BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1966

MÜNCHEN 1967

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Miszellen zur hyperbolischen Geometrie. III

Von **Oskar Perron** in München

Mit 8 Figuren

Vorgelegt am 7. Oktober 1966

Übersicht

§ 1. Das Kaleidoskop Ceva'scher Sätze

In der vorausgehenden Arbeit gleichen Titels [5] wurde u. a. gezeigt, wie der Pascal'sche Satz der Euklidischen Geometrie in der hyperbolischen sich zu einem ganzen Kaleidoskop verschiedener Sätze ausweitet. Ein noch umfangreicheres Kaleidoskop liefern, wie jetzt gezeigt werden soll, die Sätze von Ceva und Menelaos. Der Ceva-Satz lautet im einfachsten bereits in [2] § 32 bewiesenen Fall so:

Wenn drei Ecktransversalen eines Dreiecks ABC durch einen Punkt P gehen und wenn sie die gegenüberliegenden Seiten in den Punkten A_1, B_1, C_1 schneiden (Fig. 1), dann ist

$$\text{(I)} \qquad \frac{\sinh(BA_1)}{\sinh(CA_1)} \cdot \frac{\sinh(CB_1)}{\sinh(AB_1)} \cdot \frac{\sinh(AC_1)}{\sinh(BC_1)} = -1.$$

Das Vorzeichen macht keine Schwierigkeit, da entweder alle drei Brüche negativ sind (wenn nämlich P im Innern des Dreiecks ABC liegt) oder nur einer (wenn P im Äußern liegt). Und für

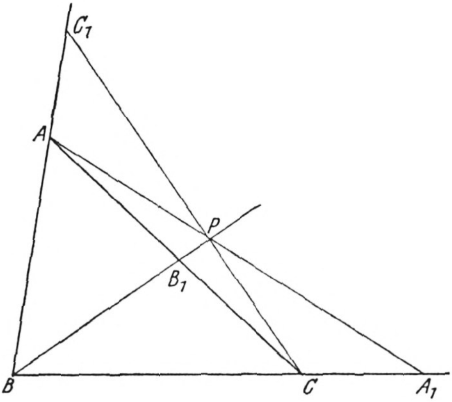

Fig. 1

die Absolutwerte braucht man nur den Sinussatz. Nach diesem, angewandt auf die Dreiecke BPA_1 und CPA_1, ist

$$\frac{\sinh(BA_1)}{\sinh(BP)} = \frac{\sin(BPA_1)}{\sin(BA_1P)}, \qquad \frac{\sinh(CA_1)}{\sinh(CP)} = \frac{\sin(CPA_1)}{\sin(CA_1P)},$$

woraus durch Division folgt:

$$(1.1) \qquad \frac{\sinh(BA_1)}{\sinh(CA_1)} = \frac{\sinh(BP)}{\sinh(CP)} \cdot \frac{\sin(BPA_1)}{\sin(CPA_1)} \cdot \frac{\sin(CA_1P)}{\sin(BA_1P)}$$
$$= \frac{\sinh(BP)}{\sinh(CP)} \cdot \frac{\sin(BPA)}{\sin(CPA)} \cdot 1.$$

Durch zyklische Vertauschung ergibt sich

$$(1.2) \qquad \frac{\sinh(CB_1)}{\sinh(AB_1)} = \frac{\sinh(CP)}{\sinh(AP)} \cdot \frac{\sin(CPB)}{\sin(APB)},$$

$$(1.3) \qquad \frac{\sinh(AC_1)}{\sinh(BC_1)} = \frac{\sinh(AP)}{\sinh(BP)} \cdot \frac{\sin(APC)}{\sin(BPC)},$$

und durch Multiplikation der drei Formeln erhält man sofort das Resultat (I).

Jetzt kommen wir zum Kaleidoskop. Zuerst behandeln wir den Fall, daß einer der drei Schnittpunkte, etwa A_1, ein *Ende* ist, während B_1 und C_1 noch gewöhnliche Punkte sein sollen. Dazu verschieben wir den Punkt P ein wenig nach P' derart, daß die Schnittpunkte A_1', B_1', C_1' drei gewöhnliche Punkte sind. Nach (I) ist dann

$$\frac{\sinh(BA_1')}{\sinh(CA_1')} \cdot \frac{\sinh(CB_1')}{\sinh(AB_1')} \cdot \frac{\sinh(AC_1')}{\sinh(BC_1')} = -1.$$

Nun lassen wir P' gegen P wandern, wobei B_1' und C_1' gegen B_1 und C_1 wandern, während A_1' dem Ende A_1 zustrebt. Dabei ist

$$\begin{aligned}\lim \frac{\sinh(BA_1')}{\sinh(CA_1')} &= \lim \frac{\sinh(BC + CA_1')}{\sinh(CA_1')} = \\ &= \lim\,[\sinh(BC)\coth(CA_1') + \cosh(BC)] = \\ &= \pm\sinh(BC) + \cosh(BC) = \exp(\pm BC),\end{aligned}$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Ende A_1 in der Richtung von B nach C oder von C nach B gemeint ist. *Die Formel (I) ist also jetzt so zu modifizieren, daß der erste Bruch durch* $\exp(\pm BC)$ *ersetzt wird.*

Wenn auch der dritte Schnittpunkt C_1 ein Ende ist, so muß entsprechend der dritte Bruch durch $\exp(\pm AB)$ ersetzt werden. Jetzt kann man versucht sein zu sagen, daß, falls auch B_1 ein Ende ist, der zweite Bruch durch $\exp(\pm CA)$ zu ersetzen ist. Aber dann wäre die linke Seite von (I) positiv, die rechte negativ, woraus zu schließen ist, daß dieser Fall gar nicht eintreten kann, was auch anschaulich ohne weiteres klar ist (Anordnungsaxiome).

Wir kommen jetzt zum Fall, daß einer der drei Schnittpunkte, etwa A_1, ein *Überpunkt* ist, also das gemeinsame Lot der Seite BC und der Transversalen PA. Den Schnittpunkt dieses Lotes mit BC nennen wir jetzt A_1, den mit PA nennen wir A_2 (Fig. 2). Dann gelten wieder die Formeln (1.2) und (1.3), während (1.1) geändert werden muß. Aus den Vierecken PBA_1A_2 und PCA_1A_2 folgt nach dem Hilfssatz in [7], § 7, Formel (I)

$$\frac{\sinh(A_1A_2)}{\sinh(BP)} = \frac{\sin(BPA_2)}{\cosh(BA_1)}, \qquad \frac{\sinh(A_1A_2)}{\sinh(CP)} = \frac{\sin(CPA_2)}{\cosh(CA_1)}.$$

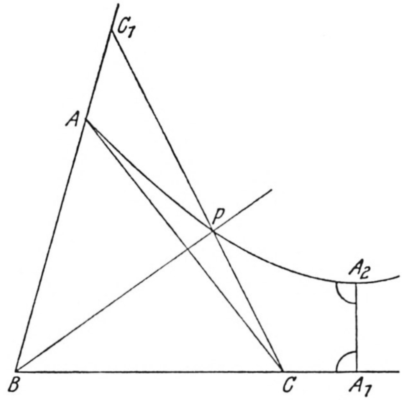

Fig. 2

Daraus durch Division

$$\frac{\cosh(BA_1)}{\cosh(CA_1)} = \frac{\sinh(BP)}{\sinh(CP)} \cdot \frac{\sin(BPA_2)}{\sin(CPA_2)} = \frac{\sinh(BP)}{\sinh(CP)} \cdot \frac{\sin(BPA)}{\sin(CPA)}.$$

