BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1966

MÜNCHEN 1967

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bestimmung der nicht-beschränkten Bogen dritter Ordnung mit Doppelpunkt in projektiven Ebenen

Georg Aumann zum sechzigsten Geburtstag in alter Freundschaft gewidmet

Von **Otto Haupt** in Erlangen

Vorgelegt am 4. November 1966

Es sei E eine topologisch ebene projektive Ebene und $\mathfrak{k}$ ein System von „verallgemeinerten Geraden" K (vgl. Nr. 1.1. der vorliegenden Note). In einer früheren Note ([1]*, vgl. auch [2], Nr. 3. 2. 5. 6.) waren alle *einfachen* Bogen dritter Ordnung bezüglich $\mathfrak{k}$ bestimmt worden, die nicht $\mathfrak{k}$-beschränkt, d. h. zu keinem $K \in \mathfrak{k}$ fremd, sind.

In der gegenwärtigen Note sollen nunmehr alle nicht $\mathfrak{k}$-beschränkten Bogen dritter Ordnung (bezüglich $\mathfrak{k}$) *mit* Verzweigungspunkt Doppelpunkt bestimmt werden. Das *Ergebnis* lautet:

Es sei $B = B(a' \mid a'')$ ein (Durchlaufungs-)Bogen, mit den Endpunkten a', a''; und es sei B von dritter Ordnung bezüglich $\mathfrak{k}$ (vgl. die Definition in Nr. 1.2.). Besitzt B Doppelpunkte, so genau einen, etwa d, und in B ist genau eine, d enthaltende einfache *Kurve* C enthalten; außerdem ist die Verzweigungsordnung von d (vgl. Nr. 1.2) entweder 3 oder 4. – Sei jetzt überdies B nicht $\mathfrak{k}$-beschränkt. Es besitzt C entweder die Ordnung 2 oder 3. Im ersten Fall ist $B_0 = (B - C) \cup \{d\}$ ein $\mathfrak{k}$-beschränkter einfacher Bogen der Ordnung 3 mit einem Dorn als einzigem $\mathfrak{k}$-singulären Punkt. Im zweiten Fall ist B_0 ein Bogen der Ordnung 2 und es kann B ev. zu einer Kurve der Ordnung 3 erweitert werden (Genaueres in Nr. 3. 4., Satz, und Nr. 4. 2., Satz.).

---

* [1] oder [2] im Text verweist auf das Literaturverzeichnis am Schlusse der Note.

Auf die allgemeinere Frage nach einer geeigneten Klassifikation der (ebenen) *Kontinua* von dritter, ev. auch schwacher, Ordnung soll an anderer Stelle eingegangen werden.

§ 1. Vorbemerkungen

1.1. Es sei E die gewöhnliche projektive Ebene (oder ein topologisches Bild von ihr); in E sei gegeben ein System $\mathfrak{k}$ von, als Ordnungscharakteristiken, kurz OCh, bezeichneten „verallgemeinerten Geraden" K, d. h. von einfachen Kurven K in E mit folgenden Eigenschaften: Durch beliebige zwei Punkte x, $y \in E$ ist eindeutig ein $K \in \mathfrak{k}$ mit $x, y \in K$ bestimmt, in Zeichen $K = K(x, y)$; es ist $K(x, y)$ stetige Funktion von (x, y): schließlich ist $K \frown K'$ einpunktig für beliebige $K, K' \in \mathfrak{k}$ mit $K \neq K'$ und $K \frown K'$ ist stetige Funktion von (K, K') (vgl. Näheres in [2], Nr. 3.1.2.).

Ist $K_0 \in \mathfrak{k}$ und wird $E_0 = E - K_0$ gesetzt, so wird $E_0 - E_0 \frown K$ für jedes $K \in \mathfrak{k} - \{K_0\}$ Vereinigung zweier offener, fremder, von $E_0 \frown K$ in E_0 begrenzter ($\mathfrak{k}$-)Halbebenen in E_0, der sogenannten beiden Seiten $K(\alpha) = K(\alpha; E_0)$ von K in E_0, wobei $\alpha = +$ oder $\alpha = -$ ist.

Eine Menge $M \subset E$ heißt $\mathfrak{k}$-konvex, wenn $M \frown K$ für jedes $K \in \mathfrak{k}$ entweder leer oder ein Punkt oder eine $\mathfrak{k}$-Strecke, d. h. Teilbogen eines $K \in \mathfrak{k}$, ist. Ferner heißt M $\mathfrak{k}$-beschränkt, wenn es eine OCh K' gibt mit $\bar{M} \frown K' = 0$; z. B. ist also jedes M mit $\bar{M} \subset E_0$ $\mathfrak{k}$-beschränkt. ($\bar{M}$ bezeichnet die abgeschlossene Hülle von M und $\underline{M}$ den offenen Kern von M (in E)).

Ist $K \in \mathfrak{k} - \{K_0\}$ und $x \in E_0 \frown K$, so wird $E_0 \frown K$ durch x in die beiden (in E_0 abgeschlossenen) bis auf ihren gemeinsamen „Anfangspunkt" x fremden HalbOCh $Kh(x; \pm)$ zerlegt; es heißt K Träger von $Kh(x; +)$ und von $Kh(x; -)$.

Sind $H', H'' \subset E_0$ HalbOCh mit dem gleichen Anfangspunkt $h \in E_0$ aber mit verschiedenen Trägern, so sei $W = W_0(H', H'') \subset E_0$ der offene, $\mathfrak{k}$-*konvexe*, von H' und H'' in E_0 begrenzte „Winkelraum"; es ist dann $W_0(H', H'')$ $\mathfrak{k}$-beschränkt.

Unter einer (E-)Umgebung von $x \in E$ wird jede Umgebung des Punktes x in E verstanden. Die Bezeichnung ($\mathfrak{k}$-)Umgebung einer OCh K sowie später z. B. $\lim K_n$ ($K_n \in \mathfrak{k}$) bezieht sich auf die Metrik im Raum der kompakten Teilmengen von E; in diesem Sinne ist auch der Begriff der Stetigkeit von $K \cap K'$ in Abhängigkeit von K, K' usw. zu verstehen.

1.2. Unter einem Bogen bzw. einer Kurve in E wird jedes eindeutige, stetige Bild in E der Strecke bzw. der Kreisperipherie verstanden; handelt es sich um topologische Bilder, so sprechen wir von einfachen Bogen bzw. Kurven; falls Mißverständnisse ausgeschlossen sind, kann auf die Hinzufügung von „einfach" auch verzichtet werden.

Ist der Bogen B erklärt vermöge der stetigen Abbildung $f: x \to f(x)$ für $x \in [0, 1]$ mit $f(x) \in E$, so heiße die Menge (der Bildpunkte) $F = f([0, 1]) = \{f(x): x \in [0, 1]\}$ auch der Träger von B. Ist die Menge $\{x: f(x) = p\}$ der Urbilder des Punktes $p \in F$ mehrpunktig, so heißt p ein Doppel- oder Verzweigungspunkt, kurz VP, von B oder von F. Da wir es im Folgenden nur mit Bogen (bzw. Kurven) B zu tun haben werden, die genau einen VP besitzen, so kann und soll B als Vereinigung von (höchstens vier) *einfachen* Bogen betrachtet werden, die bis auf Endpunkte paarweise fremd sind. In einem VP d „münden" Teilbogen S_i von B, die bis auf d paarweise fremd (und hinreichend klein) sind und deren Anzahl als die Verzweigungsordnung VO $=$ VO $(d; B)$ von d auf B bezeichnet wird; es ist also $S_i \cap S_j = \{d\}$ für $i \neq j$ und es ist d Endpunkt eines jeden S_i. Definitionsgemäß ist VO $(d; B) \geq 3$. Für uns kommt nur $3 \leq$ VO (d; B) ≤ 4 in Betracht (vgl. Nr. 2.1.).

Ein einfacher *Bogen* (oder *Kurve*) heißt $\mathfrak{k}$-*konvex*, wenn B vollständig auf der Begrenzung seiner $\mathfrak{k}$-konvexen Hülle liegt; es ist dann $B \cap K$ für jedes $K \in \mathfrak{k}$ entweder leer oder einpunktig oder zweipunktig, sofern B *keine* $\mathfrak{k}$-*Strecken* enthält, was im Folgenden immer der Fall ist. Alle $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen und Kurven sind $\mathfrak{k}$-beschränkt (denn durch jeden Punkt x eines solchen Bogens (einer solchen Kurve) B geht eine, bis auf x zu B fremde OCh (vgl. [2], Nr. 3.1.5.).

