegen z. B. A und B auf dem einen, C und D auf dem andern Zwilling des Paares, so gilt für Punkte P des ersten Zwillings

$$\tanh s = \frac{\cosh\frac{PA}{2}\cosh\frac{PB}{2}\sin(ab)}{\sinh\frac{AB}{2}},$$

$$\tanh s = \frac{\sinh\frac{PC}{2}\cosh\frac{PB}{2}\sin(cb)}{\cosh\frac{CB}{2}},$$

$$\tanh s = \frac{\cosh\frac{PA}{2}\sinh\frac{PD}{2}\sin(ad)}{\cosh\frac{AD}{2}},$$

$$\tanh s = \frac{\sinh\frac{PC}{2}\sinh\frac{PD}{2}\sin(cd)}{\sinh\frac{CD}{2}},$$

woraus folgt:

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)} = \frac{\sinh\frac{AB}{2}}{\cosh\frac{CB}{2}} : \frac{\cosh\frac{AD}{2}}{\sinh\frac{CD}{2}}. \tag{3.2}$$

Für Punkte P auf dem andern Zwilling ist

$$\tanh s = \frac{\sinh\frac{PA}{2}\sinh\frac{PB}{2}\sin(ab)}{\sinh\frac{AB}{2}},$$

$$\tanh s = \frac{\cosh\frac{PC}{2}\sinh\frac{PB}{2}\sin(cb)}{\cosh\frac{CB}{2}},$$

$$\tanh s = \frac{\sinh\frac{PA}{2}\cosh\frac{PD}{2}\sin(ad)}{\cosh\frac{AD}{2}},$$

$$\tanh s = \frac{\cosh\frac{PC}{2}\cosh\frac{PD}{2}\sin(cd)}{\sinh\frac{CD}{2}},$$

woraus abermals (3.2) folgt. Das DV $(abcd)$ ist also in der Tat von P unabhängig. Bei anderer Verteilung der Punkte A, B, C, D auf die beiden Zwillinge des Paares kommen ähnliche Formelquadrupel; es sind nur einige sinh mit cosh vertauscht.

§ 4. Falsche Vermutung über den Satz von Ptolemäus

Für ein Viereck $ABCD$, dessen vier Ecken auf einer Abstandslinie liegen, gilt der „Satz von Ptolemäus"

(4.1)
$$\sinh\frac{AB}{2}\sinh\frac{CD}{2}+\sinh\frac{BC}{2}\sinh\frac{AD}{2}=\sinh\frac{AC}{2}\sinh\frac{BD}{2}$$

(vgl. [5] oder [6] oder auch [7], § 3). Nach den Erfahrungen des vorigen Paragraphen könnte man vermuten, daß der Satz vielleicht auch gilt, wenn die vier Ecken nur auf einem Abstandslinienzwillingspaar liegen. Das trifft aber nicht zu, wie folgendes Beispiel zeigt (Fig. 10). A, B, C mögen auf dem einen Zwilling des Paares liegen und es sei $AB = BC$. D liege auf dem andern Zwilling und sei das Spiegelbild von B an der gemeinsamen Null-Linie. Würde jetzt der Satz von Ptolemäus, also die Formel (4.1) gelten, so wäre auf Grund trivialer Kongruenzen auch

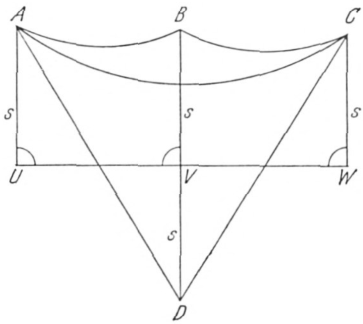

Fig. 10

$$(4.2)\qquad 2\sinh\frac{AB}{2}\sinh\frac{AD}{2}=\sinh\frac{AC}{2}\sinh s.$$

Nun ist aber nach [4], § 29, Formel (I)

$$\sinh\frac{AC}{2}=\cosh s\,\sinh(UV),$$

$$\sinh\frac{AB}{2}=\cosh s\,\sinh\frac{UV}{2},$$

und nach [4], § 28, Formel (IV)

$$\cosh \frac{AD}{2} = \cosh s \cosh \frac{UV}{2},$$

so daß die Formel (4.2) übergeht in:

$$2 \cosh s \sinh \frac{UV}{2} \sqrt{\cosh^2 s \cosh^2 \left(\frac{UV}{2}\right) - 1}$$
$$= \cosh s \sinh (UV) \sinh s.$$

