BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1967

MÜNCHEN 1968

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Kohomologie endlich erzeugter abelscher Gruppen

Von **Bodo Pareigis** in München

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 8. Dezember 1967

1. Das Ziel der homologischen Algebra besteht darin, von zu untersuchenden Objekten algebraische Invarianten zu gewinnen und zu untersuchen. Im allgemeinen ist es schwierig festzustellen, welche Bedeutung die Kenntnis dieser Invarianten für die Ausgangsobjekte hat.

In der Kohomologie (und auch der Homologie) der endlich erzeugten abelschen Gruppen läßt sich dieses Problem in gewissem Sinn vollständig lösen. Es stellt sich nämlich heraus, daß die Kohomologiegruppen einer endlich erzeugten abelschen Gruppe G ein vollständiges Invariantensystem enthalten. Dazu werden wir die Kohomologiegruppen (und die Homologiegruppen) von G mit Koeffizienten in endlich erzeugten trivialen G-Moduln explizit ausrechnen. Wir verwenden dabei eine besonders kleine G-freie Auflösung von $\boldsymbol{Z}$, die als Tensorprodukt von periodischen bzw. endlichen Auflösungen über den zyklischen direkten Summanden von G entsteht. Damit werden wir dann außerdem das Cup-Produkt ausrechnen, d. h. die Multiplikation des Kohomologierings und zwar in bezug auf die Erzeugenden des Kohomologierings.

Die hierbei erhaltenen Ergebnisse überschneiden sich zum Teil mit Ergebnissen über die Homologie und Kohomologie von Eilenberg-MacLane-Räumen, die im Cartan-Séminaire 1954/55 berechnet wurde, und zwar für die trivialen Koeffizientenmoduln $\boldsymbol{Z}$ und $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ für $p \neq 2$. Auch für diese Fälle sind die hier verwendeten Methoden von Interesse, weil sie eine wesentlich einfachere Berechnung der Homologie- und Kohomologiegruppen zulassen.

Bei endlichen (nicht notwendig abelschen) Gruppen G weiß man, welche Eigenschaften von G durch periodische Kohomo-

logie ausgedrückt werden. Bei periodischer Kohomologie bleibt die Ordnung der Kohomologiegruppen in Abhängigkeit vom Koeffizientenmodul beschränkt. F. Kasch stellte die Frage, welche Eigenschaften von G nur aus der Beschränktheit der Kohomologie ableitbar sind. Eine Anwendung unserer Berechnung der Kohomologie von endlich erzeugten abelschen Gruppen ist nun, daß für endliche (nicht notwendig abelsche) Gruppen die Kohomologie genau dann periodisch ist, wenn sie beschränkt ist.

2. Bevor wir die Kohomologiegruppen berechnen, benötigen wir einige Anzahlaussagen über Punkte in einem s-dimensionalen nicht negativen Gitter, d. h. in einer Teilmenge $S \subseteq \boldsymbol{Z} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{Z}$ (s-mal), die aus den Punkten mit nicht negativen Koordinaten besteht. Ein Punkt $(a_1, \ldots, a_s) \in S$ heißt vom Grad n, wenn $a_1 + \cdots + a_s = n$. $E(n, s)$ sei die Anzahl der Punkte vom Grad n in S. Dann ist

$$E(n, s) = \binom{n+s-1}{n} \qquad \text{für } (n, s) \neq (0, 0),$$
$$E(0, 0) = 1,$$

wobei wir $\binom{0}{0} = 1$ definieren. Für $s = 0$ soll S aus einem Punkt vom Grad 0 bestehen.

Die Anzahl der Punkte in S vom Grad n mit ungerader erster Koordinate ist

$$K(n, s) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i-1} \binom{i+s-1}{s-1}.$$

Weiter benötigen wir einen s-dimensionalen Würfel, d. h. eine Teilmenge $W \subseteq \boldsymbol{Z} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{Z}$ (s-mal), die aus den Punkten $(a_1, \ldots, a_s) \in \boldsymbol{Z} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{Z}$ mit $a_i \in \{0, 1\}$ für alle i besteht. Die Anzahl der Punkte vom Grad n in W ist

$$W(n, s) = \binom{s}{n},$$

wobei für $s = 0$ der Würfel aus einem Punkt besteht.

Schließlich ist $\binom{m}{n}$ die Anzahl der n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $1 \leq x_1 < \ldots < x_n \leq m$. Wir werden diese Beziehungen oft ohne ausdrückliche Hinweise im folgenden verwenden.

3. Weiter benötigen wir einige weitgehend bekannte Hilfssätze, die mit Hilfe von Spektralfolgen bewiesen werden können, für die aber auch direkte Beweise leicht anzugeben sind.

Lemma 1: *Sei* $G = W \oplus V$ *eine abelsche Gruppe, und seien* $\mathfrak{W} \to \mathbf{Z} \to 0$ *bzw.* $\mathfrak{V} \to \mathbf{Z} \to 0$ *W- bzw. V-freie Auflösungen von* $\mathbf{Z}$. *Dann ist* $\mathfrak{W} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{V} \to \mathbf{Z} \to 0$ *eine G-freie Auflösung von* $\mathbf{Z}$.

Lemma 2: *Sei* $\mathfrak{A} = (A_{i,k}, d_1, d_2)$ *mit* $i, k \geq 1$ *ein positiver Doppelkomplex, dessen Zeilen (bzgl.* d_1*) exakt sind außer in den Moduln* $A_{1,k}$. *Sei* Ker d_1 *der einfache Komplex (bzgl.* d_2*), der aus* $\mathfrak{A}$ *in der ersten Spalte durch Kernbildung (bzgl.* d_1*) entsteht. Dann ist*

$$H_n(\mathfrak{A}) \cong H_n(\mathrm{Ker}\, d_1). \tag{1}$$

Lemma 3: *Seien* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *Komplexe und sei* $d: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *ein Komplexhomomorphismus. Sei* $\mathfrak{C} = (d: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ *der durch* d, $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *definierte Doppelkomplex. Dann existiert eine exakte Folge*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Kok}\,(d: H_{n-1}(\mathfrak{A}) \to H_{n-1}(\mathfrak{B})) \to H_n(\mathfrak{C}) \to \\ \mathrm{Ker}\,(d: H_n(\mathfrak{A}) \to H_n(\mathfrak{B})) \to 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Sind in Lemma 3 ∂ bzw. δ_a bzw. δ_b die Differentiationen von $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so gilt für die Zykeln bzw. Ränder

$$\begin{aligned} \partial(a, b) = 0 \quad &\Leftrightarrow \delta_a a = 0 \text{ und } \delta_b b = da \\ (x, y) = \partial(a, b) \;&\Leftrightarrow x = \delta_a a \text{ und } y = da - \delta_b b. \end{aligned} \tag{3}$$

