

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1966

MÜNCHEN 1967

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zum Satz von Lefschetz über Hyperebenenschnitte

Von Ludger Kaup in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 9. Dezember 1966

Auf Lefschetz geht der Beweis des folgenden Satzes zurück (vgl. [5]): Es bezeichne V_r eine nichtsinguläre algebraische Varietät der Dimension r und V_{r-1} einen allgemeinen Hyperebenenschnitt in V_r . Dann ist die zur Inklusion $V_{r-1} \subset V_r$ gehörige Abbildung der Homologiegruppen

$$H_j(V_{r-1}, Z) \rightarrow H_j(V_r, Z)$$

bijektiv für $j < r-1$ und surjektiv für $j = r-1$.

Für diesen wichtigen Satz und seine Erweiterungen hat es seitdem eine Reihe verschiedener Beweise gegeben; erinnert sei etwa an die Namen Chow, Thom, Bott, Fary; eine ausführliche Darstellung der mit diesem Satz zusammenhängenden Fragen findet man in Wallace [6].

Andreotti und Frankel haben 1959 einen sehr kurzen Beweis geführt, der auch nicht notwendig singularitätenfreie Varietäten V_r zuläßt, wenn nur V_{r-1} ein Hyperflächenschnitt von V_r ist, der die Singularitäten von V_r enthält. Zum Beweise benutzen sie zwei Hilfsmittel: Eine Aussage über das Verschwinden der höheren Homologiegruppen Steinscher Mannigfaltigkeiten und den Dualitätssatz von Alexander-Poincaré ([1]). Dieser Dualitätssatz gilt natürlich auch für orientierbare topologische Mannigfaltigkeiten. Die Aussage über die Homologie Steinscher Mannigfaltigkeiten ließ sich nun auf Räume übertragen, d. h. es gilt (vgl. [4]):

Satz: *Es sei X ein n -dimensionaler Steinscher Raum, dann ist $H_n(X, Z)$ torsionsfrei und für alle $p \geq 1$ ist $H_{n+p}(X, Z) = 0$.*

Analog zu [1] kann man damit den folgenden Satz formulieren und beweisen:

Theorem von Lefschetz: *Es sei X_r eine irreduzible r -dimensionale algebraische Varietät in einem komplex projektiven Raum P_N , es bezeichne X_{r-1} den Schnitt einer Hyperfläche Y mit X_r ; Y enthalte die topologischen Singularitäten von X_r , aber nicht ganz X_r . Dann gilt: Der zur Inklusion $X_{r-1} \subset X_r$ gehörige Homomorphismus*

$$H^j(X_r, Z) \rightarrow H^j(X_{r-1}, Z)$$

ist bijektiv für $j < r-1$

injektiv für $j = r-1$

und der Quotient $H^{r-1}(X_{r-1}, Z) / H^{r-1}(X_r, Z)$ ist frei.

Zum Beweise kann man unter geeigneter Vergrößerung von N annehmen, daß Y eine Hyperebene ist ([1]). Dann ist $X_r - X_{r-1}$ ein irreduzibler Steinscher Raum und die exakte Kohomologie-sequenz zum Paar (X_r, X_{r-1}) lautet:

$$\dots \rightarrow H^i(X_r, X_{r-1}) \rightarrow H^i(X_r) \rightarrow H^i(X_{r-1}) \rightarrow H^{i+1}(X_r, X_{r-1}) \rightarrow \dots$$

Da $X_r - X_{r-1}$ eine orientierbare ([3]) topologische Mannigfaltigkeit ist, folgt aus dem Dualitätssatz von Alexander-Poincaré: $H^i(X_r, X_{r-1}) = H_{2r-i}(X_r - X_{r-1})$. Aus dem oben angegebenen Satz folgt somit die Behauptung. Einschränkungen für die Singularitäten ergeben sich also nur aus der Anwendung des Dualitätssatzes.

Brieskorn hat in [2] gezeigt, daß es normale analytische Singularitäten gibt, die topologisch Mannigfaltigkeitspunkte sind. Mit Hilfe seines Ergebnisses läßt sich ein einfaches Beispiel angeben für einen Hyperflächenschnitt X_{r-1} in X_r , der die topologischen Singularitäten von X_r umfaßt, nicht aber die analytischen: Es sei X_r für ungerades $r \geq 3$ die im P_{r+1} durch die Gleichung

$$z_0(z_1^2 + \dots + z_r^2) + z_{r+1}^3 = 0$$

definierte Hyperfläche. Im Punkte $(1, 0, \dots, 0)$ liegt eine isolierte

normale analytische Singularität vor, die jedoch nach Brieskorn ([2]) topologisch ein Mannigfaltigkeitspunkt ist. Die restlichen analytischen Singularitäten werden genau beschrieben durch

$$\{z_0 = 0\} \cap \{z_1^2 + \dots + z_r^2 = 0\} \cap \{z_{r+1} = 0\}.$$

Bezeichnet $Q(u, v, w)$ ein nicht konstantes homogenes Polynom mit $Q(1, 0, 0) \neq 0$, dann ist ein solcher Hyperflächenschnitt

$$X_{r-1} := X_r \cap \{Q(z_0^2, z_1^2 + \dots + z_r^2, z_{r+1}^2) = 0\}.$$

Durch zweimalige Anwendung des Theorems von Lefschetz zeigt man: $H^{r-1}(X_{r-1}, Z)$ ist frei und für $j < r-1$ gilt:

$$H^j(X_{r-1}, Z) = \begin{cases} Z & \text{für } j \equiv 0 \pmod{2} \\ 0 & \text{für } j \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Literatur:

- [1] ANDREOTTI A., FRANKEL TH.: The Lefschetz theorem on hyperplane sections, *Ann. of Math.* 69, 713-717 (1959).
- [2] BRIESKORN, E.: Examples of singular normal complex spaces which are topological manifolds, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 55, 1395-1397 (1966).
- [3] GIESECKE, B.: Simpliciale Zerlegung abzählbarer analytischer Räume, *Math. Zeitschr.* 83, 177-213 (1964).
- [4] KAUP, L.: Eine topologische Eigenschaft Steinscher Räume, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II Jahrgang 1966*, 213-224
- [5] LEFSCHETZ, S.: *L'analysis situs et la géométrie algebrique* (Gauthier-Villars, Paris 1924).
- [6] WALLACE, A. H.: *Homology theory on algebric varieties* (Pergamon Press, London 1958).