Daraus würde sofort folgen:

$$\sqrt{\cosh^2 s \cosh^2 \left(\frac{UV}{2}\right) - 1} = \cosh \frac{UV}{2} \sinh s,$$

und nach Quadrieren: $\cosh \frac{UV}{2} = 1$, was offenbar falsch ist.

§ 5. Der Pascalsche Satz

Hilfssatz. *Wenn zwei Gerade p und q sich in einem Punkt A schneiden und wenn auf p und q je drei Punkte B, R, U und S, C, V so gelegen sind, daß die Doppelverhältnisse $(ABRU)$ und $(ASCV)$ einander gleich sind, dann haben die drei Verbindungsgeraden BS, RC, UV einen Punkt W (eventuell auch Ende oder Überpunkt) gemein.*

Zusatz. *Der Hilfssatz gilt auch dann, wenn die Punkte B, R, U und S, C, V alle oder zum Teil Überpunkte, also gewisse Gerade, nämlich Lote zu p bezw. q sind, vorausgesetzt, daß die drei Verbindungsgeraden BS, RC, UV überhaupt existieren und daß der Schnittpunkt (eventuell Ende oder Überpunkt) von zweien (etwa RC und UV, er heiße W) und einer der gegebenen Punkte der dritten (etwa B) eine Verbindungsgerade WB hat.*

Zur Erläuterung sei daran erinnert, daß als Verbindungsgerade eines gewöhnlichen Punktes P mit einem Überpunkt, der ja eine Gerade g ist, das von P auf g gefällte Lot gilt. Zwei Überpunkte, also gewisse Gerade, haben, wenn sie sich als Gerade nicht schneiden, ein gemeinsames Lot, welches dann als ihre Verbindungsgerade gilt; wenn sie sich aber als Gerade schneiden, haben sie kein gemeinsames Lot, dann gibt es keine Verbindungsgerade.

Beweis des Hilfssatzes. Die Verbindungsgeraden RC und UV haben einen Punkt W (eventuell Ende oder Lot) gemein. Wir verbinden W mit A und mit B und schneiden WB mit q in T. Dann ist $(ABRU) = (ATCV)$. Da aber nach Voraussetzung auch $(ABRU) = (ASCV)$ ist, muß $T = S$ sein (nach Satz 2). Daher liegt auf WB auch der Punkt S oder, anders ausgedrückt, BS enthält auch den Punkt W. W. z. b. w.

Der Beweis des Zusatzes verläuft auf Grund der gemachten Voraussetzungen und von Satz 2 wörtlich ebenso.

Nunmehr können wir den Pascalschen Satz beweisen:

Satz 5.1. *Wenn die Ecken eines Sechsecks $PDP'BAC$ auf einer Kreisform (einschließlich Abstandslinienzwilling) liegen, dann liegen die drei Schnittpunkte der drei Paare von Gegenseiten*

$$U = \text{Schnitt von } PD \text{ mit } BA,$$
$$V = \text{Schnitt von } DP' \text{ mit } AC,$$
$$W = \text{Schnitt von } P'B \text{ mit } CP,$$

falls sie existieren, auf einer Geraden (Fig. 11).

