BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1968

MÜNCHEN 1969

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Das Äquivalenzprinzip der Wahrscheinlichkeitstheorie für lokalkompakte Gruppen und homogene Räume

Von **Herbert Heyer** in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 2. Februar 1968

1. *Einleitung*

Das klassische Äquivalenzprinzip der Wahrscheinlichkeits-(*WS*-)theorie besagt, etwa in der Formulierung von Loève [5], S. 251, daß für die Folge der endlichen Partialsummen stochastisch unabhängiger reellwertiger Zufallsvariablen über einem *WS*-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ fast sichere, stochastische und Verteilungskonvergenz äquivalent sind. Schaut man sich den Beweis dieses Satzes genauer an, so sieht man leicht ein, daß eine eventuelle Verallgemeinerung für Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $\mathbf{R}^N$ $(N \geq 2)$ anstelle von $\mathbf{R}^1$ mit größeren technischen Schwierigkeiten verbunden ist, falls man sich nicht von den Grundideen des klassischen Beweises entfernt. Dies liegt wohl daran, daß nicht offen zutage tritt, welche Struktureigenschaften von $\mathbf{R}^1$ wesentlich eingehen. Das Ziel dieser Note ist die Verallgemeinerung des Äquivalenzprinzips für Zufallsvariable mit Werten in gewissen lokalkompakten separablen Gruppen, denen unter anderen die Vektorgruppen $\mathbf{R}^N$ $(N \geq 1)$ angehören. Zudem wird der genaue Gültigkeitsbereich des Äquivalenzprinzips festgelegt und somit eine Klasse von lokalkompakten Gruppen (nämlich die aller lokalkompakten separablen Gruppen ohne echte kompakte Untergruppe) *ws*-theoretisch charakterisiert.

Eine Teillösung des Problems steht bereits bei Loynes; in [6] werden jedoch nur abelsche Gruppen betrachtet. Der Beweis der Aussage (VI) des Equivalence Theorem in [2], welches eine abgeschwächte Form des von uns betrachteten Äquivalenzprinzips darstellt, ist unnötig lang. Wir liefern einen kurzen und direkten Beweis der Verallgemeinerung des Äquivalenzprinzips, gestützt auf ein Resultat von Csiszár [1] und geben außerdem eine Verallgemeinerung für gewisse Zufallsvariable in homogenen Räumen nach einer kompakten Untergruppe an. Letztere hat übrigens eine weitere Behauptung in [2] zur Folge.

2. *Terminologie*

2.1 Sei G eine lokalkompakte separable (multiplikativ geschriebene) Gruppe mit neutralem Element e.[1] Mit $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}(G)$ werde die Menge aller *WS*-Maße (positive Radonmaße der Norm 1) auf G bezeichnet. Jedes Maß aus $\mathfrak{M}$ kann als reguläres Borelmaß auf der σ-Algebra $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(G)$ der Borelschen Mengen von G aufgefaßt werden. Versieht man die Menge $\mathfrak{M}$ mit der durch die *Faltung* gegebenen multiplikativen Struktur und außerdem mit der *vagen Topologie*, so wird $\mathfrak{M}$ zu einer topologischen Halbgruppe, die genau dann vag kompakt ist, wenn G kompakt ist.

Auf G existiert ein bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmtes σ-endliches invariantes Maß ω, das *Haarsche Maß* von G. Es ist genau auf kompakten Gruppen endlich und daher normierbar, also ein Element von $\mathfrak{M}$. Ist H eine kompakte Untergruppe von G, so bezeichnet ω_H das auf H *normierte Haarsche Maß*. Dies ist ein *Idempotent* in $\mathfrak{M}$, und die Idempotenten von $\mathfrak{M}$ sind genau die Maße ω_H für kompakte Untergruppen H von G. Ein Maß $\mu \in \mathfrak{M}$ heißt *H-invariant*, falls für jedes $x \in H$ und alle $B \in \mathfrak{B}$ gilt $\mu(B) = \mu(Bx)$. Offenbar ist $\mu \in \mathfrak{M}$ H-invariant genau dann, wenn $\mu = \mu * \omega_H$ erfüllt ist. Für jedes $x \in G$ bezeichnet ε_x das *Punktmaß* in x.

2.2 Sei (μ_j) eine Folge in $\mathfrak{M}$ und (ν_n) die Folge der Maße $\nu_n := \mu_1 * \ldots * \mu_n$ für alle $n \geq 1$. Falls dann (ν_n) Häufungspunkte ν' und ν'' (in $\mathfrak{M}$) besitzt, so gilt $\nu'' \sim \nu'$, d. h. es existiert ein $x \in G$ mit der Eigenschaft $\nu'' = \nu' * \varepsilon_x$.