Diese Formel tritt also jetzt an Stelle von (1.1), während sich an (1.2) und (1.3) nichts ändert. Durch Multiplikation kommt dann ein *Resultat, das sich von (I) nur dadurch unterscheidet, daß im ersten Bruch die sinh durch cosh ersetzt sind und daß A_1 den Schnittpunkt des gemeinsamen Lotes von BC und PA mit BC bedeutet.*

Wenn außer A_1 auch noch C_1 ein Überpunkt ist, so sind auch im dritten Bruch von (I) die sinh durch cosh zu ersetzen und C_1 bedeutet dann den Schnittpunkt des gemeinsamen Lotes von AB und PC mit AB; ist C_1 dagegen ein Ende, dann ist der dritte Bruch nach der Überlegung von vorhin durch $\exp(\pm AB)$ zu ersetzen. Der Schnittpunkt B_1 kann jetzt nicht auch noch ein Ende oder Überpunkt sein, so daß wir bereits alle Möglichkeiten erschöpft haben.

Aber das Kaleidoskop geht trotzdem noch weiter, weil auch der Punkt P selbst ein Ende oder Überpunkt sein kann. Wenn P ein Ende ist, so nehmen wir auf dem Strahl AP einen Punkt P', wobei die Transversalen AP' $(= AP)$, BP', CP' die Dreieckseiten in A_1', B_1', C_1' schneiden, und es gilt die Formel (I) mit den besprochenen Modifikationen, wenn unter den Punkten A_1', B_1', C_1' auch Enden oder Überpunkte sind. Lassen wir nun P' auf seinem Strahl $A\,P$ gegen das Ende P wandern, so bleiben die Formeln völlig ungeändert, weil ja P' gar nicht darin vorkommt; die darin vorkommenden A_1', B_1', C_1' gehen aber in A_1, B_1, C_1 über.

Wieder anders wird es aber, wenn die drei Transversalen sich in einem *Überpunkt* schneiden, also ein gemeinsames Lot $A_3B_3C_3$ haben. Wir behandeln dann zuerst den Fall, daß A_1, B_1, C_1 drei gewöhnliche Punkte sind (Fig. 3). Aus den Vierecken $B\,A_1A_3B_3$ und $C\,A_1A_3C_3$ folgt dann nach dem bereits oben benutzten Hilfssatz aus [7] § 7, Formel (I)

$$\frac{\sinh(B_3A_3)}{\sinh(BA_1)} = \frac{\sin(BA_1A_3)}{\cosh(BB_3)}, \qquad \frac{\sinh(C_3A_3)}{\sinh(CA_1)} = \frac{\sin(CA_1A_3)}{\cosh(CC_3)}.$$

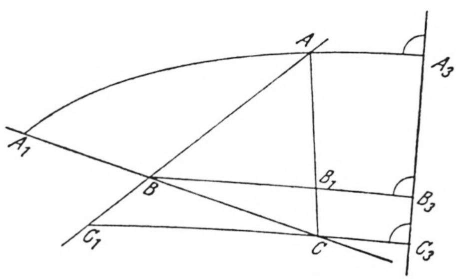

Fig. 3

Hier sind rechts die Winkel in den Zählern dieselben oder Supplementwinkel, die Sinus also einander gleich. Daher folgt durch Division

$$(1.4) \qquad \frac{\sinh(BA_1)}{\sinh(CA_1)} = \frac{\sinh(B_3A_3)}{\sinh(C_3A_3)} \cdot \frac{\cosh(BB_3)}{\cosh(CC_3)}.$$

Durch zyklische Vertauschung ergibt sich ebenso

$$(1.5) \qquad \frac{\sinh(CB_1)}{\sinh(AB_1)} = \frac{\sinh(C_3B_3)}{\sinh(A_3B_3)} \cdot \frac{\cosh(CC_3)}{\cosh(AA_3)},$$

$$\text{(1.6)} \qquad \frac{\sinh(A C_1)}{\sinh(B C_1)} = \frac{\sinh(A_3 C_3)}{\sinh(B_3 C_3)} \cdot \frac{\cosh(A A_3)}{\cosh(B B_3)}\,.$$

Durch Multiplikation der drei Formeln erhält man, wenn man nachträglich auch auf das Vorzeichen achtet, wieder genau die Formel (I).

Den Fall, daß etwa A_1 ein Ende ist, gewinnen wir wieder durch Grenzprozeß. Die Formeln (1.5) und (1.6) gelten unverändert, während die linke Seite von (1.4) wie oben in $\exp(\pm BC)$ übergeht. Also ist auch im Resultat (I) der erste Bruch wieder durch $\exp(\pm BC)$ zu ersetzen. Wenn etwa C_1 ebenfalls ein Ende ist, so ist der dritte Bruch durch $\exp(\pm AB)$ zu ersetzen, und B_1 kann dann nur noch ein gewöhnlicher Punkt sein.

Anders wird die Sache wieder, wenn A_1 etwa ein Überpunkt ist, also das gemeinsame Lot A_1A_2 von BC und A_3A (Fig. 4). Die Formeln (1.5) und (1.6) gelten dann weiter, aber an Stelle von (1.4) tritt eine andere. Aus den Fünfecken $A_3B_3BA_1A_2$ und $A_3C_3CA_1A_2$ mit vier rechten Winkeln liest man nach dem Hilfssatz in [7], § 5 ab:

$$\sin(B_3BA_1)\cosh(BA_1) = \sinh(A_2A_3)\sinh(A_3B_3),$$
$$\sin(C_3CA_1)\cosh(CA_1) = \sinh(A_2A_3)\sinh(A_3C_3),$$

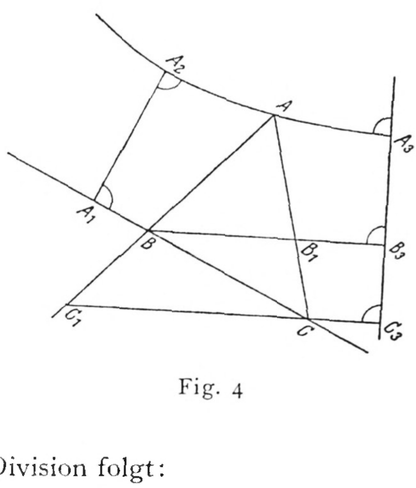

Fig. 4

woraus durch Division folgt:

$$\frac{\cosh(BA_1)}{\cosh(CA_1)} = \frac{\sinh(A_3B_3)}{\sinh(A_3C_3)} \cdot \frac{\sin(C_3CA_1)}{\sin(B_3BA_1)} = \frac{\sinh(A_3B_3)}{\sinh(A_3C_3)} \cdot \frac{\sin(C_3CB)}{\sin(B_3BC)}\,.$$