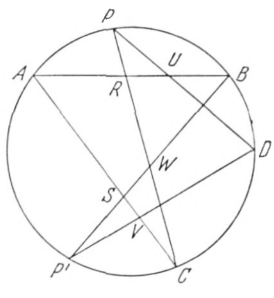

Fig. 11

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß auch die Schnittpunkte R und S der Figur existieren. Dann ist nach Satz 3.1 und 3.2 das DV der vier Strahlen von P nach A, B, C, D gleich dem

DV der vier Strahlen von P' nach A, B, C, D. Das erstgenannte DV ist aber auch gleich $(A\,B\,R\,U)$ und das zweitgenannte gleich $(A\,S\,C\,V)$. Nach dem Hilfssatz gehen also die Geraden BS, RC, UV durch einen Punkt. Das sind aber die Geraden $P'B$, CP, UV. Der Schnittpunkt der ersten beiden ist W, also geht UV durch W. W. z. b. w. Für die Euklidische projektive Geometrie wäre damit der Pascalsche Satz erledigt; es ist das der übliche Beweis, wie man ihn z. B. neuerdings im Buch von Lense [9] auf Seite 60 f. findet. In der hyperbolischen Geometrie ist aber auch mit der Möglichkeit zu rechnen, daß die Schnittpunkte R und S nicht als wirkliche Punkte (oder Enden) existieren. Dann können wir aber mit Hilfe des Zusatzes genau so schließen.

In der hyperbolischen Geometrie gibt es aber auch noch die Fälle, daß die Punkte U, V, W zum Teil oder sämtlich Überpunkte sind. Das führt zu einem ganzen Kaleidoskop verschiedener Pascalscher Sätze, indem zu Satz 5.1 noch folgende Ergänzung tritt:

Satz 5.2. *Wenn unter den Voraussetzungen von Satz 5.1 nur zwei von den Schnittpunkten U, V, W wirkliche Punkte (oder Enden) sind, der dritte aber ein Überpunkt, also ein Lot, dann steht die Verbindungsgerade der ersten beiden auf diesem Lot senkrecht.*

Wenn nur einer, etwa U, ein wirklicher Punkt (oder Ende) ist, die beiden andern aber Überpunkte, also Lote, dann haben diese Lote selbst ein gemeinsames Lot, und dieses geht durch U.

Wenn U, V, W alle drei Überpunkte, also Lote sind und wenn zwei dieser Lote, etwa U und V, sich nicht schneiden, also selbst ein gemeinsames Lot haben, dann ist das auch ein Lot von W (anders ausgedrückt: Die Lote U, V, W haben einen gemeinsamen Überpunkt).

Wenn schließlich U, V, W wieder Überpunkte, also Lote sind, aber zwei dieser Lote, etwa U und V, sich schneiden, dann geht auch das dritte Lot W durch diesen Schnittpunkt (anders ausgedrückt: die drei Lote gehen durch einen Punkt).

Die ersten drei Absätze ergeben sich sofort mit Hilfe unseres obigen Zusatzes. Dagegen ist beim vierten Absatz die Verbindungsgerade UV nicht vorhanden, so daß der Zusatz nichts aussagt. Ich muß bekennen, daß es mir noch nicht gelungen ist, diese Lücke zu schließen. Das läßt sich aber verschmerzen, weil man das ganze Pascalsche Kaleidoskop auch sehr leicht gewinnen kann, wenn man von der Euklidischen Geometrie Entwicklungshilfe in Anspruch nimmt, nämlich das Kleinsche Modell der hyperbolischen Geometrie innerhalb der Euklidischen, das z. B. in [3] dargestellt ist. Da ist die hyperbolische Ebene das Innere eines Euklidischen Kreises (Randkreis). Die hyperbolischen Geraden sind die Sehnen des Randkreises. Eine Kreisform (einschließlich Abstandslinienzwilling) ist eine Ellipse innerhalb des Randkreises. Für diese gilt der klassische Pascalsche Satz. Wenn nun der Euklidische Schnittpunkt von zwei gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks ins Innere des Randkreises fällt, ist es auch ein hyperbolischer Punkt; wenn er auf den Randkreis fällt, ist es ein Ende; wenn er außerhalb fällt, ist es ein Überpunkt, und seine durchs Innere des Randkreises gehende Polare in bezug auf den Randkreis ist das hyperbolische gemeinsame Lot. Die einfachsten Beziehungen zwischen Pol und Polare führen nun vom klassischen Pascalschen Satz sofort zu dem vollständigen Kaleidoskop.