Ist $A \subset E$ irgend ein (einfacher) Bogen mit den Endpunkten a', a'', wobei also $a' \neq a''$ für einen Bogen, so setzen wir $A = A(a' | a'')$ und $\underset{\sim}{A} = A - \{a'\} - \{a''\}$. Ist $x \in A \cap E_0$, ferner U eine $\mathfrak{k}$-konvexe Umgebung von x in E_0 und $K \in \mathfrak{k}$ mit $x \in K$, so heiße x *Stütz*punkt von A mit (und) K', ferner K StützOCh an A in x, wenn $(A - \{x\}) \cap U \subset K(\alpha) \cap U$ für ein $\alpha = \pm$ bei hinreichend kleinem U; andernfalls heißt x *Schnitt*punkt von A mit (und) K.

Man bezeichnet mit POW $(A \cap K)$ die Anzahl (Kardinalzahl) der Punkte von $A \cap K$ und als Punktordnungswert POW $(A; \mathfrak{k})$ von A bezüglich $\mathfrak{k}$ das Maximum der POW $(A \cap K)$ für alle $K \in \mathfrak{k}$), falls dieses Maximum existiert. – Ist POW$(A \cap K)$ endlich für jedes $K \in \mathfrak{k}$, so ist A frei von $\mathfrak{k}$-Strecken. Einfache Bogen und Kurven B ohne $\mathfrak{k}$-Strecken sind $\mathfrak{k}$-konvex genau dann, wenn POW $(B; \mathfrak{k}) = 2$ ist.

1.3. Es seien $A' = A'(y|a')$, $A'' = A''(y|a'')$ $\mathfrak{k}$-konvexe Bogen mit $A' \cap A'' = \{y\}$. Dann existiert in y an A' sowie an A'' die ($\mathfrak{k}$-)Halbtangente $H' = H'(y)$ bzw. $H'' = H''(y)$, d. h. die HalbOCh $H'(y)$ bzw. $H''(y)$, welche Limes ist der HalbOCh $H(y; z)$ mit dem Anfangspunkt y und mit $z \in H(y; z)$, $y \neq z$, sowie mit $z \in \underset{\sim}{A}'$ bzw. $z \in \underset{\sim}{A}''$ und mit $z \to y$ (vgl. [2], Nr. 3.1.6.). Zugleich ist der Träger T' bzw. T'' von H' bzw. von H'', die sogen. $\mathfrak{k}$-Tangente T' bzw. T'' in y an A' bzw. an A'', der Limes der OCh $K(z', x')$ bzw. $K(z'', x'')$ mit $z', x' \in A'$ bzw. $z'', x'' \in A''$ und mit $z', x' \to y$ bzw. $z'', x'' \to y$ $(z' \neq x', z'' \neq x'')$; T' bzw. T'' ist daher auch (die) $\mathfrak{k}$-Parantingente an A' bzw. an A'' in y. – Im Folgenden sei o. B. d. A. $A' \cup A'' \subset E_0$.

(**a**) Es heiße y ein echter Hut (auf $A' \cup A''$), oder: es bildet (besitzt) $A' \cup A''$ in y einen (echten) Hut, wenn $T' \neq T''$ und wenn $\underset{\sim}{A}' \cup \underset{\sim}{A}'' \subset W_0(H', H'')$ (Vgl. 1.1.). Ist $T' = T'' = H' \cup H''$ und liegen $\underset{\sim}{A}'$ und $\underset{\sim}{A}''$ auf der gleichen Seite $T'(\alpha)$ von T', so heißt y ein unechter Hut.

(**b**) Es heiße y ein Dorn bzw. eine Dornspitze (auf $A' \cup A''$), wenn $T' \neq T''$ ist und $\underset{\sim}{A}' \cup \underset{\sim}{A}'' \subset E_0 - \overline{W}_0(H', H'')$ gilt bzw. wenn $H' = H''$ ist sowie $\underset{\sim}{A}'$ und $\underset{\sim}{A}''$ auf verschiedenen Seiten $T(+)$, $T(-)$ von $T = T' = T''$ liegen.

(**c**) Es heiße y ein Schnabel (auf $A' \cup A''$), wenn $T' \neq T''$ und wenn $\underset{\sim}{A}'$ und $\underset{\sim}{A}''$ auf der gleichen Seite genau eines der T', T'', etwa von T', liegen sowie $\underset{\sim}{A}' \subset W_0(H', H'')$, $\underset{\sim}{A}'' \subset E_0 - \overline{W}_0(H', H'')$.

(Schnabelspitzen, bei denen $H' = H''$, also $T' = T''$ ist, sind hier ausgeschlossen, vgl. unten.)

(**d**) Es heißt y Wendepunkt (auf $A' \cup A''$), wenn $T' = T'' = T$ und $H' \cup H'' = T$ und wenn $\underset{\sim}{A}' \subset T(\alpha)$, $\underset{\sim}{A}'' \subset T(-\alpha)$, $\alpha = +$ oder $\alpha = -$.

Ist U eine hinreichend kleine EUmgebung von y und $B = (A' \cup A'') \cap U$ ein Bogen, so gilt:

(**a'**) Ist y ein *Hut*, so ist $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 2$ (und umgekehrt).

(**b'**) Ist y *Dorn* oder *Dornspitze*, so ist $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 3$; und zwar ist $\mathrm{POW}(B \cap \tilde{K}) = 3$ für jedes zu T' oder zu T'' hinreichend (in $\mathfrak{k}$) benachbarte $\tilde{K} \in \mathfrak{k}$ mit $\mathrm{POW}(\underset{\sim}{A}' \cap \tilde{K}) = 2$ oder mit $\mathrm{POW}(\underset{\sim}{A}'' \cap \tilde{K}) = 2$.

(**c'**) Ist y ein *Schnabel* (aber nicht Schnabelspitze), so gibt es unter den A', A'' genau eines, etwa A', von folgender Art: Es ist $\mathrm{POW}(B \cap K) = 2$ bzw. $= 3$ für jede zu T' bzw. zu T'' hinreichend benachbarte OCh K mit $\mathrm{POW}(\underset{\sim}{A}' \cap K) = 2$ bzw. $\mathrm{POW}(\underset{\sim}{A}'' \cap K) = 2$.

Anmerkung. Für eine Schnabelspitze gibt es zu $T' = T''$ beliebig benachbarte OCh K mit $\mathrm{POW}(B \cap K) = 4$. Deshalb treten Schnabelspitzen bei Bogen B mit $\mathrm{POW}(B; k) = 3$ nicht auf.

(**d'**) Ist y *Wendepunkt*, so ist $\mathrm{POW}(B \cap K) = 3$ für jede zu $T = T' = T''$ hinreichend benachbarte OCh K mit $\mathrm{POW}(\underset{\sim}{A}' \cap K) = 2$ oder mit $\mathrm{POW}(\underset{\sim}{A}'' \cap K) = 2$.

1.3.1. Die in Nr. 1.3., (b') bzw. (c') bzw. (d') definierten, den T', T'' bzw. dem T'' bzw. dem T entsprechenden OCh $\tilde{K}$ *mit* $\mathrm{POW}(B \cap \tilde{K}) = 3$ bzw. OCh K mit $\mathrm{POW}(B \cap K) = 3$ mögen der Kürze halber als maximal bezeichnet werden ebenso wie *die zugehörigen* A', A'' bzw. A'' bzw. A', A''. Für Dorn und Dornspitze sowie für den Wendepunkt sind also A', A'' beide maximal, für den Schnabel ist aber nur eines der A', A'' maximal, nämlich nur A''. Auch die *Tangente* im gemeinsamen Endpunkt von A' und A'' an ein maximales A' bzw. A'' heiße maximal.

§ 2. Bogen von 3. Ordnung mit Verzweigungspunkt

2.1. Vor. Es besitze B Verzweigungspunkte. Außerdem sei POW $(B; \mathfrak{k}) = 3$.

Beh. (1) Es besitzt B genau einen Verzweigungspunkt (kurz VP) d und dieser besitzt die Verzweigungsordnung (kurz VO) Drei oder Vier. – (2) Es ist B Vereinigung endlich (sogar beschränkt) vieler $\mathfrak{k}$-konvexer Bogen.