Nun ist aber im Viereck $B_3 B C C_3$ nach dem Hilfssatz aus [7] § 7, Formel (I)

$$\frac{\sinh(B_3 C_3)}{\sinh(BC)} = \frac{\sin(C_3 C B)}{\cosh(B B_3)} \text{ und auch } = \frac{\sin(B_3 B C)}{\cosh(C C_3)} ;$$

daher ist

$$\frac{\sin(C_3 C B)}{\sin(B_3 B C)} = \frac{\cosh(B B_3)}{\cosh(C C_3)} ,$$

so daß die vorige Formel übergeht in

$$\frac{\cosh(B A_1)}{\cosh(C A_1)} = \frac{\sinh(A_3 B_3)}{\sinh(A_3 C_3)} \cdot \frac{\cosh(B B_3)}{\cosh(C C_3)} .$$

Diese Formel tritt also jetzt an Stelle von (1.4), und durch Multiplikation mit (1.5) und (1.6) ergibt sich die Formel (I) wieder mit der Abänderung, daß im ersten Bruch die sinh durch cosh ersetzt sind und daß A_1 den Schnittpunkt des gemeinsamen Lotes von BC und $A A_3$ mit BC bedeutet. Wenn auch noch C_1 ein Überpunkt ist, dann muß auch der dritte Bruch in (I) entsprechend modifiziert werden, und wenn C_1 ein Ende ist, muß er durch $\exp(\pm A B)$ ersetzt werden. B_1 kann dann nur noch ein gewöhnlicher Punkt sein, so daß also genau dieselben Formeln gelten wie wenn P ein gewöhnlicher Punkt wäre.

§ 2. Das Kaleidoskop Menelaos'scher Sätze

Der hyperbolische Menelaos-Satz lautet im einfachsten bereits in [2] § 32 behandelten Fall so:

Wenn die drei Seiten eines Dreiecks ABC von einer Geraden g in drei gewöhnlichen Punkten A_1, B_1, C_1 geschnitten werden, dann ist (Fig. 5)

$$\text{(II)} \qquad \frac{\sinh(B A_1)}{\sinh(C A_1)} \cdot \frac{\sinh(C B_1)}{\sinh(A B_1)} \cdot \frac{\sinh(A C_1)}{\sinh(B C_1)} = +1 .$$

Das Vorzeichen ist wieder klar (Anordnungsaxiome). Aus dem Dreieck $B A_1 C_1$ liest man nach dem Sinussatz ab:

$$\text{(2.1)} \qquad \frac{\sinh(B A_1)}{\sinh(B C_1)} = \frac{\sin C_1}{\sin A_1} ,$$

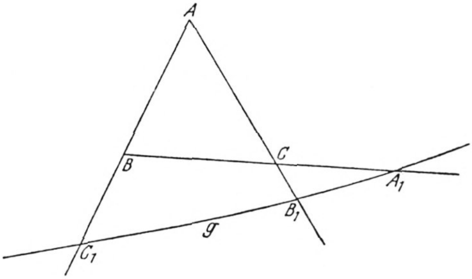

Fig. 5

und durch zyklische Vertauschung ergibt sich auch

$$\frac{\sinh(CB_1)}{\sinh(CA_1)} = \frac{\sin A_1}{\sin B_1}, \qquad \frac{\sinh(AC_1)}{\sinh(AB_1)} = \frac{\sin B_1}{\sin C_1}. \tag{2.2}$$

Durch Multiplikation der drei Formeln kommt sofort die Behauptung (II).

Jetzt kommen wir zum Kaleidoskop. Der Fall, daß etwa der Punkt A_1 ein *Ende* ist, wird durch Grenzübergang erledigt. *Dabei geht der erste Bruch in (II) wie im vorigen Paragraphen über in exp ($\pm$ BC), während die andern Brüche bleiben. Wenn auch noch C_1 ein Ende ist, geht der dritte Bruch entsprechend über in exp ($\pm$ AB).* Daß der letzte Schnittpunkt B_1 dann auch noch ein Ende sein könnte, ist natürlich ausgeschlossen, da die Gerade g doch nur zwei Enden hat.

Wenn einer der drei Punkte, etwa A_1, ein *Überpunkt* ist, also durch das gemeinsame Lot A_1A_2 von BC und g repräsentiert wird (Fig. 6), dann gilt zunächst die zweite Formel (2.2). Weiter aber folgt jetzt aus den Vierecken $BC_1A_2A_1$ und $CB_1A_2A_1$ nach dem Hilfssatz aus [7] § 7, Formel (I)

$$\frac{\sinh(A_1A_2)}{\sinh(BC_1)} = \frac{\sin C_1}{\cosh(BA_1)}, \qquad \frac{\sinh(A_1A_2)}{\sinh(CB_1)} = \frac{\sin B_1}{\cosh(CA_1)} \tag{2.3}$$

und hieraus durch Division:

$$\frac{\sin C_1}{\sin B_1} = \frac{\cosh(BA_1)}{\cosh(CA_1)} \cdot \frac{\sinh(CB_1)}{\sinh(BC_1)}.$$

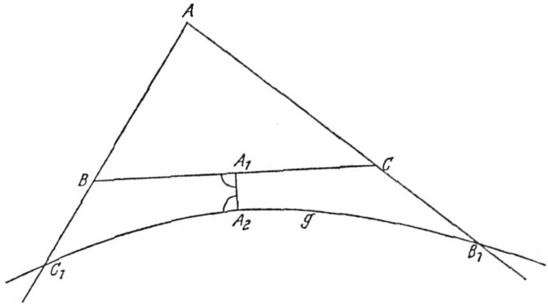

Fig. 6

Durch Vergleich mit der noch gültigen zweiten Formel (2.2) kommt

$$\frac{\cosh(BA_1)}{\cosh(CA_1)} \cdot \frac{\sinh(CB_1)}{\sinh(AB_1)} \cdot \frac{\sinh(AC_1)}{\sinh(BC_1)} = 1.$$

Es sind also im ersten Bruch der Formel (II) einfach die sinh durch cosh zu ersetzen. Wenn jetzt vielleicht B_1 ein Ende ist, so muß nur noch der zweite Bruch durch Grenzübergang durch $\exp(\pm CA)$ ersetzt werden, und wenn C_1 auch noch ein Ende ist, der letzte Bruch durch $\exp(\pm AB)$.

Wir kommen jetzt zum Fall, daß außer A_1 auch noch B_1 ein Überpunkt ist, also durch das gemeinsame Lot B_1B_2 von AC und g repräsentiert wird. Der Leser kann dann leicht die Fig. 6 entsprechend abändern. Dabei bleibt das Viereck $BC_1A_2A_1$ und damit die erste Formel (2.3) erhalten. Ferner folgt aus dem Viereck $AC_1B_2B_1$ wieder nach dem Hilfssatz aus [7] § 7, Formel (I)

$$\frac{\sinh(B_1B_2)}{\sinh(AC_1)} = \frac{\sin C_1}{\cosh(AB_1)}$$

und nach Division durch die noch gültige erste Formel (2.3):

$$\frac{\sinh(B_1B_2)}{\sinh(A_1A_2)} = \frac{\cosh(BA_1)}{\cosh(AB_1)} \cdot \frac{\sinh(AC_1)}{\sinh(BC_1)}. \tag{2.4}$$