§ 6. Wechselseitige Abstände von Punkten in der Ebene

Wir wenden uns jetzt einem andern Gegenstand zu und verwenden dabei Weierstraßsche Koordinaten. Führt man in der Ebene zwei aufeinander senkrechte Achsen, die x- und y-Achse ein, so haben die Weierstraßschen Koordinaten X, Y, P eines Punktes die folgende Bedeutung (vgl. [2], § 21):

$X =$ sinh des Abstands des Punktes (mit Vorzeichen) von der y-Achse,

$Y =$ sinh des Abstands des Punktes (mit Vorzeichen) von der x-Achse,

$P =$ cosh des Abstands des Punktes vom Nullpunkt (stets positiv).

Zwischen X, Y, P besteht die Identität

$$P^2 - X^2 - Y^2 = 1.$$

Der Abstand zweier Punkte 1 und 2 mit den Koordinaten X_1, Y_1, P_1 und X_2, Y_2, P_2 ist gegeben durch die Formel

$$\cosh(12) = P_1 P_2 - X_1 X_2 - Y_1 Y_2.$$

Die Gleichung einer Kreisform ist (vgl. [3], Nr. 102 f.)

$$AX + BY + CP + D = 0,$$

speziell für $D = 0$ ist es eine Gerade.

Bei vier Punkten 1, 2, 3, 4 in der Ebene gibt es sechs Abstände, zwischen denen eine Relation besteht. Diese kann man trigonometrisch ermitteln, man findet sie aber einfacher so: Offenbar ist, wenn X_i, Y_i, P_i die Koordinaten des Punktes i sind,

$$\begin{vmatrix} P_1 & X_1 & Y_1 & 0 \\ P_2 & X_2 & Y_2 & 0 \\ P_3 & X_3 & Y_3 & 0 \\ P_4 & X_4 & Y_4 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 & -X_1 & -Y_1 & 0 \\ P_2 & -X_2 & -Y_2 & 0 \\ P_3 & -X_3 & -Y_3 & 0 \\ P_4 & -X_4 & -Y_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliziert man die Determinanten aus, indem man Zeilen mit Zeilen kombiniert, so kommt

$$(6.1)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cosh(12) & \cosh(13) & \cosh(14) \\ \cosh(21) & 1 & \cosh(23) & \cosh(24) \\ \cosh(31) & \cosh(32) & 1 & \cosh(34) \\ \cosh(41) & \cosh(42) & \cosh(43) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

und das ist bereits die gesuchte Relation. Man kann sie etwas umgestalten, indem man die Determinante rändert, und zwar vorn eine Spalte mit vier Nullen und dann oben eine Zeile mit fünf Einsen anfügt. Wenn man dann die oberste Zeile von allen andern abzieht, die Identität $\cosh x - 1 = 2\left(\sinh\frac{x}{2}\right)^2$ benutzt und die Abkürzung

$$(6.2)\qquad \sinh\frac{(ik)}{2} = d_{ik}$$

einführt, kommt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2d_{12}^2 & 2d_{13}^2 & 2d_{14}^2 \\ -1 & 2d_{21}^2 & 0 & 2d_{23}^2 & 2d_{24}^2 \\ -1 & 2d_{31}^2 & 2d_{32}^2 & 0 & 2d_{34}^2 \\ -1 & 2d_{41}^2 & 2d_{42}^2 & 2d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man die oberste Zeile mit 2 multipliziert, sodann die letzten vier Spalten durch 2 dividiert und danach die erste Hauptunterdeterminante mit ihrem Koeffizienten 2 isoliert, ergibt sich:

$$(6.3) \qquad 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch den HE-Prozeß (vgl. [7], Seite 160), indem man alle Strecken (ik) durch $\left(\frac{ik}{R}\right)$ ersetzt, dann die Gleichung mit $(2R)^6$ multipliziert und schließlich R gegen ∞ wandern läßt, wobei die vordere Determinante gegen 0 geht, erhält man die analoge Relation für die Euklidische Geometrie in der bekannten Gestalt