Ein Beweis dieser Behauptung befindet sich in [1], S. 286.

2.3 Es seien nun eine lokalkompakte separable Gruppe G und eine kompakte Untergruppe H von G vorgelegt. Dann läßt sich bekanntlich die Menge $M := G/H$ aller Linksrestklassen von H

---

[1] G heißt *separabel*, falls G σ-kompakt ist und im Element e eine abzählbare Basis besitzt (G besitzt also eine abzählbare Basis für seine Topologie).

mittels der *natürlichen Abbildung* π von G auf G/H, definiert durch $\pi(x) := xH$ für alle $x \in G$, mit der Quotiententopologie ausrüsten. Der entstehende *homogene Raum* M ist lokalkompakt und separabel, da G lokalkompakt und separabel ist. G/H ist genau dann eine topologische Gruppe, wenn H ein Normalteiler ist in G. Die Menge $\mathfrak{M}_H := \mathfrak{M}_H(G)$ aller (rechts-) H-invarianten WS-Maße auf G kann vermöge der natürlichen Abbildung π eineindeutig auf die Menge $\mathfrak{M}' := \mathfrak{M}'(M)$ aller WS-Maße auf der Borelschen σ-Algebra $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B}'(M)$ von M abgebildet werden. $\mathfrak{M}_H$ ist gegenüber Bildung konvexer Linearkombinationen sowie Faltung, aber auch bezüglich der vagen Topologie abgeschlossen.

2.4 Sei (μ_j) eine Folge in $\mathfrak{M}_H$ und (ν_n) die Folge der Maße $\nu_n := \mu_1 * \ldots * \mu_n$ für alle $n \geq 1$. Besitzt dann (ν_n) Häufungspunkte ν' und ν'' (in $\mathfrak{M}_H$), so existiert ein $x \in G$ mit $xH = Hx$, so daß gilt $\nu'' = \nu' * \varepsilon_x$.

Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich in Analogie zum Beweis von 2.2. Eine etwas allgemeinere Fassung des Resultates steht bei Tortrat in [8], S. 286, 287.

Alle im folgenden auftretenden Limesrelationen für Folgen von WS-Maßen werden im Sinne der vagen Topologie verstanden.

3. *Definitionen*

Der Begriff der *G- bzw. M-Zufallsvariablen* auf einem WS-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ läßt sich analog zur klassischen Theorie einführen. Ebenso überträgt man die (*stochastische*) *Unabhängigkeit* für Familien von G- bzw. M-Zufallsvariablen. Unter der *WS-Verteilung* einer G- bzw. M-Zufallsvariablen X versteht man das Bildmaß $P_X := X(P)$. Sind X_1 und X_2 zwei G- bzw. M-Zufallsvariable (auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$), so gilt für die Verteilung des Produktes $X_1 \cdot X_2$, falls X_1 und X_2 unabhängig sind, $P_{X_1 \cdot X_2} = P_{X_1} * P_{X_2}$.

Jede im folgenden auftretende Umgebung U von e in G wird stets als symmetrisch (d. h. mit $U^{-1} = U$) vorausgesetzt.

3.1 *Definition.* Es sei (X_n) eine Folge von G-Zufallsvariablen.

(I) (X_n) *konvergiert stochastisch* gegen eine G-Zufallsvariable $X (X_n \xrightarrow{st} X)$, falls für jede Umgebung U von e gilt
$\lim_{n\to\infty} P[X_n \in UX] = 1$.[2]

(II) (X_n) *konvergiert fast sicher* gegen $X (X_n \xrightarrow{fs} X)$, falls für jede Umgebung U in e gilt
$\lim_{n\to\infty} P \bigcap_{i\geq n} [X_i \in UX] = 1$.

(III) (X_n) *konvergiert in Verteilung* gegen $X (X_n \xrightarrow{V} X)$, falls $P_{X_n} \to P$ im Sinne der vagen Topologie (in $\mathfrak{M}$).

Sei nun ein homogener Raum $M = G/H$ wie in 2.3 gegeben. Für jedes U einer Basis $\mathfrak{U}$ in e definieren wir durch $U(x'): = \pi(U x H)$ eine Basis $\mathfrak{U}'$ von $x' = \pi(x)$ in M.