4. Sei G jetzt eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Es existieren zwei bis auf Isomorphie eindeutige Zerlegungen von G, nämlich

$$G = \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z} \oplus S(p_1) \oplus \ldots \oplus S(p_m), \tag{4}$$

wobei t Summanden $\mathbf{Z}$ auftreten und $S(p_i)$ die Sylow-Gruppen zur Primzahl p_i sind. Für $p \in \{p_1, \ldots, p_m\}$ gilt

$$S(p) = \mathbf{Z}_{q_1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_{q_s} \tag{5}$$

mit $q_i = p^{r_i}$.

Eine weitere Zerlegung von G ist

$$G = \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{a_1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_{a_s}, \tag{6}$$

wobei $a_i | a_{i+1}$ und t Summanden $\mathbf{Z}$ auftreten.

Seien G und H endlich erzeugte abelsche Gruppen, und sei H ein trivialer G-Modul. Wir wollen die Kohomologiegruppen $H^n(G, H)$ berechnen. Da $H^n(G, -)$ ein additiver Funktor ist, genügt es $H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i})$ für Primzahlen p und ganze Zahlen $i \geq 1$ bzw. $H^n(G, \mathbf{Z})$ zu berechnen. Dazu verwenden wir eine G-freie Auflösung von $\mathbf{Z}$. Eine $\mathbf{Z}$-freie Auflösung von $\mathbf{Z}$ ist [2]

$$0 \to \mathbf{Z}[Z] \xrightarrow{e-1} \mathbf{Z}[Z] \to \mathbf{Z} \to 0, \tag{7}$$

wobei e das erzeugende Element von $\mathbf{Z}$ ist und die Abbildung $e - 1$ die Multiplikation mit $e - 1$ ist. Sei $\mathbf{Z}_a$ zyklisch von der Ordnung a mit dem erzeugenden Element e, so ist [1, XII.7]

$$\ldots \xrightarrow{e-1} \mathbf{Z}[\mathbf{Z}_a] \xrightarrow{N} \mathbf{Z}[\mathbf{Z}_a] \xrightarrow{e-1} \mathbf{Z}[\mathbf{Z}_a] \to \mathbf{Z} \to 0 \tag{8}$$

eine $\mathbf{Z}_a$-freie Auflösung von $\mathbf{Z}$, wobei $N(1) = 1 + e + \cdots + e^{a-1}$ ist. Nach Lemma 1 ist das Tensorprodukt von Auflösungen der Form (7) und (8) je nach Zerlegung von G in entsprechender Anzahl eine G-freie Auflösung von $\mathbf{Z}$.

5. Wir wollen zunächst den Fall $H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i})$ reduzieren. Sei $G = \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z} \oplus S(p) \oplus S(p_1) \oplus \ldots \oplus S(p_m)$ mit $p \neq p_j$, und sei $H = \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z} \oplus S(p)$ und $T = S(p_1) \oplus \ldots \oplus S(p_m)$. Dann gilt

Lemma 4: $H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i}) \cong H^n(H, \mathbf{Z}_{p^i})$.

Beweis: Seien $\mathfrak{W} \to \mathbf{Z} \to 0$ eine H-freie Auflösung von $\mathbf{Z}$ und $\mathfrak{V} \to \mathbf{Z} \to 0$ eine T-freie Auflösung von $\mathbf{Z}$. Dann ist $H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i}) \cong H_n(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{V}, \mathbf{Z}_{p^i}))$. Wir betrachten in dem Doppelkomplex $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{V}, \mathbf{Z}_{p^i})$ eine Zeile mit von $\mathfrak{V}$ induzierter Differentiation d_v und festem $W_n = \oplus \mathbf{Z}[H]$. Diese Zeile ist dann

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(W_n \otimes \mathfrak{V}, \mathbf{Z}_{p^i}) \cong \prod \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[T]}(\mathfrak{V}, \mathbf{Z}_{p^i}).$$

Differenzieren wir in dieser Zeile bezüglich d_v, so erhalten wir als Homologie $\prod H^n(T, \mathbf{Z}_{p^i})$. Da T nach Definition keine Elemente der Ordnung p enthält, ist $H^n(T, \mathbf{Z}_{p^i}) = 0$ für $n \geq 1$. Also ist die Zeile bis auf den ersten Modul exakt.

Weiter ist $\operatorname{Ker} d_v \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}[H]}(\mathfrak{W}, \mathbf{Z}_{p^i})$, also $H_n(\operatorname{Ker} d_v) \cong H^n(H, \mathbf{Z}_{p^i})$. Nach Lemma 2 ist daher $H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i}) \cong H^n(H, \mathbf{Z}_{p^i})$.

Wir wollen jetzt auf die Torsionsgruppe von G reduzieren. Dazu vereinbaren wir, daß für eine abelsche Gruppe H die r-fache direkte Summe von H mit sich selbst auch als rH geschrieben wird. Allgemein gilt dann:

Lemma 5: Sei G eine beliebige abelsche Gruppe, F eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe vom Rang t und H ein trivialer $F \oplus G$-Modul. Dann ist

$$H^n(F \oplus G, H) \cong \bigoplus_{k=0}^{t} \binom{t}{k} H^{n-k}(G, H).$$

Beweis durch Induktion nach t. Sei zunächst $t = 1$. Sei $\mathfrak{W} \to \mathbf{Z} \to 0$ eine G-freie Auflösung von $\mathbf{Z}$. Durch Tensorierung mit der Auflösung (7) erhalten wir zur Bestimmung der Kohomologie von $\mathbf{Z} \oplus G$ den Doppelkomplex

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{W}_1 : 0 \to & W_0^* & \xrightarrow{d_w} & W_1^* & \to \dots \\ & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & \\ \mathfrak{W}_2 : 0 \to & W_0^* & \xrightarrow{d_w} & W_1^* & \to \dots, \end{array} \tag{9}$$

wobei $W_i^* = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(W_i, H)$ ist. Dieser Doppelkomplex ist direkte Summe zweier Doppelkomplexe mit jeweils nur einer von Null verschiedenen Zeile. Also zerfallen auch die entsprechenden Homologiegruppen. Es ist daher $H^n(\mathbf{Z} \oplus G, H) \cong H^n(G, H) \oplus H^{n-1}(G, H)$. Durch Induktion ist damit das Lemma bewiesen.