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (12)^2 & (13)^2 & (14)^2 \\ 1 & (21)^2 & 0 & (23)^2 & (24)^2 \\ 1 & (31)^2 & (32)^2 & 0 & (34)^2 \\ 1 & (41)^2 & (42)^2 & (43)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante ist bekanntlich das 288-fache des Volumquadrats des durch die vier Punkte als Ecken gegebenen Tetraeders und verschwindet natürlich, wenn die vier Punkte in einer Ebene liegen. In der hyperbolischen Geometrie hat aber die linke Seite der Formel (6.3) keine analoge Bedeutung.

Weiter ist offenbar auch

$$\begin{vmatrix} P_1 & X_1 & Y_1 & 1 \\ \hdashline P_4 & X_4 & Y_4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 & -X_1 & -Y_1 & -1 \\ \hdashline P_4 & -X_4 & -Y_4 & -1 \end{vmatrix} \leqq 0,$$

und zwar Gleichheit dann und nur dann, wenn die vier Punkte auf einer Kreisform $AX + BY + CP + D = 0$ liegen. Multipliziert man die Determinanten wieder zeilenweise aus, so kommt

$$\begin{vmatrix} 0 & \cosh(12) - 1 & \cosh(13) - 1 & \cosh(14) - 1 \\ \cosh(21) - 1 & 0 & \cosh(23) - 1 & \cosh(24) - 1 \\ \cosh(31) - 1 & \cosh(32) - 1 & 0 & \cosh(34) - 1 \\ \cosh(41) - 1 & \cosh(42) - 1 & \cosh(43) - 1 & 0 \end{vmatrix} \leqq 0$$

oder, wenn man durch 16 dividiert und wieder die Abkürzung (6.2) benutzt:

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} \leqq 0.$$

Diese Determinante ist nun dieselbe, die oben in (6.3) auftrat. Man erkennt sie leicht als das negative Produkt der vier Faktoren

$$(6.4) \qquad \begin{cases} d_{12}\, d_{34} + d_{13}\, d_{24} + d_{14}\, d_{23}, \\ d_{12}\, d_{34} + d_{13}\, d_{24} - d_{14}\, d_{23}, \\ d_{12}\, d_{34} - d_{13}\, d_{24} + d_{14}\, d_{23}, \\ -d_{12}\, d_{34} + d_{13}\, d_{24} + d_{14}\, d_{23}. \end{cases}$$

Das Produkt dieser vier Faktoren ist also positiv oder null. Liegen die vier Punkte auf einer Kreisform, dann muß also einer der vier Faktoren verschwinden; das ist der „Satz von Ptolemäus“. Man sieht aber weiter: Wenn die vier Punkte nicht auf einer Kreisform liegen, dann sind alle vier Faktoren positiv. Denn da die Summe von je zweien offenbar positiv ist, könnte höchstens ein Faktor negativ sein, während ihr Produkt doch positiv ist.

§ 7. Wechselseitige Abstände von Punkten im Raum

Im Raum haben nach Einführung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes die Weierstraßschen Koordinaten X, Y, Z, P eines Punktes die folgende Bedeutung:

X = sinh des Abstands (mit Vorzeichen) des Punktes von der yz-Ebene,
Y = sinh des Abstands (mit Vorzeichen) des Punktes von der xz-Ebene,
Z = sinh des Abstands (mit Vorzeichen) des Punktes von der xy-Ebene,
P = cosh des Abstands des Punktes vom Nullpunkt (stets positiv).