Nun haben wir noch das Fünfeck $CA_1A_2B_2B_1$ mit vier rechten Winkeln, aus dem nach dem Hilfssatz in [7] § 5 folgt:

$$\sin C \cdot \cosh(CA_1) = \sinh(A_2B_2)\sinh(B_1B_2),$$
$$\sin C \cdot \cosh(CB_1) = \sinh(B_2A_2)\sinh(A_1A_2),$$

und hieraus durch Division:

$$\frac{\cosh(CA_1)}{\cosh(CB_1)} = \frac{\sinh(B_1B_2)}{\sinh(A_1A_2)}. \tag{2.5}$$

Durch Vergleich mit (2.4) und leichte Umstellung ergibt sich hieraus:

$$\frac{\cosh(BA_1)}{\cosh(CA_1)} \cdot \frac{\cosh(CB_1)}{\cosh(AB_1)} \cdot \frac{\sinh(AC_1)}{\sinh(BC_1)} = 1.$$

Es sind also diesmal in den ersten beiden Brüchen der Formel (II) die sinh durch cosh zu ersetzen. Wenn jetzt C_1 vielleicht ein Ende ist, muß der letzte Bruch noch durch exp $(\pm AB)$ ersetzt werden.

Schließlich gibt es auch noch den Fall, *daß A_1, B_1, C_1 alle drei Überpunkte sind*, also durch gewisse Lote A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 repräsentiert werden. Der Leser kann dann leicht die Fig. 6 wieder entsprechend abändern, wobei die Gerade g freilich stark gebogen gezeichnet werden muß. Die Rechnung ist diesmal besonders einfach. Aus dem Fünfeck $CA_1A_2B_2B_1$ folgt wie vorhin die Formel (2.5) und aus ihr durch zyklische Vertauschung

$$\frac{\cosh(AB_1)}{\cosh(AC_1)} = \frac{\sinh(C_1C_2)}{\sinh(B_1B_2)}, \qquad \frac{\cosh(BC_1)}{\cosh(BA_1)} = \frac{\sinh(A_1A_2)}{\sinh(C_1C_2)}.$$

Durch Multiplikation der drei Formeln, Übergang zum reziproken Wert und leichte Umstellung folgt dann

$$\frac{\cosh(BA_1)}{\cosh(CA_1)} \cdot \frac{\cosh(CB_1)}{\cosh(AB_1)} \cdot \frac{\cosh(AC_1)}{\cosh(BC_1)} = 1.$$

Es sind also diesmal alle sinh durch cosh zu ersetzen.

§ 3. Die Mitteltransversalen im Dreieck

Die Mitteltransversalen schneiden sich in *einem* Punkt (Umkehrung des Ceva'schen Satzes), den wir Schwerpunkt nennen wollen. Er ist aber, nebenbei bemerkt, nur der Schwerpunkt der drei gleich schweren Ecken und nicht auch wie in der Euklidischen Geometrie der Schwerpunkt der homogenen Dreiecks*fläche*. Für diese Transversalen gelten in der Euklidischen Geometrie besonders einfache metrische Relationen, die in der hyperbolischen verlorengehen. Immerhin ist bemerkenswert, was an ihre Stelle tritt.

Wie üblich, seien a, b, c die Seiten und α, β, γ die Winkel des Dreiecks ABC (Fig. 7); S sei der Schwerpunkt. Die Mitteltransversale AA_1 bezeichnen wir mit m_1, ihren größeren Abschnitt AS mit m_1', ihren kleineren SA_1 mit m_1''. Nach dem ersten Cosinussatz ist

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma,$$

$$\cosh m_1 = \cosh \frac{a}{2} \cosh b - \sinh \frac{a}{2} \sinh b \cos \gamma.$$

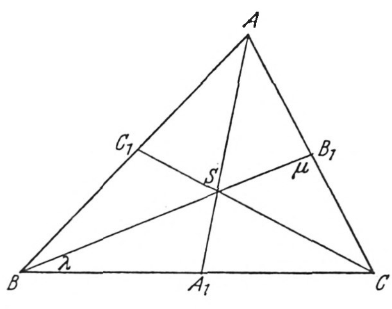

Fig. 7

Setzt man den Wert von $\cos \gamma$ aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so bekommt man nach leichter Rechnung:

$$\cosh m_1 = \frac{\cosh b + \cosh c}{2 \cosh \frac{a}{2}}. \tag{3.1}$$

Hieraus folgt weiter

$$\sinh^2 m_1 = \frac{\sinh^2 b + \sinh^2 c + 2(\cosh b \cosh c - \cosh a)}{4 \cosh^2 \left(\frac{a}{2}\right)}, \tag{3.2}$$

und da die Klammer im Zähler gleich $\sinh b \sinh c \cos \alpha$ ist:

$$(3.3) \quad \sinh^2 m_1 = \frac{\sinh^2 b + \sinh^2 c + 2 \sinh b \sinh c \cos \alpha}{4 \cosh^2 \left(\frac{a}{2}\right)} .$$

Aus Fig. 7 liest man weiter nach dem Sinussatz ab:

$$\frac{\sinh m_1'}{\sinh \frac{b}{2}} = \frac{\sin \mu}{\sin (A S B_1)}, \quad \frac{\sinh m_1''}{\sinh \frac{a}{2}} = \frac{\sin \lambda}{\sin (B S A_1)},$$

$$\frac{\sin \mu}{\sin \lambda} = \frac{\sinh a}{\sinh \frac{b}{2}},$$

und da die Winkel $A S B_1$ und $B S A_1$ Scheitelwinkel sind,

$$\frac{\sinh m_1'}{\sinh m_1''} = \frac{\sinh \frac{b}{2} \sin \mu}{\sinh \frac{a}{2} \sin \lambda} = \frac{\sinh \frac{b}{2} \sinh a}{\sinh \frac{a}{2} \sinh \frac{b}{2}},$$

also schließlich:

$$(3.4) \qquad \frac{\sinh m_1'}{\sinh m_1''} = 2 \cosh \frac{a}{2} .$$

Durch den HE-Prozeß (vgl. [4], S. 160) ergibt sich hieraus die Formel der Euklidischen Geometrie: $m_1' = 2\, m_1''$.

Aus (3.4) folgt, da $m_1' = m_1 - m_1''$ ist,

$$\sinh m_1 \coth m_1'' = \cosh m_1 + 2 \cosh \frac{a}{2} .$$

Quadriert man und subtrahiert noch $\sinh^2 m_1$, so kommt:

$$\begin{aligned} \frac{\sinh^2 m_1}{\sinh^2 m_1''} &= \sinh^2 m_1 (\coth^2 m_1'' - 1) \\ &= \left(\cosh m_1 + 2 \cosh \frac{a}{2}\right)^2 - \sinh^2 m_1 \\ &= 1 + 4 \cosh^2 \left(\frac{a}{2}\right) + 4 \cosh m_1 \cosh \frac{a}{2} \\ &= 3 + 2 \cosh a + 4 \cosh m_1 \cosh \frac{a}{2} . \end{aligned}$$

Wenn man jetzt für $\cosh m_1$ den Wert aus (3.1) einsetzt, kommt:

$$(3.5) \qquad \frac{\sinh^2 m_1}{\sinh^2 m_1''} = 3 + 2 \cosh a + 2 \cosh b + 2 \cosh c .$$

Diese Formel zeigt, daß der Quotient $\sinh m_i / \sinh m_i''$ für alle drei Mitteltransversalen derselbe ist.