Bew. *Betr.* VO $(d; B) \leq 4$ *für jeden* VP d. Indirekt. Andernfalls gibt es mindestens 5 in d mündende Teilbogen S_j (vgl. Nr. 1.2.). Ist $x_1 \in \underset{\sim}{S}_1$ beliebig, so liegen in einer hinreichend kleinen EUmgebung von d (mindestens) 3 der $\underset{\sim}{S}_j$, etwa $\underset{\sim}{S}'_1$, $\underset{\sim}{S}'_2$, $\underset{\sim}{S}'_3$ auf der gleichen Seite der OCh K_1 mit x_1, $d \in K_1$; es gibt daher zu K_1 beliebig benachbarte $K'_1 \in \mathfrak{k}$ mit $x_1 \in K'_1$ und mit $\underset{\sim}{S}'_j \cap (K'_1 - \{x_1\}) \neq \theta$, $j = 1, 2, 3$; somit wäre POW $(B \cap K'_1) \geq 4$ im Widerspruch zu POW $(B; \mathfrak{k}) = 3$.

Betr. Einzigkeit des VP. Sind d', d'' VP von B und ist $K = K(d', d'') \in \mathfrak{k}$, so liegen in EUmgebungen U', U'' von d' und d'' je (mindestens) 2 der (mindestens 3) in d' bzw. in d'' mündenden Teilbogen von B auf je der gleichen Seite von K in U' bzw. in U''; dann gibt es aber zu K beliebig benachbarte OCh $\tilde{K}$ mit POW $(B \cap \tilde{K}) \geq 4$. Widerspruch.

Betr. Stückweise $\mathfrak{k}$-Konvexität von B. Jeder Punkt $x \in B$ besitzt gemäß Beh. (1) eine Umgebung auf B, die Vereinigung endlich vieler einfacher Bogen je vom POW ≤ 3 ist. Und jeder solche Bogen ist stückweise $\mathfrak{k}$-konvex (vgl. [2], Nr. 3.2.4., 3.2.5.).

2.2. In B enthaltene einfache Kurve.

Es sei $B = B(a' \mid a'')$ ein Bogen $(a' \neq a'')$ mit (genau) einem Verzweigungspunkt d und mit $3 \leq$ VO $(d; B) \leq 4$. Es ist B Vereinigung aus einer, d enthaltenden, einfachen Kurve C und aus 1 bzw. 2 einfachen, in d mündenden Teilbogen B_i, je nachdem VO $(d; B) = 3$ bzw. $= 4$ ist.

In der Tat: Nach Voraussetzung besitzt B genau zwei Endpunkte, nämlich a' und a''. In d münden Teilbogen T_i von B, wobei $i = 1, \ldots, \mathrm{VO}(d; B)$ mit $T_i \cap T_j = \{d\}$ für $i \neq j$. Es sei T_i'' der größte abgeschlossene, T_i enthaltende Teilbogen von B mit $d \notin \underset{\sim}{T}_i''$. Unter diesen T_i'' müssen mindestens zwei identisch sein; da nämlich aus $T_i'' \cap T_j'' \neq \{d\}$ folgt $(i \neq j)$, daß $T_i'' = T_j''$ ist, und da $3 \leq \mathrm{VO}(d; B)$ ist, besäße B mindestens drei Endpunkte, falls alle T_i bis auf d fremd wären. – Ist also etwa $T_1'' = T_2''$, so ist T_1'' eine in B enthaltene Kurve C. Wird dann $T_3 = T_3''$ und – falls $\mathrm{VO}(d; B) = 4$ ist – auch $T_4 = T_4''$ gesetzt, so sind T_1'', T_3 und (gegebenenfalls) T_4 paarweise fremd bis auf d. Für $\mathrm{VO}(d; B) = 4$ ist $B = B(a' \mid a'') = T_1'' \cup T_3 \cup T_4$ mit $T_3 = B(d \mid a')$ und $T_4 = B(d \mid a'')$, wobei $d \neq a'$, $d \neq a''$ und $a' \neq a''$. Hingegen für $\mathrm{VO}(d; B) = 3$ ist etwa $T_3 = B(d \mid a')$ und $a'' = d$.

2.2.1. Es sei B ein Bogen mit dem Verzweigungspunkt d und mit $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 3$. Dabei sei C die (gemäß Nr. 2.2. und 2.1.) einzige, in B enthaltene, einfache, den einzigen Verzweigungspunkt d von B enthaltende Kurve. Wir unterscheiden dann (gemäß Nr. 2.2.) die folgenden Fälle: Hinsichtlich $\mathrm{VO}(d; B)$:

I. Fall. Es ist $\mathrm{VO}(d; B) = 4$; II. Fall. Es ist $\mathrm{VO}(d; B) = 3$.

Hinsichtlich C:

1. Fall. Es ist $\mathrm{POW}(C; \mathfrak{k}) = 2$; 2. Fall. Es ist $\mathrm{POW}(C; \mathfrak{k}) = 3$.

(Weil nämlich C streckenfrei ist, gilt $\mathrm{POW}(C; \mathfrak{k}) \geq 2$; und wegen $C \subset B$ ist auch $\mathrm{POW}(C; \mathfrak{k}) \leq 3$.)

Die vier, durch Kombination der Fälle I., II., 1., 2. sich ergebenden Möglichkeiten werden jetzt einzeln diskutiert.

2.3. Es sei $\mathrm{VO}(d; B) = 4$ (*Fall* I.). Hier ist $B = B(a' | a'') = C \cup B' \cup B''$ mit $B' = B(d | a')$, $B'' = B(d | a'')$ und $B' \cap C = B'' \cap C = B' \cap B'' = \{d\}$. *Es sei* dann V' *bzw.* V'' eine hinreichend kleine, *einseitige Umgebung von d auf B' bzw. auf B''.* Ferner *seien* C', C'' hinreichend kleine, *einseitige Umgebungen von d auf* C mit $\underset{\sim}{C}' \cap \underset{\sim}{C}'' = 0$. O. B. d. A. werden die V', V'' als $\mathfrak{k}$-konvex angenommen (vgl. Nr. 2.1., Beh. (2)) und ebenso die C', C''. Die Halbtangenten in d an B', B'', C', C'' seien bzw. H_B', H_B'', H_C', H_C'', und ihre Träger bzw. T_B', T_B'' bzw. T_C', T_C''.

Ist dagegen $\mathrm{VO}(d; B) = 3$ (*Fall* II.), so fallen etwa B'', H_B'', T_B'' fort.

§ 3. Der Fall POW $(C;\mathfrak{k}) = 2$ (Fall 1.)

3.1. Betr. die *Kurve* C gilt folgende

Beh. *Auf* C *ist* d *ein* echter *Hut (sowohl im Fall* I. *als im Fall* II.)

Bew. Andernfalls ist d unechter Hut, also $T'_C = T''_C = H'_C \cup H''_C = T$. Dabei ist d Stützpunkt von C auf T und es ist C $\mathfrak{k}$-beschränkt (gemäß Nr. 1.2. bzw. [2], Nr. 3.1.5.2., Satz, und 3.1.5.3., Satz 3., weil POW $(C;\mathfrak{k}) = 2$). Daher kann $C \subset E_0$ und $C - \{d\} \subset T(+) \subset E_0 - E_0 \cap T$ angenommen werden, wobei $T(+)$ eine der beiden, in $E_0 - E_0 \cap T$ enthaltenen $\mathfrak{k}$-Halbebenen bezeichnet (vgl. Nr. 1.1.).

(i) Es sei (wie in Nr. 2.3.) V' bzw. V'' eine hinreichend kleine, $\mathfrak{k}$-konvexe, einseitige Umgebung von d auf $(B - \underset{\sim}{C})$ mit $V' \cap V'' = \{d\}$, wobei $\underset{\sim}{C} = C - \{d\}$. Es ist $\underset{\sim}{V}' \not\subset T(+)$; und ebenso, wenn Fall I. vorliegt, $\underset{\sim}{V}'' \not\subset T(+)$. – Ist nämlich $J(C)$ das Innere von C, so folgt aus z. B. $\underset{\sim}{V}' \subset T(+)$, daß entweder (i 1) $\underset{\sim}{V}' \subset T(+) - \overline{J(C)} = A(+)$ oder (i 2) $\underset{\sim}{V}' \subset J(C)$. – Im Fall (i 1) ist d Schnabelspitze auf $V' \cup C'$ (oder auf $V' \cup C''$), also POW $(C \cup V';\mathfrak{k}) \geq 4$ (oder POW $(V' \cup C'';\mathfrak{k}) \geq 4$) im Widerspruch zu POW $(B;\mathfrak{k}) = 3$. – Im Fall (i 2) sei $K = K(x', y') \in \mathfrak{k}$ mit $x', y' \in \underset{\sim}{V}'$, also $x', y' \in J(C)$ und daher POW $(C \cap K) = 2$ und POW $(C \cup V';\mathfrak{k}) \geq 4$, letzteres weil $\underset{\sim}{V}' \cap C = 0$ und POW $(\underset{\sim}{V}' \cap K) \geq 2$. Und entsprechend ev. für $\underset{\sim}{V}''$ (im Fall I.).