Zwischen X, Y, Z, P besteht die Identität

$$P^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 1 .$$

Der Abstand zweier Punkte 1, 2 ist gegeben durch die Formel

$$\cosh(12) = P_1 P_2 - X_1 X_2 - Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2$$

und die Gleichung einer Ebene hat die Form

$$AX + BY + CZ + DP = 0.$$

Für vier Punkte 1, 2, 3, 4 im Raum ist zunächst

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & P_1 & X_1 & Y_1 & Z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & P_4 & X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & P_1 & -X_1 & -Y_1 & -Z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & P_4 & -X_4 & -Y_4 & -Z_4 \end{vmatrix} \geqq 0,$$

also, wenn man zeilenweise ausmultipliziert,

$$\begin{vmatrix} -1 & -Z_1 & -Z_2 & -Z_3 & -Z_4 \\ -Z_1 & 0 & \cosh(12)-1 & \cosh(13)-1 & \cosh(14)-1 \\ -Z_2 & \cosh(21)-1 & 0 & \cosh(23)-1 & \cosh(24)-1 \\ -Z_3 & \cosh(31)-1 & \cosh(32)-1 & 0 & \cosh(34)-1 \\ -Z_4 & \cosh(41)-1 & \cosh(42)-1 & \cosh(43)-1 & 0 \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Wenn nun die vier Punkte nicht in einer Ebene liegen, also die Ecken eines Tetraeders bilden, dann dürfen wir etwa annehmen, daß die ersten drei in der xy-Ebene liegen, daß also $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$, aber $Z_4 \neq 0$ ist. Wenn wir dann $\cosh x - 1$ durch $2(\sinh\frac{x}{2})^2$ ersetzen und wieder die Abkürzung (6.2) benutzen, kommt:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -Z_4 \\ 0 & 0 & 2d_{12}^2 & 2d_{13}^2 & 2d_{14}^2 \\ 0 & 2d_{21}^2 & 0 & 2d_{23}^2 & 2d_{24}^2 \\ 0 & 2d_{31}^2 & 2d_{32}^2 & 0 & 2d_{34}^2 \\ -Z_4 & 2d_{41}^2 & 2d_{42}^2 & 2d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} \geqq 0$$

oder nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt und durch 16 dividiert:

$$-\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} - Z_4^2\, d_{12}^2\, d_{23}^2\, d_{13}^2 \geqq 0.$$

Hier ist nun das erste Glied wieder gleich dem Produkt der vier Faktoren (6.4), und wegen $Z_4 \neq 0$ erkennt man, daß kein Faktor verschwindet, sondern alle vier positiv sind. Das ergibt in Verbindung mit einem Resultat des § 6 den

Satz 7. *Sind 1, 2, 3, 4 vier Punkte im Raum, dann sind mit der Abkürzung (6.2) die drei Aggregate*

$$\begin{gathered} d_{12}\,d_{34} + d_{13}\,d_{24} - d_{14}\,d_{23}, \\ d_{12}\,d_{34} - d_{13}\,d_{24} + d_{14}\,d_{23}, \\ -d_{12}\,d_{34} + d_{13}\,d_{24} + d_{14}\,d_{23} \end{gathered}$$

positiv. Nur wenn die vier Punkte in einer Ebene, und zwar auf einer Kreisform (einschließlich Gerade, aber ausschließlich Abstandslinienzwilling) liegen, ist eines der drei Aggregate gleich 0, die andern beiden positiv.