3.2 *Definition:* Es sei (X'_n) eine Folge von M-Zufallsvariablen

(I) (X'_n) konvergiert *stochastisch* gegen eine M-Zufallsvariable $X' (X'_n \xrightarrow{st} X')$, falls für jede Umgebung U von e gilt
$\lim_{n\to\infty} P[X'_n \in U(X')] = 1$.[3]

(II) (X'_n) konvergiert *fast sicher* gegen $X' (X'_n \xrightarrow{fs} X')$, falls für jede Umgebung U in e gilt:
$\lim_{n\to\infty} P \bigcap_{i\geq n} [X'_i \in U(X')] = 1$.

(III) (X'_n) konvergiert *in Verteilung* gegen X', $(X'_n \xrightarrow{V} X')$, falls $P_{X'_n} \to P_{X'}$.

Für eine G-Zufallsvariable X ist $X' : = \pi \circ X$ eine M-Zufallsvariable. Wir nennen eine Folge (X_n) von G-Zufallsvariablen *mod H-konvergent* (stochastisch, fast sicher bzw. in Verteilung), falls die zugehörige Folge $(\pi \circ X_n)$ von M-Zufallsvariablen konvergiert (stochastisch, fast sicher bzw. in Verteilung). In diesen Fällen schreiben wir

$$X_n \xrightarrow{H\text{-}st} X,\quad X_n \xrightarrow{H\text{-}fs} X \text{ bzw. } X_n \xrightarrow{H\text{-}V} X.$$

---

[2] Dabei wird stets $[X_n \in UX]$ für $\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \in UX(\omega)\}$ $= \{\omega \in \Omega : X_n X^{-1}(\omega) \in U\}$ stehen.

[3] Wie in [2] hat man $[X'_n \in U(X')] = \{\omega \in \Omega : X'_n(\omega) \in U(X'(\omega))\}$ zu lesen.

4. *Ein Satz von Cziszár:*

Wir benötigen das folgende Resultat aus [1], S. 291.

4.1 *Satz von Csiszár.* Es sei (X_j) eine unabhängige Folge von G-Zufallsvariablen (auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$). Durch $Y_n := X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$ für alle $n \geq 1$ definieren wir die zugehörige Folge (Y_n) der n-ten Partialprodukte von (X_j) und weiterhin für jedes $0 \leq k < n$ ($n = 1, 2, \ldots$) $Y_k^n := X_{k+1} \cdot \ldots \cdot X_n$. Es werde schließlich vorausgesetzt, daß $Y_k^n \xrightarrow{V} Z_k$ für alle $0 \leq k < n$ ($n \to \infty$).

Dann existiert eine *eindeutig* bestimmte kompakte Untergruppe H von G mit den Eigenschaften

(I) P_{Z_k} ist H-invariant für alle $0 \leq k < n$ und

(II) $Y_n \xrightarrow{H\text{-}fs} Y$.

4.2 *Zusatz:* Ist K eine kompakte Untergruppe von G und werden die Verteilungen P_{X_j} für alle $j \geq 1$ als K-invariant vorausgesetzt, so existiert eine *eindeutig* bestimmte kompakte Untergruppe H von G mit $H \supset K$ und mit den Eigenschaften (I) und (II) des Satzes.

Beweis: ergibt sich aus der Konstruktion von H in der folgenden Weise: Mit P_{X_j} für alle $j \geq 1$ ist auch $P_{Y_k^n}$ sowie P_{Z_k} und schließlich $\mu := \lim P_{Z_k}$ K-invariant. Nach Konstruktion ist aber $\mu = \omega_H$ für eine kompakte Untergruppe H von G ([1], S. 291), also $H \supset K$.

5. *L-Gruppen:*

Eine lokalkompakte separable Gruppe G heißt *L-Gruppe*[4], wenn für jede kompakte Untergruppe H von G gilt: $H = \{e\}$. Es sei $\mathfrak{L}$ die Klasse der L-Gruppen.

5.1 Wir erhalten folgende *Eigenschaften und Beispiele* für Elemente von $\mathfrak{L}$:

---

[4] Die Bedeutung der hier definierten Klasse von Gruppen für die *WS*-Theorie wurde zum ersten Mal von Loynes in [6] hervorgehoben; daher die Bezeichnung.

(1) Sei $G \in \mathfrak{L}$ und U eine Untergruppe von G. Dann folgt $U \in \mathfrak{L}$.

(2) Sei U ein Normalteiler von G. Dann gilt das Induktionsprinzip: $U, {}^{G}/_{U} \in \mathfrak{L} \Rightarrow G \in \mathfrak{L}$.

(3) Sei G eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, auflösbare Lie-Gruppe. Dann gilt $G \in \mathfrak{L}$.