(ii) Es ist aber auch $\underset{\sim}{V}' \not\subset T(-)$ bzw., im Fall I., ebenso $\underset{\sim}{V}'' \not\subset T(-)$. Wäre nämlich z. B. $\underset{\sim}{V}' \subset T(-)$ und ist $K = K(x', d) \in \mathfrak{k}$ mit $x' \in \underset{\sim}{V}'$, so gibt es zu K beliebig benachbarte OCh K' mit POW $(\underset{\sim}{V}' \cap K') = 2$. Man ersetze nämlich d durch einen zu d beliebig benachbarten Punkt y' von V' und K durch $K' = K(x', y') \in \mathfrak{k}$. Dann wird auch POW $(C \cap K') = 2$; denn es ist $x' \in E_0 - \overline{T(+)} \subset E - J(C)$ und es ist d als unechter Hut angenommen, so daß d Schnittpunkt in $C \cap K$ und folglich $C \cap K = \{d\} \cup \{z\}$ ist mit einem z als Schnittpunkt. Deshalb besitzt $C \cap K'$ (mindestens also) genau zwei Schnittpunkte, die von x' und y' verschieden sind. Wegen POW $(C \cap K') = 2$ ist aber POW $(B \cap K') \geq 4$, im Widerspruch zu POW $(C;\mathfrak{k}) = 3$.

(iii) Wegen der $\mathfrak{k}$-Konvexität von C, V' bzw. und V'' (Fall I.) sind die in (i) und (ii) behandelten Fälle die einzig möglichen für hinreichend kleine V', V''. – Damit ist die Beh. (in Nr. 3.1.) bewiesen.

3.2. Es liege immer der Fall 1. vor. Dann ist der Verzweigungspunkt d von B ein Hut auf $B' \cup C'$ usw. (vgl. weiter unten).

Es sei also $B = B(a' \mid a'')$, $B' = B(d \mid a')$ und, im Fall I., $B'' = B(d \mid a'')$ (mit $a'' \neq d$). Ferner sei wieder $V' = B'(d \mid v') \subset B'$ und, im Fall I., $V'' = B''(d \mid v'') \subset B''$ eine $\mathfrak{k}$-konvexe Umgebung von d auf B' bzw. auf B''. Wird dann die *Bezeichnung* C', C'' für einseitige, $\mathfrak{k}$-konvexe Umgebungen von d auf C mit $\underset{\sim}{C}' \cap \underset{\sim}{C}'' = \theta$ *passend gewählt*, so gilt unter der Voraussetzung, daß Fall 1 vorliegt:

(1) *Es ist d auf $V' \cup C'$ ein (echter oder unechter) Hut und ebenso im Fall* I. *auf $V'' \cup C''$.*

(2) *Es ist d auf $V' \cup C''$ ein Schnabel, aber nicht Wendepunkt, und ebenso im Fall* I. *auf $V'' \cup C'$.*

(3) *Im Fall* I. *ist d auf $V' \cup V''$ Dorn, aber nicht Dornspitze. Und es liegt C in dem von T'_B, T''_B in E begrenzten, zu $\underset{\sim}{V}'$ und $\underset{\sim}{V}''$ fremden Dieder D.*

Bew. (α) Es sei $W = W(H'_C, H''_C)$ der $\mathfrak{k}$-konvexe, offene, von $H'_C \cup H''_C$ begrenzte Winkelraum in E_0, welcher $C - \{d\}$ enthält. (Da $\mathrm{POW}(C; \mathfrak{k}) = 2$, also C $\mathfrak{k}$-beschränkt ist, gibt es $K_0 \in \mathfrak{k}$ mit $C \cap K_0 = \theta$, also mit $C \subset E_0 = E - K_0$). Der *offene* Scheitelwinkelraum von W in E_0 sei SW. Außerdem werde gesetzt

$$W' = E_0 - \overline{W} - SW, \quad \text{also} \quad \underset{\sim}{W}' = E_0 - \overline{W} - \overline{SW}.$$

(α') Es gilt: $\underset{\sim}{H}'_B \subset W'$ *und* $\underset{\sim}{V}' \subset \underset{\sim}{W}'$ *für hinreichend kleines V' bzw. im Fall* I. *auch* $\underset{\sim}{H}''_B \subset W'$ *und* $\underset{\sim}{V} \cup \underset{\sim}{V}'' \subset \underset{\sim}{W}'$.

Zum indirekten Beweis der Beh. (α'), bei welchem auch von der $\mathfrak{k}$-Konvexität der V', V'', C', C'' Gebrauch gemacht wird, bemerken wir:

(α 1) Die Beh. $\underset{\sim}{H}'_B \subset W'$ wäre nicht richtig, genau dann, wenn

(i) $H'_B = H'_C$ oder $H'_B = H''_C$; *oder* (ii) $\underset{\sim}{H}'_B \subset W$; *oder* (iii) $\underset{\sim}{H}'_B \subset SW$.

Betr. (i). Hier ist *entweder* $\underset{\sim}{V}' \subset W$ und dann d Schnabelspitze auf $V' \cup C'$, was zu einem Widerspruch führt (vgl. Nr. 3.1., Bew. betr. (i 1)); *oder* es ist d Dornspitze auf $V' \cup C'$, so daß es zu $K(x', d) \in \mathfrak{k}$ mit $x' \in \underset{\sim}{V}'$ benachbarte OCh K' gibt mit POW $(\underset{\sim}{V}' \cap K') =$ POW $(C \cap K') = 2$, so daß sich wie in Nr. 3.1., Bew. betr. (i 2), ein Widerspruch ergibt. Ebenso hat man $H'_B \neq H''_C$ und, im Fall I., $H''_B \neq H'_C$ und $H''_B \neq H''_C$. – Der Fall (i) kann also nicht eintreten.

Betr. (ii). Hier ist $\underset{\sim}{V}' \subset J(C)$, wobei $J(C)$ das Innere von C bezeichnet, und man schließt wie in Nr. 3.1., Bew. betr. (i 2). Auch der Fall (ii) tritt also nie ein.

Betr. (iii). Entsprechende Schlüsse wie bei (ii) ergeben den Beweis, daß (iii) nicht eintreten kann. Damit ist $\underset{\sim}{H}'_B \subset W'$ bzw. $\underset{\sim}{H}''_B \subset W'$ bewiesen.

(α 2) gemäß (α 1) ist $\underset{\sim}{H}'_B \subset W'$ und, im Fall I., auch $\underset{\sim}{H}''_B \subset W'$. Es wäre nun $\underset{\sim}{V}' \not\subseteq \underline{W}'$ (entgegen der Beh. (α')) höchstens dann, wenn $H'_B \cup H'_C = T'_C$ oder $H'_B \cup H''_C = T''_C$. In beiden Fällen wäre aber $\underset{\sim}{V}' \subset SW$, was wie in ($\alpha$ 1) (iii) zu einem Widerspruch führt.

Damit ist (α') bewiesen.

(β) Gemäß (α') ist *im Fall* II. *die Beh.* (1) *und* (2) *richtig, wenn* $H'_B \cup H'_C = T'_B$ *oder* $H'_B \cup H''_C = T'_B$; denn dann liegen $\underset{\sim}{V}'$ und $\underset{\sim}{C}'$ bzw. $\underset{\sim}{V}'$ und $\underset{\sim}{C}''$ auf der gleichen Seite von T'_B wie $C - \{d\} = \underset{\sim}{C}$, ferner $\underset{\sim}{V}'$ und $\underset{\sim}{C}''$ bzw. $\underset{\sim}{V}'$ und $\underset{\sim}{C}'$ auf verschiedenen Seiten von T''_C bzw. von T'_C. – *Es sei jetzt* $\underset{\sim}{H}'_B \subset \underline{W}'$. Liegen nun $\underset{\sim}{V}'$ und $\underset{\sim}{C}$ auf verschiedenen Seiten von T'_B, so ist $K(d, x') \in \mathfrak{k}$ für zu d hinreichend benachbartes $x' \in \underset{\sim}{V}'$ StützOCh von C in d und es liegen $\underset{\sim}{V}'(d|x') \subset \underset{\sim}{V}'$ sowie $\underset{\sim}{C}$ auf der gleichen Seite von $K(d, x')$; daher gibt es $y' \in \underset{\sim}{V}'(d|x')$ derart, daß POW $((C \cup V') \cap$ $\cap K(x', y')) \geq 4$. Widerspruch. Damit sind die *Beh.* (1) *und* (2) *für den Fall* II. *bewiesen.*

(γ) *Betr. Beh.* (1) *und* (2) *für den Fall* I. bemerken wir: Es liegen $\underset{\sim}{V}'$ und $\underset{\sim}{V}''$ auf verschiedenen Seiten von T'_C und von T''_C, also in verschiedenen Scheitelwinkeln, die von $\underline{W}'$ in E_0 gebildet werden; denn andernfalls liegen $\underset{\sim}{V}'$, $\underset{\sim}{V}''$ und $\underset{\sim}{C}$ auf der gleichen Seite

z. B. von T'_C, so daß zu T'_C benachbarte OCh K' mit POW $((C \cup \underset{\sim}{V}' \cup \underset{\sim}{V}'') \cap K') \geq 4$ existieren, was nicht sein kann. Daraus folgen Beh. (1) und (2) auch für Fall I.