Wir wollen jetzt auch gleich die W-(= Weierstraß-)Koordinaten (vgl. [1] § 21 oder [6] § 2 oder [7] S. 172 oder [8] § 1) des Schwerpunktes S dreier Punkte 1, 2, 3 angeben, wenn der Punkt i die W-Koordinaten X_i, Y_i, P_i hat. Zunächst brauchen wir den Mittelpunkt der Strecke $\overline{12}$, die Gleichung der Verbindungsgeraden $\overline{12}$ ist

$$\begin{vmatrix} X & Y & P \\ X_1 & Y_1 & P_1 \\ X_2 & Y_2 & P_2 \end{vmatrix} = 0,$$

also muß

$$(3.6)\quad X = \varrho X_1 + \sigma X_2, \quad Y = \varrho Y_1 + \sigma Y_2, \quad P = \varrho P_1 + \sigma P_2$$

sein, wobei wegen $P^2 - X^2 - Y^2 = 1$

$$(3.7)\qquad \varrho^2 + \sigma^2 + 2\varrho\sigma \cosh(\overline{12}) = 1$$

ist. Jedem reellen Wertepaar ϱ, σ, das der Gleichung (3.7) genügt und für das $\varrho P_1 + \sigma P_2 > 0$ ist, entspricht vermöge (3.6) ein Punkt der Geraden $\overline{12}$, und umgekehrt. Diese Zuordnung „Punkt $\leftrightarrow$ (ϱ, σ)" ist offenbar stetig. Für $\sigma = 0$ ist $\varrho = 1$ (nicht -1, weil $P > 0$ sein muß). Das liefert den Punkt 1. Für den Punkt 2 ist dagegen $\varrho = 0$, $\sigma = 1$. Daher ist σ im Innern der Strecke $\overline{12}$ nirgends 0, am Ende aber positiv, und deshalb wegen der Stetigkeit im ganzen Innern positiv. Ebenso ist auch ϱ im ganzen Innern der Strecke $\overline{12}$ positiv.

Insbesondere im Mittelpunkt der Strecke $\overline{12}$ sind ϱ und σ positiv. Der Mittelpunkt ist von 1 und 2 gleichweit entfernt, also ist in ihm

$$P_1 P - X_1 X - Y_1 Y = P_2 P - X_2 X - Y_2 Y$$

oder also

$$(P_1 - P_2)(\varrho P_1 + \sigma P_2) - (X_1 - X_2)(\varrho X_1 + \sigma X_2) - \\ -(Y_1 - Y_2)(\varrho Y_1 + \sigma Y_2) = 0$$

und nach Ausmultiplizieren:

$$\varrho\,[1-\cosh(\overline{12})] + \sigma\,[\cosh(\overline{12}) - 1] = 0.$$

Daher ist $\varrho = \sigma$ und aus (3.7) folgt dann

$$\varrho^2\,[2 + 2\cosh(\overline{12})] = 1, \text{ also } \varrho = \frac{1}{2\cosh\left(\frac{12}{2}\right)}.$$

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{12}$ hat also die W-Koordinaten

$$\frac{X_1 + X_2}{2\cosh\left(\frac{12}{2}\right)}, \quad \frac{Y_1 + Y_2}{2\cosh\left(\frac{12}{2}\right)}, \quad \frac{P_1 + P_2}{2\cosh\left(\frac{12}{2}\right)}.$$

Die Verbindungsgerade des Punktes 3 mit der Mitte von $\overline{12}$ hat daher die Gleichung

$$\begin{vmatrix} X & Y & P \\ X_3 & Y_3 & P_3 \\ X_1 + X_2 & Y_1 + Y_2 & P_1 + P_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ebenso hat die Verbindungsgerade des Punktes 1 mit der Mitte von $\overline{23}$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} X & Y & P \\ X_1 & Y_1 & P_1 \\ X_2 + X_3 & Y_2 + Y_3 & P_2 + P_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Schnittpunkt der beiden ist der gesuchte Schwerpunkt S. Die Auflösung ist offenbar

$$(3.8) \qquad \lambda X = X_1 + X_2 + X_3, \quad \lambda Y = Y_1 + Y_2 + Y_3, \quad \lambda P = P_1 + P_2 + P_3,$$

wobei sich der Faktor λ aus der Gleichung $P^2 - X^2 - Y^2 = 1$ ergibt, also

$$(3.9) \qquad \lambda^2 = 3 + 2\cosh(\overline{12}) + 2\cosh(\overline{13}) + 2\cosh(\overline{23}).$$

λ ist die positive Quadratwurzel.

§ 4. Was ist mit der Euler'schen Geraden?

In der Euklidischen Elementargeometrie gibt es eine ganze Reihe hübscher Sätze, die aussagen, daß irgendwelche bemerkenswerte Punkte auf einer Geraden oder auch auf einem Kreis liegen. Am bekanntesten ist wohl der Satz, daß bei einem Dreieck der Schnittpunkt S der Mitteltransversalen (Schwerpunkt), der Höhenschnittpunkt H und der Mittelpunkt M des Umkreises auf einer Geraden liegen (*Euler*'sche Gerade). Für ein gleichschenkliges Dreieck sieht man sofort, daß der Satz auch in der hyperbolischen Geometrie gilt; denn da liegen alle drei Punkte trivialerweise auf der Symmetrielinie des Dreiecks. Beim allgemeinen Dreieck ist der Beweis aber nicht ganz einfach, und so kann man fragen, wie das in der hyperbolischen Geometrie vielleicht sein mag. Die wohl kaum so präzis erwartete Antwort lautet: *Wenn die drei Punkte auf einer Geraden liegen, dann ist das Dreieck gleichschenklig.*[1]

Zum Beweis betrachten wir ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ und führen W-Koordinaten ein. Die Ecke B wählen wir als Nullpunkt, die positive x-Achse legen wir durch C und die Ecke A nehmen wir dann auf der positiven y-Seite an (Fig. 8). Die Koordinaten von B sind dann

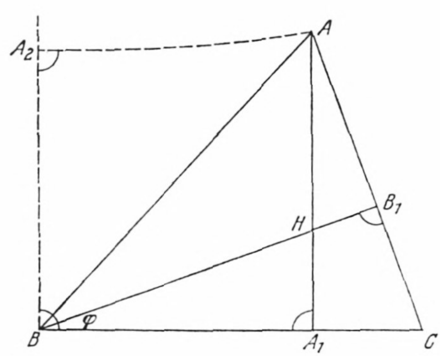

Fig. 8

[1] Wie ich nachträglich bemerkt habe, ist der Satz nicht neu. Er findet sich bereits in einer Arbeit von R. Baldus (Über Eulers Dreieckssatz in der absoluten Geometrie. Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wissenschaften, Math.-naturw. Klasse 1929, 11. Abhandlung), der zum Beweis das Klein'sche Modell der hyperbol. Geometrie heranzog.