6. Wir können jetzt annehmen, daß G eine endliche abelsche Gruppe ist. Sei G zunächst eine p-Gruppe der Form (5). Wir wollen $H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i})$ bestimmen. Die G-freie Auflösung von $\mathbf{Z}$ stellt sich nach Lemma 1 und (8) dar als s-faches Tensorprodukt von Auflösungen der Form (8) von $\mathbf{Z}$, also als s-facher Komplex

$\mathfrak{A} \to \boldsymbol{Z} \to 0$. Die Kohomologiegruppen $H^n(G, \boldsymbol{Z}_{p^i})$ sind die Homologiegruppen des s-fachen Komplexes $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[G]}(\mathfrak{A}, \boldsymbol{Z}_{p^i})$. In jedem nicht negativen Punkt dieses s-fachen Komplexes steht eine Gruppe $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[G]}(\boldsymbol{Z}[G], \boldsymbol{Z}_{p^i}) \cong \boldsymbol{Z}_{p^i}$ und die von N bzw. $e - 1$ induzierten Differentiationen sind Multiplikationen mit $p^r k$ bzw. 0, da ja G trivial auf $\boldsymbol{Z}_{p^i}$ operiert.

Zum Rand von $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[G]}(\mathfrak{A}, \boldsymbol{Z}_{p^i})$ zählen wir die Moduln $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[G]}(A_{i_1, \ldots, i_s}, \boldsymbol{Z}_{p^i})$, bei denen mindestens ein $i_j = 0$ ist, und die dazwischen liegenden Differentiationen. In den Rand und aus dem Rand heraus führen nur Nullabbildungen. Die übrigen von Null verschiedenen Moduln in $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[G]}(\mathfrak{A}, \boldsymbol{Z}_{p^i})$ mit den dazwischen liegenden Abbildungen nennen wir das Innere des Komplexes. Diese wie auch später zu konstruierende Teilkomplexe machen wir durch Fortsetzung mit Null-Moduln und Null-Abbildungen wieder zu s-fachen Komplexen. $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[G]}(\mathfrak{A}, \boldsymbol{Z}_{p^i})$ ist also direkte Summe seines Randes mit seinem Inneren.

Das Innere des Komplexes besteht aus s-dimensionalen Würfeln, deren Ecken die Moduln $\boldsymbol{Z}_{p^i}$ und deren Kanten die Multiplikation mit $p^r k$ bilden. Sämtliche Homomorphismen in die Würfel bzw. aus den Würfeln heraus sind Null-Abbildungen. Das Innere ist also direkte Summe von solchen s-dimensionalen Würfeln.

Der Rand des Komplexes besteht aus s $(s-1)$-fachen Komplexen, die sich in $(s-2)$-fachen Komplexen schneiden. Das Innere dieser $(s-1)$-fachen Komplexe zerfällt wieder in eine direkte Summe von $(s-1)$-dimensionalen Würfeln. Entsprechend zerfällt das Innere der $(s-2)$-fachen Komplexe in Würfel, wobei jeweils eine entsprechende Anzahl von Differentiationen $p^r k$ fortgelassen wird. Am Ende bleibt ein Modul Z_{p^i} vom Grad 0 übrig, der als 0-dimensionaler Würfel aufgefaßt wird.

Die Homologie von $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[G]}(\mathfrak{A}, \boldsymbol{Z}_{p^i})$ zerfällt also auch in eine direkte Summe der Homologie der einzelnen Würfel.

Zur Berechnung von $H^n(G, \boldsymbol{Z})$ für eine endliche abelsche Gruppe G wählen wir die Darstellung (6) für G. Wieder erhalten wir als G-freie Auflösung $\mathfrak{A} \to \boldsymbol{Z} \to 0$ von $\boldsymbol{Z}$ ein s-faches Tensorprodukt von Auflösungen der Form (8). Der s-fache Komplex $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[G]}(\mathfrak{A}, \boldsymbol{Z})$ besteht aus Moduln $\boldsymbol{Z}$ und den Multiplikationen a_i bzw. 0 als Differentiationen. Wie oben zerfällt dieser s-fache

Komplex in eine direkte Summe von Würfeln und die Homologie des Komplexes in eine direkte Summe der Homologie der Würfel.

7. *Lemma* 6: *Sei W ein s-dimensionaler Würfel mit den Ecken $\mathbf{Z}_{p^i}$ und den Multiplikationen $p^{r_1}, \ldots, p^{r_s}$ als Kanten. Dann ergibt jede Ecke von W genau einen direkten Summanden $\mathbf{Z}_{p^v}$ mit $v = \min(r_1, \ldots, r_s, i)$ zur Homologie von W.*

Beweis: Wir nehmen $r_1 \geq \ldots \geq r_s$ an und daß die Punkte von W vom Grad n mit $0 \leq n \leq s$ sind. Sei $s = 1$. Dann ist der Würfel $0 \to \mathbf{Z}_{p^i} \xrightarrow{q} \mathbf{Z}_{p^i} \to 0$, mit $q = p^{r_1}$, also $H_0(W) \cong H_1(W) \cong \mathbf{Z}_{p^v}$.