(δ) *Betr. Beh.* (3). Gemäß (γ) liegen $\underset{\sim}{V}'$ und $\underset{\sim}{V}''$ in verschiedenen, von $\underset{\sim}{W}'$ in E_0 gebildeten Scheitelwinkeln. Daher ist nur noch zu zeigen: Der $\underset{\sim}{C}$ enthaltende, von $H'_B \cup H''_B$ begrenzte, offene Winkelraum W^* in E_0 ist nicht $\mathfrak{k}$-konvex, insbesondere ist $W^* \neq T'_B(\pm)$ und $W^* \neq T''_B(\pm)$, so daß speziell d ein Dorn und nicht Dornspitze ist. In der Tat: Es gilt $\underset{\sim}{V}' \cup \underset{\sim}{V}'' \cup C \subset W^*$. Ist nun z. B. $W^* = T'_B(+)$, also T'_B StützOCh von $\underset{\sim}{V}' \cup \underset{\sim}{V}'' \cup C$ in d, so gibt es zu T'_B benachbarte OCh K' mit POW $((\underset{\sim}{V}' \cup \underset{\sim}{V}'' \cup C) \cap$ $\cap K') \geq 4$. Ist aber z. B. $W^* \neq T'_B(+)$ und $\mathfrak{k}$-konvex, so gibt es erst recht derartige K'.

3.3. In Nr. 3.1. und 3.2. wurde neben der Vor., daß POW$(B;\mathfrak{k}) =$ $= 3$ und daß der Fall 1. vorliegt, noch nicht benutzt die, von jetzt ab (in dieser Nr. 3.3.) zu stellende

Forderung: Es sei $B = B(a' \mid a'')$ mit VP d *nicht* $\mathfrak{k}$-*beschränkt.*

3.3.1. *Es kann für B im Fall* 1. *nur der Fall* I. *vorliegen*, d. h. es existieren $B' = B(d \mid a') \subset B - \underset{\sim}{C}$ und $B'' = B(d \mid a'') \subset$ $\subset B - \underset{\sim}{C}$ beide ($d \neq a'$, $d \neq a''$).

Bew. Indirekt. Liegt der Fall II. vor, so sei etwa $d = a''$. Gemäß Nr. 3.2., Beh. (1), ist d Hut auf $V' \cup C'$. Es wird also $V' \cup C'$ von T'_B in d gestützt; und wegen $\underset{\sim}{C} \subset T'_B(\alpha)$, z. B. für $\alpha = +$ (was aus der $\mathfrak{k}$-Konvexität von C und aus der Annahme über E_0 folgt) ist T'_B StützOCh von C in d, also $C \cap T'_B =$ $= \{d\}$. Es ist aber auch $B' \cap T'_B = \{d\}$; andernfalls nämlich gibt es $x \in (B' - \{d\}) \cap T'_B$ und zu d benachbarte $y \in \underset{\sim}{B}'$ derart, daß für $K' = K(x, y)$ gilt: POW $((B' - \{d\}) \cap K') = 2 =$ $=$ POW $(C \cap K')$, also POW $(B \cap K') \geq 4$. Somit ist $B \cap T'_B =$ $= \{d\}$. Überdies gibt es zu T'_B benachbarte OCh K mit $B \cap K = \theta$, so daß B $\mathfrak{k}$-beschränkt ist, entgegen der Forderung in Nr. 3.3.

3.3.1.1. Im Hinblick auf Nr. 3.3.1. wird *nur noch der Fall* I. (im Zusammenhang mit Fall 1.) betrachtet. Um jetzt Aufschluß über die Lage von $B' \cup B''$ zu erhalten, verfahren wir wie folgt:

3.3.2. Wir runden die (gemäß Nr. 3.2., Beh. (2) vorhandenen) Schnäbel d auf $V' \cup C''$ und auf $V'' \cup C''$ nach Juel beliebig wenig ab (vgl. [2], Nr. 3.2.8.1.) derart, daß B in einen, zu B beliebig benachbarten *einfachen* Bogen $\tilde{B} = \tilde{B}(a' \mid a'')$ mit POW $(\tilde{B}; \mathfrak{k}) = 3$ übergeführt und daß d ersetzt wird durch zwei, zu d beliebig benachbarte Wendepunkte c', c'', wobei $c' \in \underset{\sim}{C}' \subset C$, $c'' \in \underset{\sim}{C}'' \subset C$

3.3.2.1. Wir behaupten: *Für zu B hinreichend benachbarte $\tilde{B}$ ist $\tilde{B}$ nicht $\mathfrak{k}$-beschränkt.*

Bew. (i) Die beiden, die Abrundung vermittelnden $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen seien $\tilde{B}' = \tilde{B}'(c' \mid b'') \subset \tilde{B}$ und $\tilde{B}'' = \tilde{B}''(c'' \mid b') \subset \tilde{B}$ mit $c' \in \underset{\sim}{C}'$, $c'' \in \underset{\sim}{C}''$, $b' \in \underset{\sim}{V}'$, $b'' \in \underset{\sim}{V}''$. Es ist also $\tilde{B}'$ Ersatz für $C'(c' \mid d) \cup B''(d \mid b'')$ und $\tilde{B}''$ Ersatz für $C''(c'' \mid d) \cup B'(d \mid b')$, wobei $C'(c' \mid d) \subset C'$, $C''(c'' \mid d) \subset C''$, $B''(d \mid b'') \subset V''$ und $B'(d \mid b') \subset V'$ ist. Folglich gilt:

$$B - B \cap \tilde{B} = C'(c' \mid d) \cup B''(d \mid b'') \cup C''(c'' \mid d) \cup B'(d \mid b')$$

$$\text{und } \tilde{B} - \tilde{B} \cap B = \tilde{B}' \cup \tilde{B}''.$$

Weil B als nicht $\mathfrak{k}$-beschränkt, d. h. weil $B \cap K \neq 0$ für jedes $K \in \mathfrak{k}$, vorausgesetzt wird, ist $\tilde{B}$ nicht $\mathfrak{k}$-beschränkt, wenn $(\tilde{B} - \tilde{B} \cap B) \cap K \neq 0$ für jedes $K \in \mathfrak{k}$ mit $\tilde{B} \cap B \cap K = 0$.

(ii) Wir setzen $\tilde{C}' = C'(c' \mid d)$, $\tilde{C}'' = C''(c'' \mid d)$, $\tilde{V}' = B'(d \mid b')$, $\tilde{V}'' = B''(d \mid b'')$. Indirekt schließend können wir uns auf solche $K \in \mathfrak{k}$ beschränken, für die $(\tilde{B}' \cup \tilde{B}'') \cap K = 0$ ist. Bei dieser Annahme scheiden die Fälle aus, daß $\tilde{C}' \cap K \neq 0$ und zugleich $\underset{\sim}{\tilde{V}}'' \cap K = 0$ ist; denn sowohl für POW $(\tilde{C}' \cap K) = 1$ als für POW $(\tilde{C}' \cap K) = 2$ wäre dann $\tilde{B}' \cap K \neq 0$. Entsprechendes gilt, ebenso wie bei den folgenden Schlüssen, wenn man $\tilde{C}'$ mit $\tilde{C}''$ und $\tilde{V}''$ mit $\tilde{V}'$ vertauscht. Es bleiben somit die Fälle:

Erstens: $\underset{\sim}{\tilde{C}}' \cap K \neq 0$ und $\underset{\sim}{\tilde{V}}'' \cap K \neq 0$; *Zweitens:* POW $(\tilde{V}'' \cap K) = 2$.