$$X_1 = 0, \; Y_1 = 0, \; P_1 = 1,$$

die von C sind

$$X_2 = \sinh a, \; Y_2 = 0, \; P_2 = \cosh a.$$

Für die von A liest man aus Fig. 8 ab: $P_3 = \cosh(AB) = \cosh c$, sodann $Y_3 = \sinh(AA_1) = \sinh c \sin\beta$ (nach [2] § 28 Formel [II]) und analog $X_3 = \sinh(AA_2) = \sinh c \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. Also zusammenfassend:

$$X_3 = \sinh c \cos\beta, \quad Y_3 = \sinh c \sin\beta, \quad P_3 = \cosh c.$$

Nach [2] § 28 Formel (III) notieren wir noch

$$\tanh(BA_1) = \tanh c \cos\beta = \frac{\sinh c \cos\beta}{\cosh c},$$

woraus die gleich zu benutzenden Formeln folgen:

$$\sinh(BA_1) = \frac{\sinh c \cos\beta}{\sqrt{1 + \sinh^2 c \sin^2\beta}}, \quad \cosh(BA_1) = \frac{\cosh c}{\sqrt{1 + \sinh^2 c \sin^2\beta}}. \tag{4.1}$$

Der Schnittpunkt S der Mitteltransversalen hat nach (3.7) die W-Koordinaten

$$X_4 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\lambda}, \quad Y_4 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{\lambda}, \quad P_4 = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{\lambda},$$

oder also nach Einsetzen der gefundenen Werte:

$$\boxed{\begin{gathered} X_4 = \frac{\sinh a + \sinh c \cos\beta}{\lambda}, \quad Y_4 = \frac{\sinh c \sin\beta}{\lambda}, \\ P_4 = \frac{1 + \cosh a + \cosh c}{\lambda}, \end{gathered}}$$

wobei es auf den (übrigens in [3.9] angegebenen) genauen Wert von λ nicht ankommen wird.

Um die W-Koordinaten des Höhenschnittpunkts H zu berechnen, lesen wir aus Fig. 8 nach [2] § 28, Formeln (V) und (I) sowie der ersten der obigen Formeln (4.1) ab:

$$\tanh(HA_1) = \sinh(BA_1)\tan\varphi = \frac{\sinh c\ \cos\beta}{\sqrt{1+\sinh^2 c\ \sin^2\beta}}\cdot\frac{\cot\gamma}{\cosh a},$$

und wenn wir im Zähler $\sinh c$ nach dem Sinussatz noch durch $\sinh b\ \sin\gamma/\sin\beta$ ersetzen,

$$\tanh(HA_1) = \frac{\sinh b\ \cos\beta\ \cos\gamma}{\sin\beta\ \cosh a\sqrt{1+\sinh^2 c\ \sin^2\beta}}.$$

Daraus folgt

$$\sinh(HA_1) = \frac{\sinh b\ \cos\beta\ \cos\gamma}{U},$$

$$\cosh(HA_1) = \frac{\sin\beta\ \cosh a\sqrt{1+\sinh^2 c\ \sin^2\beta}}{U},$$

wobei U eine Quadratwurzel ist, auf deren genauen Wert es nicht ankommen wird. Die W-Koordinaten von H sind nun in Fig. 8

$$X_5 = \cosh(HA_1)\ \sinh(BA_1),\quad Y_5 = \sinh(HA_1),$$
$$P_5 = \cosh(HB) = \cosh(HA_1)\ \cosh(BA_1).$$

Setzt man hier die oben gefundenen Werte ein, so kommt:

$$\boxed{\begin{gathered} X_5 = \frac{\sin\beta\cosh a\ \sinh c\ \cos\beta}{U},\qquad Y_5 = \frac{\sinh b\ \cos\beta\ \cos\gamma}{U},\\ P_5 = \frac{\sin\beta\ \cosh a\ \cosh c}{U}. \end{gathered}}$$

Was schließlich die W-Koordinaten X_6, Y_6, P_6 des Mittelpunktes M des Umkreises angeht, dessen Radius r sei, so ergeben sie sich aus der Bedingung

$$\cosh(BM) = \cosh r,\quad \cosh(CM) = \cosh r,$$
$$\cosh(AM) = \cosh r,$$

die sich in W-Koordinaten so schreibt:

$$\begin{aligned}
P_1 P_6 - X_1 X_6 - Y_1 Y_6 &= \cosh r,\\
P_2 P_6 - X_2 X_6 - Y_2 Y_6 &= \cosh r,\\
P_3 P_6 - X_3 X_6 - Y_3 Y_6 &= \cosh r,
\end{aligned}$$

oder also:

$$\begin{aligned}
1 \cdot P_6 - 0 \cdot X_6 \qquad\qquad & - 0 \cdot Y_6 &= \cosh r,\\
\cosh a \cdot P_6 - \sinh a \cdot X_6 \qquad & - 0 \cdot Y_6 &= \cosh r,\\
\cosh c \cdot P_6 - \sinh c \cos\beta \cdot X_6 & - \sinh c \sin\beta \cdot Y_6 &= \cosh r.
\end{aligned}$$

Durch sukzessive Auflösung nach P_6, X_6, Y_6 kommt

$$P_6 = \cosh r, \qquad X_6 = \frac{\cosh a - 1}{\sinh a} \cdot \cosh r,$$

$$Y_6 = \frac{(\cosh c - 1)\sinh a - (\cosh a - 1)\sinh c \cos\beta}{\sinh a \sinh c \sin\beta} \cdot \cosh r.$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$\cosh r = \frac{(\cosh a + 1)\sinh c \sin\beta}{V},$$

so kommt schließlich

$$\boxed{\begin{aligned}
X_6 &= \frac{\sinh a \sinh c \sin\beta}{V},\\
Y_6 &= \frac{(\cosh c - 1)(\cosh a + 1) - \sinh a \sinh c \cos\beta}{V},\\
P_6 &= \frac{(\cosh a + 1)\sinh c \sin\beta}{V},
\end{aligned}}$$

wobei es auf den genauen Wert von V, der sich natürlich aus $P_6^2 - X_6^2 - Y_6^2 = 1$ ergeben würde, nicht ankommen wird. Bei Y_6 ersetzen wir noch $\sinh a \sinh c \cos\beta$ nach dem ersten Cosinussatz ([2], § 30) durch $\cosh a \cosh c - \cosh b$ und erhalten

$$\boxed{Y_6 = \frac{\cosh c - \cosh a - 1 + \cosh b}{V}.}$$

Dafür, daß die drei Punkte S, H, M auf einer Geraden liegen, ist jetzt notwendig und hinreichend, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} X_4 & Y_4 & P_4 \\ X_5 & Y_5 & P_5 \\ X_6 & Y_6 & P_6 \end{vmatrix}$$

verschwindet, oder also, daß die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \begin{matrix}\sinh a \\ +\sinh c\cos\beta\end{matrix} & \sinh c\sin\beta & \begin{matrix}1+\cosh a \\ +\cosh c\end{matrix} \\ \begin{matrix}\sin\beta\cosh a \\ \cdot\sinh c\cos\beta\end{matrix} & \begin{matrix}\sinh b \\ \cdot\cos\beta\cos\gamma\end{matrix} & \begin{matrix}\sin\beta\cosh a \\ \cdot\cosh c\end{matrix} \\ \begin{matrix}\sinh a \\ \cdot\sinh c\sin\beta\end{matrix} & \begin{matrix}\cosh c-\cosh a \\ -1+\cosh b\end{matrix} & \begin{matrix}(\cosh a+1) \\ \cdot\sinh c\sin\beta\end{matrix} \end{vmatrix}$$

verschwindet. Um diese zu berechnen, multiplizieren wir die zweite Spalte mit $\cosh a$ und dividieren dafür die zweite Zeile durch $\cosh a$. Sodann ziehen wir die neue zweite Zeile, noch durch $\sin\beta$ dividiert, von der ersten ab. Dadurch bekommen wir