Für beliebiges s hat W zwei $(s-1)$-dimensionale Randwürfel, die durch Multiplikation mit p^{r_s} verbunden sind. W ist also ein Doppelkomplex:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{A}: & 0 & \to & A_0 & \to \ldots \to & A_{s-1} & \to 0 \\ & \downarrow q & & \downarrow q_0 & & \downarrow q_{s-1} & \\ \mathfrak{A}: & 0 & \to & A_0 & \to \ldots \to & A_{s-1} & \to 0 \end{array}$$

mit $q = p^{r_s}$. Nach Lemma 3 erhalten wir eine exakte Folge

$$0 \to \operatorname{Kok}(H(q_{n-1})) \to H_n(W) \to \operatorname{Ker}(H(q_n)) \to 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $H_n(\mathfrak{A}) \cong \binom{s-1}{n} \mathbf{Z}_{p^v}$ mit $v = \min(r_1, \ldots, r_{s-1}, i)$. Also ist $\operatorname{Kok}(H(q_{n-1})) \cong \binom{s-1}{n-1} \mathbf{Z}_{p^w}$ und $\operatorname{Ker}(H(q_n)) \cong \binom{s-1}{n} \mathbf{Z}_{p^w}$ mit $w = \min(v, r_s)$.

Sei (x, y) ein Zykel aus $H_n(W)$. Dann ist $\partial(y, 0) = (\delta_a y, q y) = (qx, qy) = q(x, y)$. Also wird $H_n(W)$ von $q = p^{r_s}$ annulliert. Außerdem wird $H_n(W)$ von p^i annulliert, weil p^i alle Elemente in W annulliert. Da $\min(r_s, i) = \min(r_s, v) = w$, ist $H_n(W)$ ein $\mathbf{Z}_{p^w}$-Modul. $\operatorname{Ker}(H(q_n))$ ist aber Z_{p^w}-frei, also zerfällt die Folge und $H_n(W) \cong \binom{s}{n} \mathbf{Z}_{p^w}$ mit $w = \min(r_1, \ldots, r_s, i)$.

Lemma 7: *Sei W ein s-dimensionaler Würfel mit den Ecken $\mathbf{Z}$ und den Multiplikationen $a_1, \ldots, a_s$ als Kanten, und gelte $a_i \mid a_{i+1}$. Dann ist für $s \geq 1$*

$$H_n(W) \cong \binom{s-1}{n-1} \mathbf{Z}_{a_1}$$

und für $s = 0$ *ist*

$$H_n(W) \cong \binom{0}{n} \boldsymbol{Z}.$$

Beweis: Für $s = 0, 1$ sind die Aussagen trivial zu verifizieren. Für beliebiges s ist W wieder ein Doppelkomplex, und wir erhalten eine exakte Folge:

$$(10) \quad 0 \to \operatorname{Kok}(H_{n-1}(a_1)) \to H_n(W) \to \operatorname{Ker}(H_n(a_1)) \to 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $H_n(\mathfrak{A}) \cong \binom{s-2}{n-1} \boldsymbol{Z}_{a_2}$, also $\operatorname{Kok}(H_{n-1}(a_1)) \cong \binom{s-2}{n-2} \boldsymbol{Z}_{a_1}$ und $\operatorname{Ker}(H_n(a_1)) \cong \binom{s-2}{n-1} \boldsymbol{Z}_{a_1}$.

Sei (x, y) ein Zykel in $H_n(W)$. Dann ist $\partial(y, 0) = a_1(x, y)$, also ist $H_n(W)$ ein $\boldsymbol{Z}_{a_1}$-Modul. Die Folge (10) zerfällt als Folge von $\boldsymbol{Z}_{a_1}$-Moduln, und es ist

$$H_n(W) \cong \binom{s-1}{n-1} \boldsymbol{Z}_{a_1}.$$

Wir bemerken, daß ein s-dimensionaler Würfel $W\binom{s-1}{n-1}$ Punkte vom Grad n mit 1 als erster Koordinate hat, nämlich die Punkte vom Grad $n-1$ eines $(s-1)$-dimensionalen Randwürfels. Also geben die Punkte vom Grad n mit 1 als erster Koordinate je einen direkten Summanden Z_{a_1} als Anteil zur Homologie von W.

8. *Lemma* 8: *Sei* G *eine endliche abelsche Gruppe mit der* p*-Sylow-Gruppe* S(p) *von der Form* (5). *Sei* $\boldsymbol{Z}_{p^i}$ *ein trivialer* G*-Modul. Dann ist für* $n \geq 1$

$$H^n(G, \boldsymbol{Z}_{p^i}) \cong \bigoplus_{1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_n \leq s} \boldsymbol{Z}_{p^v}$$

mit $v = \min(r_{j_1}, \ldots, r_{j_n}, i)$ *und*

$$H^0(G, \boldsymbol{Z}_{p^i}) \cong \boldsymbol{Z}_{p^i}.$$

Beweis: Wir verwenden die im Abschnitt 6 beschriebene Zerlegung des s-fachen Komplexes in Würfel. Bezeichne $H_i^n(G, \boldsymbol{Z}_{p^i})$ den Anteil der Kohomologie, der aus dem Innern des Komplexes gewonnen wird. Dann ist für $n \geq 1$

$$H_i^n(G, \mathbf{Z}_{p^i}) \cong \binom{n-1}{n-s} \mathbf{Z}_{p^v}$$

mit $v = \min(r_1, \ldots, r_s, i)$, weil nach Lemma 6 jeder Punkt vom Grad n im Innern einen Anteil $\mathbf{Z}_{p^v}$ ergibt. Zu jedem l-Tupel $1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq s$ erhalten wir einen Anteil des Inneren des entsprechenden l-dimensionalen Randes, in dem nur die Differentiationen p^n mit $n = r_{j_1}, \ldots, r_{j_l}$ wirken. Also ist

$$H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i}) \cong \bigoplus_{l=1}^{s} \bigoplus_{1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq s} \mathbf{Z}_{q_l}$$

mit $q_l = p^{v_l}$ und $v_l = \min(r_{j_1}, \ldots, r_{j_l}, i)$. Durch Umnumerieren erhält man das gewünschte Resultat.