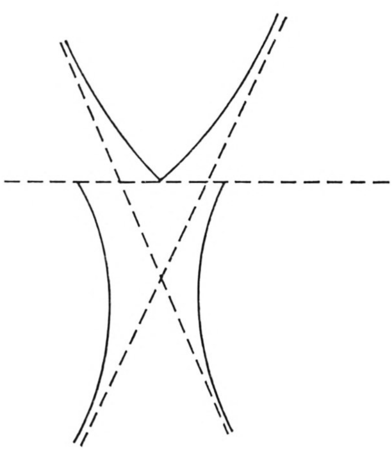
Betr. Erstens. Es enthält $\underset{\sim}{\tilde{C}}' \cap K$ (genau) einen Schnittpunkt s (wäre nämlich K StützOCh an $\underset{\sim}{\tilde{C}}'$, so wäre $\tilde{B}' \cap K \neq 0$, weil $\underset{\sim}{\tilde{C}}'$ $\mathfrak{k}$-konvex). Wegen POW $(C \cap K) = 2$ ist folglich $(C - \{s\}) \cap K \neq 0$, also (weil $\tilde{B} \cap B \cap K = 0$ sein soll) $\underset{\sim}{\tilde{C}}'' \cap K \neq 0$. Andererseits ist $\tilde{V}' \cap K = 0$, weil andernfalls

POW $(B \frown K) \geq$ POW $(C \frown K)$ + POW $(\tilde{\underset{\sim}{V}}'' \frown K)$ + + POW $(\tilde{V}' \frown K) \geq 4$ ist. Somit liegt der Fall vor, daß $\tilde{C}'' \frown K \neq \theta$ und $\underset{\sim}{\tilde{V}}' \frown K = \theta$ (also $\tilde{B}'' \frown K \neq \theta$ ist). Dies war aber schon als auszuschließen gezeigt.

Betr. Zweitens. Zunächst sei $d \notin K$. Da d Dorn auf $B - \underset{\sim}{C}$ ist (Nr. 3.2., Beh. (3)), können $\tilde{V}'$ und $\tilde{V}''$ so klein gewählt werden, daß $\tilde{V}' \frown K \neq \theta$ für jedes K mit POW $(\tilde{V}'' \frown K) = 2$. Wegen POW $(B \frown K) = 3$ ist dann $C \frown K = \theta$ und folglich $\tilde{B}'' \frown K \neq \theta$ (entgegen der Annahme). Ist aber d $\in K$, so gibt es zu K beliebig benachbarte K' mit POW $(\underset{\sim}{\tilde{V}}'' \frown K') = 2$; und da für diese K', wie gezeigt, $\tilde{B}'' \frown K \neq \theta$ ist, gilt dies auch für K.

Es ist also $\tilde{B} \frown K \neq \theta$ für jedes K, d. h. $\tilde{B}$ ist nicht $\mathfrak{k}$-beschränkt.

3.3.3. Gemäß Nr. 3.3.2. ist $\tilde{B} = \tilde{B}\,(a'|a'')$ ein nicht $\mathfrak{k}$-beschränkter, einfacher Bogen mit POW $(\tilde{B}\,;\,\mathfrak{k}) = 3$. – Wir bezeichnen nun als $\mathfrak{k}$-*singulär* jeden Punkt x eines (stückweise $\mathfrak{k}$-konvexen) Bogens A, für den $x \in \underset{\sim}{A}$ und x ein Dorn, speziell eine Dornspitze, oder ein Schnabel, speziell eine Schnabelspitze, oder ein Wendepunkt ist. Gemäß [2], Nr. 3.2.5.6., gilt nun (vgl. Figur 1. In dieser liegen die beiden Wendepunkte auf der „uneigentlichen" OCh K_0): Es besitzt $\tilde{B}$ genau zwei $\mathfrak{k}$-singuläre Punkte, die beide



Figur 1

Wendepunkte sind, nämlich c' und c''; ferner liegt auf der, die Endpunkte a', a'' von $\tilde{B}$ verbindenden OCh $K(a', a'')$ genau ein Punkt s von $\tilde{B}$, und zwar ist s Stützpunkt von $K(a', a'')$ mit $\tilde{B}$ und liegt auf $\tilde{B}$ zwischen c' und c'', also auf $\underset{\sim}{C}(c'|c'') = C - C'(c'|d) - C''(c''|d) \subset C - \{d\}$. – Vermöge der Abrundungskonstruktion existieren solche $\tilde{B}$, etwa $\tilde{B}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, mit $B = \lim \tilde{B}_n$ und derart, daß $B - \tilde{B}_n \cap B = B'(d\,|\,b'_n) \cup B''(d|b''_n) \cup C'(c'_n|d) \cup C''(c''_n|d)$ mit $d = \lim b'_n = \lim b''_n = \lim c'_n = \lim c''_n = \lim B'(d|b'_n) =$ usw.

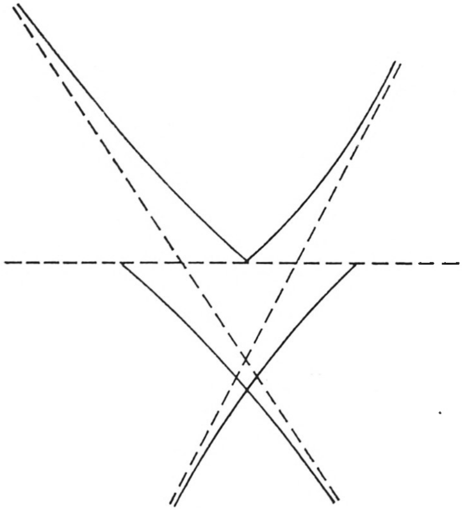
Da c'_n, c''_n die einzigen $\mathfrak{k}$-singulären Punkte, und zwar Wendepunkte, von $\tilde{B}_n$ sind, folgt: B' und B'' sind frei von $\mathfrak{k}$-singulären Punkten, also lokal $\mathfrak{k}$-konvex. Darüber hinaus ist sogar $\mathrm{POW}(B'; \mathfrak{k}) = \mathrm{POW}(B''; \mathfrak{k}) = 2$, d.h. B' und B'' sind $\mathfrak{k}$-konvex. In der Tat: Ist z.B. B' nicht $\mathfrak{k}$-konvex, ist also B' eine „Spirale", so liegt ein Endpunkt von B', etwa e, im Innern der $\mathfrak{k}$-konvexen Hülle $KH(B')$ von B'. Für jede OCh K' durch e ist dann $(B' - \{e\}) \cap K' \neq 0$, also $\mathrm{POW}(B' \cap K') \geq 2$ (vgl. [2], Nr. 3.8. 2.); dabei kann $d \notin K'$ angenommen werden. Da aber $(B' - \{d\}) \cap C = 0$ ist, gibt es unter diesen K' solche mit $\mathrm{POW}(C \cap K') = 2$, also mit $\mathrm{POW}\big((C \cup B') \cap K'\big) \geq 4$, im Widerspruch zu $\mathrm{POW}(B \cap K') = 3$.

3.3.4. Die Zusammenfassung des in Nr. 3.3.1.–3.3.3. Bewiesenen ergibt den

Satz. Vor. (1) *Es sei $B = B(a'\,|\,a'')$ ein nicht $\mathfrak{k}$-beschränkter Bogen mit $POW(B; \mathfrak{k}) = 3$ und mit (genau) einem Verzweigungspunkt d.* – (2) *Die in B enthaltene einfache Kurve C besitze den Punktordnungswert $POW(C; \mathfrak{k}) = 2$. Es sei $\underset{\sim}{C} = C - \{d\}$ gesetzt.*

Beh. (1) *Es besitzt d auf B die Verzweigungsordnung vier; es ist also $a' \neq d$, $a'' \neq d$.* – (2) *Es ist B Vereinigung von C und von zwei $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen $B' = B(a'\,|\,d)$, $B'' = B(a''\,|\,d)$ mit $B' \cap B'' = B' \cap C = B'' \cap C = \{d\}$. Ferner ist $B \cap K(a', a'') = \{s\} \in C - \{d\}$ und dabei ist s Stützpunkt von $C - \{d\}$ mit der, a' und a'' enthaltenden, OCh $K(a', a'')$.* – (3) *Es besitzt also $B - \{d\}$ keine $\mathfrak{k}$-singulären Punkte.* – (4) *Sind C', C'', V', V'' ein-*

seitige, hinreichend kleine Umgebungen von d auf C bzw. auf $B - \underset{\sim}{C}$ mit $C' \cap C'' = V' \cap V'' = \{d\}$, so ist d auf $V' \cup C'$ (oder auf $V' \cup C''$, je nachdem die Bezeichnung der Umgebungen C', C'' von d auf C bei schon festgelegter Bezeichnung von V', V'' gewählt ist) ein (echter oder unechter) Hut, ferner ist d auf $V' \cup C''$ (bzw. auf $V' \cup C'$) ein Schnabel und schließlich ist d auf $V' \cup V''$ ein Dorn (und keine Dornspitze). Daher ist B, als Durchlaufungsbogen betrachtet, lokal $\mathfrak{k}$*-konvex (vgl. Figur 2).*



Figur 2

§ 4. Betr. den Fall POW (C; $\mathfrak{k}$) = 3 (Fall (2))

4.1. Zunächst sei bemerkt

Beh. (A). *Der Verzweigungspunkt d von B ist auf C ein Dorn (aber nicht Dornspitze); und zwar gilt dies für den Fall* II., *nämlich für* $VO(d; B) = 3$, *und erst recht für den Fall* I., *nämlich für* $VO(d: B) = 4$. (vgl. Nr. 1.2.).