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sinh a & \begin{matrix}\cosh a\sinh c\sin\beta \\ -\sinh b\cot\beta\cos\gamma\end{matrix} & \cosh a+1 \\ \begin{matrix}\sin\beta\sinh c \\ \cdot\cos\beta\end{matrix} & \sinh b\cos\beta\cos\gamma & \cosh c\sin\beta \\ \begin{matrix}\sinh a\sinh c \\ \cdot\sin\beta\end{matrix} & \begin{matrix}\cosh c\cosh a-\cosh^2 a \\ -\cosh a+\cosh b\cosh a\end{matrix} & \begin{matrix}(\cosh a+1) \\ \cdot\sinh c\sin\beta\end{matrix} \end{vmatrix}.$$

Jetzt ziehen wir von der letzten Spalte die mit $\dfrac{\cosh a+1}{\sinh a}$ multiplizierte erste ab. Dann kommen in der ersten und dritten Zeile Nullen. In der zweiten aber kommt

$$\sin\beta\,\left(\cosh c - \frac{\cosh a + 1}{\sinh a}\sinh c\cos\beta\right)$$
$$= \frac{\sin\beta}{\sinh^2 a}\,[\cosh c\sinh^2 a - (\cosh a + 1)\sinh a\sinh c\cos\beta]$$
$$= \frac{\sin\beta}{\sinh^2 a}\,[\cosh c\,(\cosh^2 a - 1) - (\cosh a + 1)(\cosh a\cosh c - \cosh b)]$$
$$= \frac{\sin\beta}{\sinh^2 a}\,(\cosh a + 1)(\cosh b - \cosh c).$$

Dadurch zerfällt die Determinante Δ in zwei Faktoren $\Delta_1 \Delta_2$, wobei

$$\Delta_1 = \frac{\sin\beta}{\sinh^2 a}\,(\cosh a + 1)(\cosh c - \cosh b),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sinh a & \begin{matrix}\cosh a\sinh c\sin\beta \\ -\sinh b\cot\beta\cos\gamma\end{matrix} \\ \begin{matrix}\sinh a\sinh c \\ \cdot\sin\beta\end{matrix} & \begin{matrix}\cosh c\cosh a - \cosh^2 a \\ -\cosh a + \cosh b\cosh a\end{matrix} \end{vmatrix}$$

ist. In der Determinante Δ_2 ziehen wir von der zweiten Spalte die mit $\dfrac{\sinh b\ \cos\alpha}{\sinh a\sin\beta}$ multiplizierte erste ab. In der zweiten Zeile kommt dann mit Benutzung des ersten Cosinussatzes

$$\cosh c\cosh a - \cosh^2 a + \cosh b\cosh a - \cosh a - \sinh c\sinh b\cos\alpha$$
$$= \cosh c\cosh a - \cosh^2 a + \cosh b\cosh a - \cosh c\cosh b$$
$$= (\cosh a - \cosh c)(\cosh b - \cosh a).$$

In der ersten Zeile aber kommt

$$\cosh a\ \sinh c\ \sin\beta - \frac{\sinh b\ \cos\beta\ \cos\gamma}{\sin\beta} - \frac{\sinh b\cos\alpha}{\sin\beta}$$
$$= \cosh a\ \sinh c\ \sin\beta - \frac{\sinh b}{\sin\beta}\,(\cos\beta\ \cos\gamma + \cos\alpha)$$
$$= \cosh a\ \sinh b\ \sin\gamma - \frac{\sinh b}{\sin\beta}\,\sin\beta\ \sin\gamma\ \cosh a = 0,$$

wobei zuletzt noch der Sinussatz und der zweite Cosinussatz ([2] § 30) benutzt wurden. Also ist

$$\Delta_2 = \sinh a\,(\cosh a - \cosh c)\,(\cosh b - \cosh a),$$

und somit

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2 = \frac{\sin\beta}{\sinh a}\,(\cosh a + 1)\,W, \quad \text{wobei}$$

$$W = (\cosh c - \cosh b)\,(\cosh a - \cosh c)\,(\cosh b - \cosh a).$$

Daher verschwindet Δ und liegen also die drei Punkte S, H, M auf einer Geraden dann und nur dann, wenn von den drei Seiten a, b, c zwei einander gleich sind, das Dreieck also gleichschenklig ist. W. z. b. w.

Beim nicht gleichschenkligen Dreieck müssen die drei Punkte, da sie nicht auf einer Geraden liegen, auf einer echten Kreisform (gewöhnlicher Kreis oder Grenzkreis oder Abstandslinie) liegen. Aus Stetigkeitsgründen ist klar, daß bei einem „nahezu" gleichschenkligen Dreieck auch die Kreisform „nahezu" eine Gerade sein muß, also eine Abstandslinie. Ob es immer so ist, vermag ich nicht zu sagen. Ich konnte trotz eifrigen Suchens kein Dreieck finden, bei dem es anders war, kann aber auch nicht beweisen, daß es keines gibt.

§ 5. Über die Krümmung ebener Kurven

Bekanntlich gibt es in der hyperbolischen Geometrie eine natürliche Längeneinheit, die genau so natürlich ist wie die dem Anfänger als gekünstelt erscheinende, in Wahrheit aber natürliche Logarithmenbasis e. Diese natürliche Längeneinheit ist allerdings nicht auf den unseren Augen oder gar unseren Astronauten zugänglichen winzigen „unendlich kleinen" Teil der unendlich großen Welt zugeschnitten. Sie reicht weit in die Sternenwelt hinein, und wir können sie nicht in Lichtjahren oder gar Kilometern ausdrücken. Alle in dieser und meinen früheren Arbeiten vorkommenden Längen sind in dieser natürlichen Einheit ausgedrückt. Will man statt dessen eine irdische Längeneinheit, etwa das Meter, einführen, so muß man die natürliche Längeneinheit etwa mit R bezeichnen, wobei R eine ungeheuer große, uns aber unbekannte Zahl ist, und man muß in den Formeln statt aller Längen $a, b, \ldots$ schreiben a/R, b/R, ... Wie häßlich würden dann z. B. die Formeln des Ceva-Kaleidoskops aussehen. Trotzdem wird das vielfach so gemacht und manchmal wird der unschöne Faktor $1/R$ oder sein Quadrat auch als Krümmung bezeichnet. Aber das sollte man nicht tun, es ist irreführend. Ich erinnere mich aus meiner Studentenzeit, wie schon Ferdinand Lindemann in Vorlesungen davor warnte und mißbilligend ausrief: „Da reden die Philosophen von krummen Räumen.“

Man kann im Euklidischen Raum Abbilder (Modelle) der hyperbolischen Ebene (oder wenigstens eines Teiles davon) angeben. Das sind gewisse Flächen, z. B. die Pseudosphären, und auf ihnen gewisse Kurven als Bilder der hyperbolischen Geraden. Diese Flächen und Kurven sind als Gebilde der Euklidischen Geometrie gekrümmt, aber man soll die Krümmung der Bilder nicht als Krümmung der Originale ausgeben. Mit demselben oder noch größerem Recht könnte man auch folgendes machen. Im hyperbolischen Raum gibt es Abbilder (Modelle) der Euklidischen Ebene (sogar der vollen Ebene, nicht nur eines Teiles). Das sind die Grenzkugeln, und auf ihnen gewisse Bilder der Euklidischen Geraden; das sind die Grenzkreise. Diese Flächen und Kurven sind als Gebilde des hyperbolischen Raumes gekrümmt, und nun könnte man versucht sein, die Krümmung dieser Bilder auch den Originalen, also den Euklidischen Ebenen und Geraden, anzudichten. Aber so weit hat sich wohl noch niemand verstiegen.