Lemma 9: *Sei G eine endliche abelsche Gruppe der Form* (6). *Sei $\mathbf{Z}$ ein trivialer G-Modul. Dann ist für $n \geq 1$*

$$H^n(G, \mathbf{Z}) \cong \bigoplus_{l=1}^{s} \bigoplus_{h=1}^{s} \binom{s-h}{l-1} K(n-l, l) \mathbf{Z}_{a_h}$$

und

$$H^0(G, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}.$$

Beweis: Betrachten wir das Innere des s-fachen Komplexes, aus dem die Kohomologie von G mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}$ gewonnen wird, so ergibt jeder Punkt mit gerader erster Koordinate einen Beitrag $\mathbf{Z}_{a_1}$. Also ist

$$H_i^n(G, \mathbf{Z}) \cong K(n-s, s) \mathbf{Z}_{a_1}.$$

Wie in Lemma 8 wird dann

$$H^n(G, \mathbf{Z}) \cong \bigoplus_{l=1}^{s} \bigoplus_{1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq s} K(n-l, l) \mathbf{Z}_b$$

mit $b = a_{j_1}$. Durch Abzählen erhält man Lemma 9.

Lemma 4, 5, 8 und 9 ergeben den

Satz 10: *Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Seien $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Z}_{p^i}$ triviale G-Moduln. Bezüglich der Zerlegung* (4) *und* (5)

von G gilt dann

$$H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i}) \cong \bigoplus_{k=0}^{t} \bigoplus_{1 \le j_1 \le \ldots \le j_{n-k} \le s} \binom{t}{k} \mathbf{Z}_{p^v} \oplus \binom{t}{n} \mathbf{Z}_{p^i}$$

mit $v = \min(r_{j_1}, \ldots, r_{j_{n-k}}, i)$. *Bezüglich der Zerlegung* (6) *von G gilt*

$$H^n(G, \mathbf{Z}) \cong \bigoplus_{k=0}^{t} \bigoplus_{l=1}^{s} \bigoplus_{h=1}^{s} \binom{t}{k} \binom{s-h}{l-1} K(n-k-l, l)\, \mathbf{Z}_{a_h} \oplus \binom{t}{n} \mathbf{Z}.$$

9. Bei der Berechnung der Homologie einer endlich erzeugten abelschen Gruppe G mit Koeffizienten in einem trivialen G-Modul $\mathbf{Z}$ bzw. $\mathbf{Z}_{p^i}$ treten dieselben Komplexe mit umgekehrter Abbildungsrichtung auf. Das Zerfallen in Inneres und Rand und das Zerfallen in Würfel bleibt entsprechend erhalten. Also erhält man den

Satz 11: *Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Seien* $\mathbf{Z}$ *und* $\mathbf{Z}_{p^i}$ *triviale G-Moduln. Bezüglich der Zerlegung* (4) *und* (5) *von G gilt dann*

$$H_n(G, \mathbf{Z}_{p^i}) \cong \bigoplus_{k=0}^{t} \bigoplus_{1 \le j_1 \le \ldots \le j_{n-k} \le s} \binom{t}{k} \mathbf{Z}_{p^v} \oplus \binom{t}{n} \mathbf{Z}_{p^i}$$

mit $v = \min(r_{j_1}, \ldots, r_{j_{n-k}}, i)$. *Bezüglich der Zerlegung* (6) *von G gilt*

$$H_n(G, \mathbf{Z}) \cong \bigoplus_{k=0}^{t} \bigoplus_{l=1}^{s} \bigoplus_{h=1}^{s} \binom{t}{k} \binom{s-h}{l-1} (E(n-k-l, l) - K(n-k-l, l))\, \mathbf{Z}_{a_h} \oplus \binom{t}{n} \mathbf{Z}.$$

10. Wir wollen jetzt das Cup-Produkt in $H^*(G, \mathbf{Z})$ bzw. $H^*(G, \mathbf{Z}_{p^i})$ für eine endlich erzeugte abelsche Gruppe berechnen. Sei $\mathfrak{G} \to \mathbf{Z} \to 0$ eine G-freie Auflösung von $\mathbf{Z}$ mit $\mathfrak{G}_0 = \mathbf{Z}[G]$ und sei $\Delta : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathfrak{G}$ ein G-Homorphismus, der mit den Differentiationen in $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{G}$ vertauschbar ist und der auf $\mathfrak{G}_0$ mit der von

$$G \ni g \longmapsto g \times g \in G \times G$$

induzierten Diagonalabbildung übereinstimmt. Für G-Moduln A bzw. A' erhalten wir Komplexhomomorphismen

$$\mathrm{Hom}_G(\mathfrak{G}, A) \otimes \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{G}, A') \to \mathrm{Hom}_{G\times G}(\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{G}, A\otimes A') \to \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{G}, A\otimes A') \to \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{G}, A\otimes A'),$$

die den Homomorphismus

$$\pi : H^*(G, A) \otimes H^*(G, A') \to H^*(G, A\otimes A')$$

induzieren. π ist bekanntlich von der Wahl von Δ unabhängig. Sind f bzw. g Kozykeln aus $H^*(G, A)$ bzw. $H^*(G, A')$, so ist $\pi(f\otimes g) = (f\otimes g)\Delta$ in $H^*(G, A\otimes A')$.

Seien $G = U \oplus V$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}\otimes\mathfrak{V}$, wobei $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{V}$ U- bzw. V-freie Auflösungen von $\boldsymbol{Z}$ sind. Seien $\Delta_U : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U}$ bzw. $\Delta_V : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}\otimes\mathfrak{V}$ gegeben. Dann setzen wir

$$(\Delta_G)_{p,q,r,s} = (-1)^{qr}(\Delta_U)_{p,q}\otimes(\Delta_V)_{r,s} : \mathfrak{U}_{p+q}\otimes\mathfrak{V}_{r+s} \to (\mathfrak{U}_p\otimes\mathfrak{V}_r)\otimes(\mathfrak{U}_q\otimes\mathfrak{V}_s),$$

wobei wir $\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{V}\otimes\mathfrak{V}$ mit $(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{V})\otimes(\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{V})$ identifizieren. Offenbar sind die oben genannten drei Bedingungen für Δ von Δ_G erfüllt. Es genügt, für eine endlich erzeugte abelsche Gruppe G also Δ_G nur im Falle $G = \boldsymbol{Z}$ bzw. $G = \boldsymbol{Z}_{p^i}$ zu kennen, wobei wir wieder die Auflösungen (7) bzw. (8) zugrunde legen. Diese Abbildungen sind in [1, S. 251] angegeben, wobei bezüglich (8) p und q nicht beide ungerade sein können.