Beh. (B). *Es sei* $\underset{\sim}{C} = C - \{d\}$ *gesetzt. Im Fall* I. *ist d ein* echter *Hut auf* $B - \underset{\sim}{C}$; *und zwar liegt* $B - C$ *in demjenigen* *offenen, $\mathfrak{k}$-konvexen Winkelraum W^*, dessen Begrenzung in $T'_C \cup T''_C$ enthalten und der fremd ist zur $\mathfrak{k}$-konvexen Hülle einer Umgebung von d auf C.*

Bew. Betr. Beh. (A). – *(A 1) Vorbemerkungen.* (α) Für jede OCh K mit POW $(C \cap K) \geq 2$ gilt $(B - \underset{\sim}{C}) \cap K = \theta$. – ($\beta$) Es ist POW $(B - \underset{\sim}{C}; \mathfrak{k}) =$ POW $(B - C; \mathfrak{k}) = 2$, also insbesondere POW $(\underset{\sim}{B}'; \mathfrak{k}) =$ POW $(B'; \mathfrak{k}) = 2$ und, soweit der Fall I. vorliegt (also B'' existiert), auch POW $(\underset{\sim}{B}''; \mathfrak{k}) =$ POW $(B''; \mathfrak{k}) = 2$. – In der Tat: *Betr.* (α) Es ist nach Vor. C eine einfache Kurve mit POW $(C; \mathfrak{k}) = 3$, also C vom (ungeraden) Index 1; aus POW $(C \cap K) \geq 2$ folgt daher POW $(C \cap K) = 3$ und somit $(B - C) \cap K = \theta$. – *Betr.* (β). Weil C vom Index 1 ist, gilt $C \cap K \neq \theta$ für jedes $K \in \mathfrak{k}$. Aus POW $\big((B - C) \cap K\big) \geq 3$ würde also folgen, daß POW $(B; k) \geq$ POW $(C \cap K) +$ POW $\big((B - C) \cap K\big) \geq 4$. Es ist sogar POW $(B - \underset{\sim}{C}; \mathfrak{k}) = 2$; denn andernfalls existiert eine OCh K mit POW $\big((B - \underset{\sim}{C}) \cap K\big) \geq 3$ und da $B - \underset{\sim}{C}$ ein einfacher Bogen ist, gibt es nach dem Reduktionssatz (vgl. [2], Nr. 1.4.3.) solche OCh K', für die POW $\big((B - C) \cap K'\big) \geq 3$ ist. Widerspruch.

(A 2) Es mögen B', B'', V', V'', H'_B, T'_B usw. die in Nr. 2.3. vereinbarte Bedeutung besitzen und es mögen die C', C'', V', V'' als $\mathfrak{k}$-konvex und als jeweils hinreichend klein angenommen sein. Wir zeigen:

(A 2 1) Es ist d auf C *kein Schnabel* (und trivialerweise auch keine Schnabelspitze). – Es sei nämlich d ein Schnabel und etwa C'' bzw. T''_C maximal im Sinne von N. 1.3.1. In hinreichend kleiner Umgebung U von d in E liegt $\underset{\sim}{V}'$ auf der gleichen Seite von T'_C wie $\underset{\sim}{C}'$. Andernfalls nämlich gibt es zu T'_C benachbarte OCh K mit POW $(\underset{\sim}{C} \cap K) \geq 2$ und mit $\theta \neq \underset{\sim}{V}' \cap K \subset (B - C) \cap K$ im Widerspruch zu (A 1) (α). Weil d als Schnabel auf $C' \cup C''$ und C'' als maximal angenommen ist, liegt $\underset{\sim}{C}''$ auf der gleichen Seite von T'_C wie $\underset{\sim}{C}'$. Daher liegt $\underset{\sim}{V}'$ auf der gleichen Seite von T'_C wie $\underset{\sim}{C}' \cup \underset{\sim}{C}''$; und folglich gibt es zu T'_C beliebig benachbarte $K \in \mathfrak{k}$ mit POW $\big((\underset{\sim}{C}' \cup \underset{\sim}{C}'') \cap K'\big) \geq 2$ und mit POW $(\underset{\sim}{V}' \cap K') \geq 1$ im Widerspruch mit (A 1) (α). – Somit ist d kein Schnabel auf C.

(A 2 2) Es ist d auf C *weder Dornspitze noch Wendepunkt noch echter oder unechter Hut.* – In der Tat:

(A 2 2) (I). Vorbereitende Bemerkung. Es sei $A = A\,(a|e)$ ein $\mathfrak{k}$-konvexer Bogen, ferner T die $\mathfrak{k}$-Paratingente an A in a (vgl. Nr. 1.3.) und U eine $\mathfrak{k}$-beschränkte, $\mathfrak{k}$-konvexe Umgebung von a in E. Weiter sei $\tilde{A} \subset A \frown U$ eine Umgebung von a auf A. Es liegt $\underset{\sim}{\tilde{A}}$ in U auf der einen (offenen) Seite $T\,(\alpha;\,U)$ von $T \frown U$; dabei sei etwa $\alpha = +$. Es gibt dann ($\mathfrak{k}$-konvexe) Umgebungen $\tilde{U} \subset U$ von a in E derart, daß jeder Punkt von $T\,(-;\,U) \frown \tilde{U}$ auf (mindestens) einer OCh K mit POW $(\underset{\sim}{\tilde{A}} \frown K) = 2$ liegt.

(A 2 2) (II). Es ist *d weder Dornspitze noch Wendepunkt* auf C. Andernfalls nämlich gilt $T'_C = T''_C = T$. Man wähle in Ziff. (A 2 2) (I): $a = d$ und U als Umgebung von d in E. Da $\underset{\sim}{C}'$ und $\underset{\sim}{C}''$ auf verschiedenen Seiten von T liegen, läßt sich $\tilde{U}$ so wählen, daß jedes $y \in \tilde{U} - \tilde{U} \frown T$ in einem $K' \in \mathfrak{k}$ mit POW$(C \frown K') \geq$ ≥ 2 enthalten ist. Weiter gibt es ein $\alpha = \pm$ derart, daß $\underset{\sim}{V}' \frown \tilde{U} \frown T\,(\alpha;\,U) \neq \theta$ ist. Daher gibt es $K' \in \mathfrak{k}$ mit $\theta \neq$ $\neq \underset{\sim}{V}' \frown K' \subset (B - C) \frown K'$ und POW $(C \frown K') \geq 2$ im Widerspruch mit Ziff. (A 1) (α).

(A 2 2) (III). Es ist *d weder echter noch unechter Hut* auf C. – Andernfalls nämlich betrachte man den offenen, $\underset{\sim}{C}' \smile \underset{\sim}{C}''$ enthaltenden, $\mathfrak{k}$-konvexen Winkelraum W, dessen Begrenzung in $T'_C \smile T''_C$ enthalten ist, oder (falls d unechter Hut ist) man betrachte die $\underset{\sim}{C}' \smile \underset{\sim}{C}''$ enthaltende, von $T'_C = T''_C = T$ begrenzte offene $\mathfrak{k}$-Halbebene W. Es liegt $\underset{\sim}{V}'$, wenn hinreichend klein, nicht in $E - W$; denn andernfalls gibt es $K' \in \mathfrak{k}$ mit $\underset{\sim}{V}' \frown K' \neq \theta$ und mit POW $(C \frown K') \geq 2$ im Widerspruch mit Ziff. (A 1) (α). Da auch für $\underset{\sim}{V}'' \subset W$ solche K' existieren würden, schließt man für $\underset{\sim}{V}''$ genau so. Folglich ist $\underset{\sim}{V}' \subset W$ bzw. $\underset{\sim}{V}'' \subset W$, was ebenfalls zu einem Widerspruch mit (A 2 2) (I) führt. Daraus ergibt sich die Beh. am Beginn dieser Ziff. (A 2 2) (III).

Die Feststellungen in (A 1) – (A 2 2) enthalten den Beweis der Beh. (A) des Satzes in Nr. 4.1.