Nunmehr wenden wir uns dem echten Krümmungsbegriff zu, und zwar bei einer ebenen Kurve. Zunächst sei daran erinnert, wie man es in der Euklidischen Geometrie macht. Da berechnet man im gegebenen Kurvenpunkt P mit Hilfe eines Nachbarpunktes P_1, den man auf der Kurve gegen P hinwandern läßt, die Tangente in P und senkrecht dazu die Normale in P. Dann braucht man einen zweiten Nachbarpunkt P_2, berechnet in diesem (mit Hilfe eines weiteren gegen P_2 wandernden Nachbarpunktes P_3) die Tangente in P_2 und senkrecht dazu die Normale in P_2. Dann berechnet man den Schnittpunkt der beiden Normalen und läßt schließlich P_2 gegen P hinwandern, um dann die Grenzlage des Normalenschnittpunktes als Krümmungsmittelpunkt zu definieren. Also eine ziemlich komplizierte Sache, drei Nachbarpunkte sind etwas reichlich; manchmal werden auch noch Kontingenzwinkel und Bogenelement bemüht.

Es geht aber auch viel einfacher. Die rechtwinkligen Koordinaten x_0, y_0 der Kurve seien als Funktionen eines Parameters t gegeben, die Gleichung des Krümmungskreises sei

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

man muß a, b, r berechnen. Da der Krümmungskreis durch den Kurvenpunkt x_0, y_0 gehen soll, muß

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2 \tag{5.1}$$

sein. Der Kreis soll aber auch durch den Nachbarpunkt x_0+dx_0, y_0+dy_0 gehen. Statt die entsprechende Gleichung hinzuschreiben, zieht man gleich die vorige davon ab, dividiert durch dt und läßt dann dt nach 0 wandern. Das heißt einfach, man differenziert die Gleichung (5.1) nach t und erhält

$$(x_0-a)x_0'+(y_0-b)y_0'=0. \tag{5.2}$$

Der Kreis soll aber noch durch einen weiteren Nachbarpunkt gehen. Man differenziert also noch einmal:

$$x_0'^2+y_0'^2+(x_0-a)x_0''+(y_0-b)y_0''=0. \tag{5.3}$$

Aus (5.1), (5.2) und (5.3) sind a, b, r zu berechnen. Aus (5.2) folgt

$$x_0-a=\varrho y_0', \quad y_0-b=-\varrho x_0', \tag{5.4}$$

und das in (5.3) eingesetzt ergibt:

$$\varrho(x_0'y_0''-y_0'x_0'')=x_0'^2+y_0'^2.$$

Damit hat man ϱ, aus (5.4) dann a und b und aus (5.1) auch r.

Nun kommen wir zur hyperbolischen Geometrie, wo die Rechnung noch einfacher ist. Da kann man gar nicht immer von Krümmungskreis, seinem Mittelpunkt und Radius reden. Vielmehr gibt es durch irgend drei Punkte stets *genau eine* Kreisform, die ein gewöhnlicher Kreis oder Grenzkreis oder Abstandslinie oder auch eine Gerade sein kann. Das gilt auch für drei unendlich nahe Nachbarpunkte auf einer Kurve. Wir denken uns die W-Koordinaten X_0, Y_0, P_0 der Kurve als Funktionen eines Parameters t gegeben. Die Gleichung der Krümmungskreisform sei

$$AX + BY + CP + D = 0. \tag{5.5}$$

Wir müssen die Koeffizienten A, B, C, D berechnen. Da die Kreisform durch den gegebenen Kurvenpunkt X_0, Y_0, P_0 gehen soll, muß

$$AX_0 + BY_0 + CP_0 + D = 0$$

sein. Die Kreisform soll aber auch durch einen unendlich nahen Nachbarpunkt gehen; wir müssen also einfach nach t differenzieren:

$$AX_0' + BY_0' + CP_0' = 0,$$

und noch ein Nachbarpunkt verlangt nochmals Differentiation:

$$AX_0'' + BY_0'' + CP_0'' = 0.$$

Aus den drei Gleichungen kann man das Verhältnis $A:B:C:D$ berechnen und in (5.5) einsetzen, und in Determinantenform sieht die Krümmungskreisform einfach so aus:

$$\begin{vmatrix} X & Y & P & 1 \\ X_0 & Y_0 & P_0 & 1 \\ X_0' & Y_0' & P_0' & 0 \\ X_0'' & Y_0'' & P_0'' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Einfacher kann man es nicht mehr verlangen. Die Krümmungskreisform ist für $A^2 + B^2 < C^2$ ein gewöhnlicher Kreis, dessen Mittelpunkt und Radius man z. B. aus [3] Ziffer 102 ablesen kann; für $A^2 + B^2 = C^2$ ist es ein Grenzkreis, dessen unendlich fernen Mittelpunkt man ebenfalls aus [3] Ziffer 102 entnehmen kann; für $A^2 + B^2 > C^2$ ist es eine Abstandslinie, deren etwa als *Krümmungsachse* zu bezeichnende Null-Linie und deren etwa als *Krümmungshöhe* zu bezeichnender Abstand von der Null-Linie auch wieder aus [3] Ziffer 102 zu entnehmen sind. Für $D = 0$ fällt die Abstandslinie mit ihrer Null-Linie zusammen und ist einfach die Kurventangente.

Literatur

[1] Liebmann, H.: Nichteuklidische Geometrie. 3. Aufl. 1903.

[2] Perron, O.: Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene. Teubner-Verlag, Stuttgart 1962.

[3] Baldus, R. und Löbell, F.: Nichteuklidische Geometrie. 4. Aufl. 1964 (Sammlung Göschen).

[4] Perron, O.: Miszellen zur hyperbolischen Geometrie. Diese Sitzungsber. 1964, S. 157–176.

[5] Perron, O.: Miszellen zur hyperbolischen Geometrie. II. Diese Sitzungsber. 1965, S. 153–183.

[6] Spiegelungen in der hyperbolischen Ebene. Mathemat. Annal. **166**, S. 8–18 (1966).

[7] Perron, O.: Über Ähnlichkeit, Dehnung und Schrumpfung in der hyperbolischen Geometrie. Mathemat. Zeitschr. **90**, S. 166–184 (1965).

[8] Perron, O.: Kreisverwandtschaften in der hyperbolischen Geometrie. Mathemat. Zeitschr. **93**, S. 69–79 (1966).