Das Produkt zweier Kozykeln ist damit vollständig bekannt. Da wir in Satz 10 jedoch eine andere Darstellung der Kohomologiegruppen gegeben haben, wollen wir das Produkt zweier beliebiger Erzeugender der Kohomologiegruppen angeben. Dieses Problem reduzieren wir in mehreren Schritten. Zunächst betrachten wir jetzt nur noch die trivialen G-Moduln $A = \boldsymbol{Z}$ bzw. $A = \boldsymbol{Z}_{p^i}$. Dann identifizieren wir in der bekannten Weise $\mathrm{Hom}_G(\boldsymbol{Z}[G], A)$ mit A.

Eine Kokette in $\mathrm{Hom}_G(\mathfrak{G}, A)$ nennen wir einfach, wenn sie nur in einer der Komponenten $\mathrm{Hom}_G(\boldsymbol{Z}[G], A) = A$ von $\mathrm{Hom}_G(\mathfrak{G}, A)$ liegt. Die einfachen Koketten sind s-fach graduiert, wenn G als direkte Summe von s Summanden dargestellt wird. Seien a, a' zwei einfache Koketten vom Grad $(m_1, \ldots, m_s)$ bzw. $(n_1, \ldots, n_s)$, so ist wegen der trivialen Operation von G auf A wie in [1, S. 252]

$$a \cdot a' = (-1)^{\eta} \prod r_i \, a \, a'$$

mit $a\,a' \in A$ und dem Produkt in A gebildet, mit $\eta = \sum_{i=1}^{s-1} n_i m_{i+1}$ und

$$r_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } n_i m_i \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2} b (b-1) & \text{falls } n_i m_i \text{ ungerade,} \end{cases}$$

wobei b durch den i-ten direkten Summanden $\boldsymbol{Z}/b\boldsymbol{Z}$ von G definiert ist und $b = 0$ zugelassen ist. Da die Produktformel in jedem Teilgrad die Periode zwei hat, ist es möglich, jeden Teilgrad der einfachen von Null verschiedenen Koketten modulo zwei zu reduzieren.

Sei jetzt $G = \boldsymbol{Z} \oplus H$. Dann hat der entstehende Komplex $\mathrm{Hom}_G(\mathfrak{G}, A)$ die Form (9). Seien einfache Koketten $x, y \in \mathfrak{W}_1$, $u, v \in \mathfrak{W}_2$ gegeben, so sind alle Produkte zunächst wie im Komplex $\mathfrak{W}_1$ zu bilden (u, v entsprechen Koketten $u'\, v'$ in $\mathfrak{W}_1$) und das Ergebnis liegt dann für $x \cdot y$ in $\mathfrak{W}_1$ und $x \cdot u$ in $\mathfrak{W}_2$, während $u \cdot v = 0$ gilt. Die Erzeugenden für die Kohomologiegruppen liegen auch vollständig entweder in $\mathfrak{W}_1$ oder in $\mathfrak{W}_2$. Wir brauchen daher nur das Produkt in $\mathfrak{W}_1$ zu kennen. Also können wir jetzt annehmen, daß G eine endliche abelsche Gruppe ist.

Weiter können wir im Falle $A = \boldsymbol{Z}_{p^i}$ annehmen, daß G eine Gruppe ist. Treten jetzt in G zyklische Summanden $\boldsymbol{Z}_q$ mit $q = p^r$ und $r \geq i$ auf, so ist die dadurch induzierte Differentiation die Nullabbildung, der s-dimensionale Komplex $\mathrm{Hom}(\mathfrak{G}, A)$ zerfällt in $(s-1)$-fache isomorphe Komplexe K, die mit $0, 1, 2, \ldots$ graduiert sind, und die Erzeugenden der Kohomologiegruppen liegen ganz in jeweils einem dieser Unterkomplexe, tragen also deren Grad. Sind a, a' zwei solche Erzeugende vom Grad m bzw. n, so ist

$$a \cdot a' = \begin{cases} a * a' & \text{falls } m\,n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{falls } m\,n \text{ ungerade, } p \neq 2 \text{ oder } r > i, \\ p^{r-1}\, a * a' & \text{falls } m\,n \text{ ungerade, } p = 2 \text{ und } r = i, \end{cases}$$

wobei $a * a'$ das Produkt in K ist und der Grad von $a * a'$ gleich der Summe der Grade von a und a' ist. Damit können wir jetzt annehmen, daß für $A = \boldsymbol{Z}_{p^i}$ die Ordnung jedes Elements von G ein echter Teiler von p^i ist.

Betrachten wir unter den bisher erreichten Einschränkungen den Komplex $\mathrm{Hom}(\mathfrak{G}, A)$, so zerfällt dieser in Würfel, in denen die Erzeugenden der Kohomologiegruppen liegen. Da wir bezüglich des Produktes jeden Teilgrad um eine gerade Zahl verändern können, genügt es jedenfalls für das Innere von $\mathrm{Hom}(\mathfrak{G}, A)$, daß das Produkt je zweier Erzeugender aus demselben Würfel bekannt ist. Dieser Würfel sei

$$W = \begin{array}{ccccccc} \mathfrak{A}^1: 0 & \xrightarrow{\partial} & A_0^1 & \xrightarrow{\partial} & \dots & \xrightarrow{\partial} & A_{s-1}^1 \longrightarrow 0 \\ \downarrow b_s & & \downarrow b_s & & & & \downarrow b_s \\ \mathfrak{A}^2: 0 & \xrightarrow{\partial} & A_0^2 & \xrightarrow{\partial} & \dots & \xrightarrow{\partial} & A_{s-1}^2 \longrightarrow 0, \end{array}$$

wobei $A_i^1 \cong A_i^2$ und b_s die Ordnung des bei der Zerlegung (5) bzw. (6) von G kleinsten direkten Summanden ist. W sei so gewählt, daß die Koketten von A_{s-1}^2 den Grad $(2, \dots, 2)$ haben. Dann liegt die in A_{s-1}^2 liegende Erzeugende in $H^{2s}(\mathfrak{G}, A)$. Diese Erzeugende ist die Kokette 1 für $A = \boldsymbol{Z}$ und $A = \boldsymbol{Z}_{p^i}$. Weil jeder Teilgrad gerade ist, ist das Cup-Produkt mit 1 bis auf den Grad die Identität.