Für vier Punkte im Raum ist offenbar auch

$$\begin{vmatrix} P_1 & X_1 & Y_1 & Z_1 \\ \multicolumn{4}{c}{- - - - - - - - - -} \\ P_4 & X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 & -X_1 & -Y_1 & -Z_1 \\ \multicolumn{4}{c}{- - - - - - - - - - - - - -} \\ P_4 & -X_4 & -Y_4 & -Z_4 \end{vmatrix} \leqq 0,$$

und zwar Gleichheit nur, wenn die vier Punkte in einer Ebene $AX + BY + CZ + DP = 0$ liegen. Durch zeilenweises Ausmultiplizieren kommt

$$\begin{vmatrix} 1 & \cosh(12) & \cosh(13) & \cosh(14) \\ \cosh(21) & 1 & \cosh(23) & \cosh(24) \\ \cosh(31) & \cosh(32) & 1 & \cosh(34) \\ \cosh(41) & \cosh(42) & \cosh(43) & 1 \end{vmatrix} \leqq 0.$$

Das ist nun wieder die Determinante (6.1), und wenn man sie wie dort weiter behandelt, geht die Formel in (6.3) mit $\leqq 0$ statt $= 0$ über.

Bei fünf Punkten 1, 2, 3, 4, 5 im Raum gibt es zehn Abstände, zwischen denen eine Relation besteht. Diese bekommt man einfach so: Offenbar ist

$$\begin{vmatrix} P_1 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{- - - - - - - - - - - - -} \\ P_5 & X_5 & Y_5 & Z_5 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 & -X_1 & -Y_1 & -Z_1 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{- - - - - - - - - - - - - - - - -} \\ P_5 & -X_5 & -Y_5 & -Z_5 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch zeilenweises Ausmultiplizieren kommt

$$\begin{vmatrix} 1 & \cosh(12) & \cosh(13) & \cosh(14) & \cosh(15) \\ \cosh(21) & 1 & \cosh(23) & \cosh(24) & \cosh(25) \\ \cosh(31) & \cosh(32) & 1 & \cosh(34) & \cosh(35) \\ \cosh(41) & \cosh(42) & \cosh(43) & 1 & \cosh(45) \\ \cosh(51) & \cosh(52) & \cosh(53) & \cosh(54) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

und das ist bereits die gesuchte Relation. Sie nimmt, wenn man die Determinante ebenso behandelt wie die Determinante (6.1), die Gestalt an:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & \cdots & d_{15}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & \cdots & d_{25}^2 \\ & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{51}^2 & d_{52}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & \cdots & d_{15}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & \cdots & d_{25}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & d_{51}^2 & d_{52}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch den HE-Prozeß erhält man daraus die analoge Relation für die Euklidische Geometrie:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & (12)^2 & \cdots & (15)^2 \\ 1 & (21)^2 & 0 & \cdots & (25)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & (51)^2 & (52)^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese ist von Carnot durch äußerst mühselige Rechnung in extenso (weit über 100 Glieder) anzugeben versucht worden, während Cayley die elegante Determinantenform fand (vgl. dazu die Literatur in [1], S. 238 ff.).

Literatur

[1] Baltzer, R.: Theorie und Anwendung der Determinanten. 5. Aufl. 1881.

[2] Liebmann, H.: Nichteuklidische Geometrie. 3. Aufl. 1923.

[3] Baldus, R. und Löbell, F.: Nichteuklidische Geometrie. 4. Aufl. 1964 (Sammlung Göschen).

[4] Perron, O.: Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene. Teubner-Verlag, Stuttgart 1962.

[5] Perron, O.: Der Satz von Ptolemäus in der hyperbolischen Geometrie. Diese Sitzungsber. 1963, S. 83–87.

[6] Perron, O.: Seiten und Diagonalen eines Kreisvierecks in der hyperbolischen Geometrie. Mathemat. Zeitschr. **84**, S. 88–92 (1964).

[7] Perron, O.: Miszellen zur hyperbolischen Geometrie. Diese Sitzungsber. 1964, S. 157–176.

[8] Perron, O.: Über Ähnlichkeit, Dehnung und Schrumpfung in der hyperbolischen Geometrie. Mathemat. Zeitschr. **90**, S. 166–184 (1965).

[9] Lense, J.: Analytische projektive Geometrie. Verlag Oldenbourg, München-Wien 1965.