Bew. Betr. Beh. (B). Gemäß Beh. (A) ist d Dorn auf C. Daher liegt $\underset{\sim}{C}$ in dem offenen, von $T'_C \smile T''_C$ begrenzten Dieder D, in welchem $\underset{\sim}{V}' \smile \underset{\sim}{V}''$ für hinreichend kleine $\underset{\sim}{V}'$, $\underset{\sim}{V}''$ enthalten ist. Andernfalls nämlich wäre etwa $\underset{\sim}{C}' \frown (T'_C \smile T''_C) \neq \theta$; aus z. B. $\underset{\sim}{C}' \frown T'_C \neq \theta$ würde aber, da T'_C und T''_C maximal sind, die

Existenz von zu T'_C oder zu T''_C benachbarten OCh K folgen mit POW $(C \cap K) \geq 4$. Gemäß Bew. Betr. Beh. (A), (A 1) (β), ist ferner POW $(B - \underset{\sim}{C}; \mathfrak{k}) = 2$, so daß d Hut auf $B' \cup B''$ ist. Wäre nun $\underset{\sim}{B}' \cup \underset{\sim}{B}'' \not\subseteq W^*$, so wäre etwa $\underset{\sim}{B}' \not\subseteq W^*$ und entweder $\underset{\sim}{B}' \subset D$ oder $\underset{\sim}{B}' \subset E_0 - \overline{W}^* - \overline{D}$ oder z. B. $\underset{\sim}{B}' \cap T''_C \neq 0$. Da T'_C und T''_C maximal sind, folgt jedesmal die Existenz einer zu T'_C oder zu T''_C benachbarten OCh K mit POW $(C \cap K) = 3$ und mit POW $((B - C) \cap K) \geq 1$ im Widerspruch zu Bew. Betr. Beh. (A), Ziff. (A 1) (α). Der Beweis von Beh. (B) ist erbracht.

Damit sind die Beh. (A) und (B) in Nr. 4.1. bewiesen.

4.2. Mit Hilfe der Beh. in Nr. 4.1. ergibt sich nunmehr der

Satz. Vor. *Es sei* $B = B(a' | a'')$ *ein nicht* $\mathfrak{k}$*-beschränkter Bogen mit* POW $(B; \mathfrak{k}) = 3$ *und mit einem Verzweigungspunkt* d. *Die in* B *enthaltene einfache Kurve* C *sei vom* POW $(C; \mathfrak{k}) = 3$. *Je nachdem die Verzweigungsordnung* VO $(d; B)$ *von* d *auf* B *gleich Drei oder gleich Vier ist, sei* $a'' = d$ *bzw.* $a'' \neq d$ *(und in jedem Falle sei* $a' \neq d$*); dabei ist* $B - C = \underset{\sim}{B}' \cup \underset{\sim}{B}''$ *mit* $B' = B(d | a')$ *und* $B'' = 0$ *bzw.* $B'' = B(d | a'')$.

Beh. (1). *Es besitzt* C *in* d *einen Dorn (und keine Dornspitze); außerdem besitzt* C *genau einen Schnabel* s *oder genau einen Wendepunkt* s. *Ferner gelten die Beh.* (A) *und* (B) *der Nr.* 4.1.

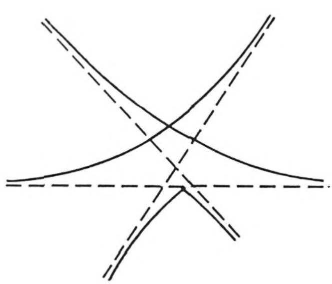
(2) *Es sei* $T = T(s)$ maximale *Tangente an* C *in* s*; ferner sei gesetzt:* $B^* = B - C$ *und* $\underset{\sim}{C} = C - \{d\}$. *Dann ist* $B^* \cap T = 0$ *oder* $B^* \cap T$ *enthält genau einen Stützpunkt oder genau einen Endpunkt von* B *oder genau beide Endpunkte. Es liegt* d *nicht auf* T.

(3) *Es ist* B *ordnungsfest zu einer Kurve* C^* *erweiterbar*, d. h. *es ist* B *(echter) Teilbogen einer Kurve* C^* *mit* POW $(C^*; \mathfrak{k}) = 3$, *genau dann, wenn keine der* $\mathfrak{k}$*-Halbtangenten an* B *in den Endpunkten von* B *den anderen Endpunkt enthält und wenn nicht beide Endpunkte von* B *auf* T *liegen.*

Bew. *Betr. Beh.* (1). Da d Dorn auf C ist (gemäß Nr. 4.1., Beh. (A)) und da C nach Vor. Kurve ist mit POW $(C; \mathfrak{k}) = 3$, folgt die Existenz genau eines Schnabels bzw. Wendepunktes $s \in C - \{d\}$ aus bekannten Sätzen (vgl. [2], Nr. 3.2.6.2.).

Betr. Beh. (2). Gemäß Nr. 4. 1., Beh. (B), ist $B^* = B - C \subset W^*$, $C \subset E - W^*$. Wegen $\mathrm{POW}(B^*; \mathfrak{k}) = 2$ (vgl. Nr. 4. 1., Bew. Betr. Beh. (A), Ziff. (A 1) (β)) ist $\mathrm{POW}(B^* \frown T) \leq 2$. – Es kann $B \frown T$ keinen Schnittpunkt enthalten, da T maximal ist, also $\mathrm{POW}(B \frown K') \geq 4$ wäre für geeignete, zu T hinreichend benachbarte $K' \in \mathfrak{k}$. Wegen $\mathrm{POW}(B^*; \mathfrak{k}) = 2$ enthält daher $B^* \frown T$ entweder genau einen Stützpunkt oder einen oder beide Endpunkte von B oder es ist $B^* \frown T = \theta$. Schließlich ist $d \notin T$. Ist nämlich $d \in B \frown T$, so ist d (nach dem eben Gezeigten) nicht Schnittpunkt mit C. Es kann aber d auch nicht Stützpunkt von C auf T sein. In der Tat: (A). Andernfalls ist d auch Stützpunkt von $B - \underset{\sim}{C}$ auf T. Ist nämlich D bzw. D' eine hinreichend kleine Umgebung von d auf $\underset{\sim}{C}$ bzw. auf $B - C$ und ist etwa $D \subset T(+)$, so muß $D' \subset T(-)$ sein; denn sonst liegen (mindestens) 3 in d mündende, offene, bis auf d fremde Teilbogen von B auf der gleichen Seite von T, so daß zu T beliebig benachbarte OCh T' existieren mit $s \in T'$ und mit $\mathrm{POW}((D \cup D') \frown T') \geq 3$, also mit $\mathrm{POW}(B \frown T') \geq 4$. Widerspruch. – (B) Gemäß (A) liegt auf jeder der beiden Seiten von T (mindestens) ein, in d mündender offener Teilbogen von B. Da T maximal ist, gibt es also eine Umgebung S von s auf C und zu T beliebig benachbarte OCh T'' mit $\mathrm{POW}(S \frown T'') = 3$ und mit $\mathrm{POW}((D \cup D') \frown \frown T'') \geq 1$. Da S fremd zu D und D' ist, folgt $\mathrm{POW}(B \frown T'') \geq 4$. Widerspruch. – (C) Da gemäß (A) und (B) d weder Schnitt- noch Stützpunkt von C auf T sein kann, ist $d \notin T$.

Betr. Beh. (3). Die Beh. (3) ist gleichbedeutend mit der Behauptung, daß $B - \underset{\sim}{C}$ zu einer Kurve Q mit $\mathrm{POW}(Q; \mathfrak{k}) = 2$



Figur 3

erweiterbar ist, für die überdies POW $(Q \cap T) \leq 1$ gilt. Eine solche Erweiterbarkeit unter den in Beh. (3) aufgezählten Bedingungen folgt aber aus dem allgemeinen Satz über die Erweiterbarkeit von Bogen des POW 2 zu einer Kurve des gleichen POW, wenn man noch die Beh. (2) berücksichtigt. – Vgl. Figur 3. In dieser ist B (schon) zu einer Kurve C^* mit Stützpunkt auf T erweitert; der Schnabel (hier Wendepunkt) liegt auf der uneigentlichen OCh.

Literatur

[1] Haupt, Über ebene nicht beschränkte Bogen dritter Ordnung. Bayer. Akad. d. Wiss. Sitz.-Ber. math.-naturw. Kl. 1964, 57–70.

[2] Haupt-Künneth, Geometrische Ordnungen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1967.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1967

Band/Volume: 1966

Autor(en)/Author(s): Haupt Otto

Artikel/Article: Bestimmung der nicht-beschränkten Bogen dritter Ordnung mit Doppelpunkt in projektiven Ebenen 143-162