Wir bestimmen jetzt die übrigen Produkte durch Induktion nach der Dimension des Würfels. Der Induktionsanfang zerfällt in die Fälle

$$0 \to \boldsymbol{Z} \xrightarrow{b} \boldsymbol{Z} \to 0$$

und

$$0 \to \boldsymbol{Z}_{p^i} \xrightarrow{b} \boldsymbol{Z}_{p^i} \to 0.$$

Im ersten Fall ist $H^1(G, \boldsymbol{Z}) = 0$, also sind keine weiteren Produkte zu berechnen. Im zweiten Fall ist $H^1(G, \boldsymbol{Z}_{p^i}) = \boldsymbol{Z}_b$ mit der Erzeugenden $c = p^i : b$. Nach der Produktformel für Koketten ist also $c \cdot c = \frac{1}{2} b(b-1)c^2$ homolog zu 0, da für $p = 2$ die Zahl c ein Vielfaches von 2 ist und sonst $b - 1$ gerade ist.

Wir betrachten jetzt wieder den Würfel W und nehmen an, daß wir die Produkte in $\mathfrak{A}$ schon kennen. Für $H_t(W)$ erhalten wir die zerfallende exakte Folge von freien $\boldsymbol{Z}_{b_s}$-Moduln

$$0 \to \mathrm{Kok}\,(H_{t-1}(b_s)) \to H_t(W) \to \mathrm{Ker}\,(H_t(b_s)) \to 0,$$

wobei $H_t(b_s) : H_t(\mathfrak{A}^1) \to H_t(\mathfrak{A}^2)$ und $H_t(\mathfrak{A}^1) \cong H_t(\mathfrak{A}^2)$ freie $\boldsymbol{Z}_{b_{s-1}}$-

Moduln sind. Sei $\alpha : \mathrm{Ker}\,(H_t(b_s)) \to H_t(W)$ der Schnitt für die Folge, dann ist $H_t(W) = \alpha(\mathrm{Ker}\,(H_t(b_s))) \oplus \mathrm{Kok}\,(H_{t-1}(b_s))$. $H_{s-1}(\mathfrak{A}^1)$ hat 1 als einzige Erzeugende, also hat $\mathrm{Ker}\,(H_{s-1}(b_s))$ als Erzeugende $c = b_{s-1} : b_s$. Dieser entspricht eine Erzeugende $c + 1$ für $H_{s-1}(W)$, wobei c den Grad $(2, 2, \ldots, 2, 1)$ und 1 den Grad $(2, 2, \ldots, 1, 2)$ haben. Ist b_s ungerade oder c gerade, so ist $(c + 1) \cdot (c + 1) = 0$. Sonst ist $(c + 1) \cdot (c + 1) = u + v$, wobei u das eindeutig bestimmte Element der Ordnung 2 vom Grad $(4, 4, \ldots, 4, 2)$ und v das eindeutig bestimmte Element der Ordnung 2 vom Grad $(4, 4, \ldots, 2, 4)$ sind.

Sei x eine Erzeugende von $H_t(\mathfrak{A})$ mit $t < s - 1$, so ist es eine Erzeugende von $\mathrm{Kok}\,(H_t(b_s))$, also von $H_{t+1}(W)$. Außerdem ist cx eine Erzeugende von $\mathrm{Ker}\,(H_t(b_s))$. Damit ist aber für x als Erzeugende von $H_{t+1}(W)$ aufgefaßt $(c + 1) \cdot x$ Erzeugende von $\alpha(\mathrm{Ker}\,(H_t(b_s))) \subseteq H_t(W)$. Das definiert eine eindeutige Zuordnung zwischen den Erzeugenden von $\mathrm{Kok}\,(H_t(b_s))$ und $\alpha(\mathrm{Ker}\,(H_t(b_s)))$. Das Produkt zwischen einer Erzeugenden von $\mathrm{Kok}\,(H_t(b_s))$ und einem Element der Ordnung 2 vom Grade $(4, \ldots, 4, 2, 4)$ bzw. $(4, \ldots, 4, 4, 2)$ ist wieder von der Ordnung 2. Dieses ist aber das Produkt von $(c + 1)$ mit einer Erzeugenden von $\alpha(\mathrm{Ker}\,(H_t(b_s)))$ wegen der Assoziativität des Cup-Produkts, falls b_s gerade und c ungerade sind. Sonst ist dieses Produkt 0. Da die Produkte in $\mathfrak{A}$ schon bekannt sind, kennen wir so alle Produkte in W.

Nehmen wir zum Beispiel an, daß in keinem der Induktionsschritte der Fall auftritt, daß b_t gerade und $c = b_{t-1} : b_t$ ungerade sind. Sei $\{x_1, \ldots, x_r\}$ ein Erzeugendensystem für $H_{s-1}(W)$. Dann ist bis auf den Grad $\{x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_v} \mid i_1 < \ldots < i_v\}$ ein Erzeugendensystem von $H_{s-v}(W)$, und die Quadrate aller Erzeugenden sind Null.

Damit sind also die Produkte zwischen den Erzeugenden der Kohomologiegruppen im Innern von $\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{G}, A)$ bekannt. Sind nun x und y beliebige Erzeugende auf dem Rand von $\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{G}, A)$, so multiplizieren wir x und y mit der Erzeugenden 1 vom Grad $(2, \ldots, 2)$. Das Produkt liegt dann im Inneren, und wir können $1 \cdot x \cdot y \cdot 1$ ausrechnen. Bis auf den Grad ist das dann $x \cdot y$. Wir müssen also nur noch $1 \cdot x$ bestimmen, d. h. wenn x den Grad $(m_1, \ldots, m_s)$ hat, so hat $1 \cdot x$ den Grad $(m_1 + 2, \ldots, m_s + 2)$

und wird durch denselben Kozykel x dargestellt. Dieser ist nun nicht mehr einfach ein Erzeugendenelement, sondern im allgemeinen eine Linearkombination von solchen, was also von Fall zu Fall durch explizite Darstellung der Erzeugenden als Kozykeln auszurechnen ist.

10. Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Wir wollen zeigen, daß G schon durch die Kohomologie $H^*(G, —)$ eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt ist. Dazu benötigen wir nicht einmal alle Kohomologiegruppen $H^n(G, A)$ für alle n und A, sondern nur die Kohomologiegruppen mit endlichen trivialen G-Moduln A oder mit dem trivialen G-Modul $\mathbf{Z}$. Auch die n können noch weiter eingeschränkt werden.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß die $H^n(G, \mathbf{Z})$ bekannt sind. G habe die Form (6). Es sind $t, s, a_1, \ldots, a_s$ zu bestimmen. $H^1(G, \mathbf{Z})$ hat $\binom{t}{1} = t$ freie direkte Summanden. Damit ist t bestimmt.

Sei jetzt $n > 1$ beliebig gerade. Wir zerlegen $H^n(G, \mathbf{Z})$ als $\mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{b_1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_{b_q}$ mit $b_i \mid b_{i+1}$. Die Anzahl q der endlichen direkten Summanden dieser Darstellung ist

$$q(t, s, n) = \sum_{k=0}^{t} \sum_{l=1}^{s} \binom{t}{k} \binom{s}{l} K(n-k-l, l).$$

Dann gilt

$$q(t, s+1, n) - q(t, s, n) = \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} K(n-k-l-1, l+1) > 0$$

für gerade n. Also ist $q(t, s, n)$ stark monoton wachsend in s, d. h. s ist durch q eindeutig bestimmt.

Die Anzahl der Summanden der Form $\mathbf{Z}_{a_h}$ ist

$$p(t, s, n, h) = \sum_{k=0}^{t} \sum_{l=1}^{s} \binom{t}{k} \binom{s-h}{l-1} K(n-k-l, l).$$

Durch sukzessives Subtrahieren der entsprechenden Summanden $\mathbf{Z}_{b_i}$ mit kleinstem b_i lassen sich so $a_1, \ldots, a_s$ bestimmen.

Folgerung 12: *Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und $\mathbf{Z}$ ein trivialer G-Modul. Dann ist G durch $H^n(G, \mathbf{Z})$ für $n = 1$ und ein gerades $n > 1$ eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt.*

Sei jetzt G von der Form (4) und (5) und seien die $\mathbf{Z}_{p^i}$ triviale G-Moduln. Es sind $t, p_1, \ldots, p_m$ und für $p \in \{p_1, \ldots, p_m\}$ die $r_1, \ldots, r_s$ zu bestimmen. Sei n maximal so gewählt, daß $H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i})$ für keine Primzahl p verschwindet. Dann ist $t = n$. Sei $n > t$. Dann verschwindet $H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i})$ außer für $p \in \{p_1, \ldots, p_m\}$. Damit sind $p_1, \ldots, p_m$ bestimmt. Sei $p \in \{p_1, \ldots, p_m\}$ und sei i so groß, daß $H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i})$ keinen zu $\mathbf{Z}_{p^i}$ isomorphen direkten Summanden hat. $H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i})$ ist direkte Summe von

$$q(t, s, n) = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} \binom{n-k+s-1}{n-k}$$

Summanden. q ist in s stark monoton wachsend, also ist s durch q eindeutig bestimmt. Es existieren

$$p(t, s, n, h) = \sum_{k=0}^{t} \sum_{l=1}^{s} \binom{t}{k} \binom{n-k-1}{n-k-l} \binom{s-h}{l-1}$$

Summanden der Form $\mathbf{Z}_b$ mit $b = p^{r_h}$. Durch sukzessive Subtraktion sind $r_1, \ldots, r_s$ bestimmbar.

Folgerung 13: *Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann ist G durch $H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i})$ für alle n, alle Primzahlen p und genügend große i eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt, wobei die $\mathbf{Z}_{p^i}$ triviale G-Moduln sind.*

Ist G eine endliche abelsche Gruppe, so ist G durch $H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i})$ für ein $n \geq 1$, alle Primzahlen p und genügend große i eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt.

Ist G nur endlich erzeugt und abelsch, so genügt es nicht, die $H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i})$ nur für ein $n \geq 1$ zu kennen. Nach Satz 10 rechnet man nämlich leicht nach, daß für alle p und i gilt:

$$H^3(\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_{p^i}) \cong H^3(\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_{p^i}).$$

Weil für endlich erzeugte abelsche Gruppen $H_n(G, \mathbf{Z}_{p^i}) \cong \cong H^n(G, \mathbf{Z}_{p^i})$, gilt Folgerung 13 auch für Homologiegruppen anstelle von Kohomologiegruppen.

Auch Folgerung 12 gilt für Homologiegruppen, wenn man statt gerader n ungerade n betrachtet.

11. Mit Satz 10 läßt sich auch die in der Einleitung erwähnte Frage von F. Kasch zur Periodizität der Kohomologie von endlichen Gruppen [1, XII. 11] beantworten. Sei G eine endliche nicht notwendig abelsche Gruppe, deren Kohomologie nicht periodisch ist. Nach [1] existiert dann eine abelsche Untergruppe, die nicht zyklisch ist, also auch eine Untergruppe der Form $H = \mathbf{Z}_p \oplus \mathbf{Z}_p$. Dann ist wegen [1, XII. Ex. 7] für $n \geq 1$

$$(11) \quad H^n(G, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[H]}(\mathbf{Z}[G], \mathbf{Z}_{p^i})) \cong H^n(H, \mathbf{Z}_{p^i}) \cong (n+1)\,\mathbf{Z}_p.$$

Wir nennen $H^*(G, -)$ *beschränkt*, wenn für jeden endlichen G-Modul M eine ganze Zahl $N = N(M)$ so existiert, daß $\mathrm{Ord}\,(H^n(G, M)) \leq N$ für alle n. Ist die Kohomologie von G periodisch, so ist sie offenbar beschränkt. (11) zeigt, daß nichtperiodische Kohomologie auch nicht beschränkt ist.

Folgerung 14: *Sei G eine endliche Gruppe. Die Kohomologie von G ist genau dann periodisch, wenn sie beschränkt ist.*

Literatur

[1] Cartan, H. und S. Eilenberg: Homological algebra. Princeton 1956.
[2] MacLane, S.: Homology. Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.