(3′) Speziell ist die Zusammenhangskomponente der Gruppe aller 2×2-oberen-Dreiecksmatrizen in $\mathfrak{L}$.

(4) Für jedes $N \geq 1$ liegt die Vektorgruppe $\mathbf{R}^N$ in $\mathfrak{L}$.

(5) Unter den diskreten Gruppen gehören die torsionsfreien zu $\mathfrak{L}$.

Allgemeiner erhält man die folgende *Charakterisierung der Klasse* $\mathfrak{L}$.

5.2 *Proposition.* $G \in \mathfrak{L}$ genau dann, wenn G Lie-Gruppe und torsionsfrei ist.

Beweis: Als L-Gruppe ist G bereits Lie-Gruppe aufgrund des corollary in [7], S. 172 zusammen mit dem Resultat, daß lokalkompakte Gruppen ohne kleine Untergruppen bereits Lie-Gruppen sind (vgl. [7], S. 163 oder [3], S. 90). Die Torsionsfreiheit folgt direkt.

Sei umgekehrt G torsionsfrei und K eine kompakte Untergruppe von G mit $K \ni x \neq e$. Dann ist $K' := \overline{\{x^n : n \in \mathbf{Z}\}}$ eine kompakte abelsche Untergruppe $\neq \{e\}$ von G. Dies ist aber ein Widerspruch, wie man im Falle diskreter Gruppen K' sofort und im Falle von Gruppen K' mit $\dim K' > 0$ mittels des Struktursatzes für zusammenhängende kompakte abelsche Gruppen einsieht (vgl. [7], S. 190).

6. *Äquivalenzprinzip für Gruppen:*

6.1 *Satz 1.* Es sei (X_j) eine unabhängige Folge von G-Zufallsvariablen (auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$) und (Y_n) die zugehörige Folge ihrer n-ten Partialprodukte $Y_n = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$. Dann sind fast sichere und Verteilungskonvergenz der Folge (Y_n) genau dann äquivalent[5], wenn G eine L-Gruppe ist.

---

[5] in dem Sinne, daß aus der fast sicheren Konvergenz der Folge (Y_n) die Verteilungskonvergenz folgt und umgekehrt.

Beweis: (1) Sei G keine L-Gruppe. Das heißt: es existiert eine kompakte Untergruppe $H \neq \{e\}$ von G. Wir betrachten die spezielle Folge (X_j) von G-Zufallsvariablen mit $P_{X_j} = \omega_H$ für alle $k \geq 1$. Dann folgt wegen der Idempotenz von ω_H (vgl. 2.1) sogar $P_{Y_n} = \omega_H$ für alle $n \geq 1$ und somit $P_{Y_n} \to \omega_H$. Hingegen divergiert die Folge (Y_n) fast sicher, wie nach Anwendung des 0-1-Kriteriums von B o r e l (vgl. [5], S. 228) folgt.

(2) Sei nun G eine L-Gruppe. Wir definieren $Y_k^n := Y_{k+1} \cdot \ldots \cdot Y_n$ sowie $\nu_k^n := P_{Y_k^n}$ für alle $0 \leq k < n$ und $n \geq 1$.

Ferner werde vorausgesetzt, daß für die Folge (ν_n) mit $\nu_n := \nu_0^n$ gelte $\nu_n \to \nu$, wobei $\nu \in \mathfrak{M}$ ist. Dies bedeutet aber, daß für beliebige Häufungspunkte ν' und ν'' der Folge $(\nu_k^n)_{n \geq 1}$ die folgende Gleichung erfüllt ist

$$\nu_0^k * \nu' = \nu_0^k * \nu'' = \nu \quad (0 \leq k < n).$$

Also erhalten wir $\nu', \nu'' \in \mathfrak{M}$ und somit nach 2.

$\nu'' \sim \nu'$, d. h. es existiert ein $x \in G$ mit

$$\nu'' = \nu' * \varepsilon_x.$$

Somit ergibt sich

$$\nu = \nu_0^k * \nu' = \nu_0^k * \nu' * \varepsilon_x = \nu * \varepsilon_x$$

und also

$$\nu = \nu * \varepsilon_x \text{ für ein } x \in G.$$

Wir zeigen nun, daß für den Fall einer L-Gruppe notwendig $x = e$ folgt. Denn sei $x \neq e$, C eine kompakte Teilmenge von G mit $\nu(C) > 0$. Dann existiert eine Folge (n_j) in $\mathbf{Z}$, so daß die Mengen $C x^{n_j}$ für $j \geq 1$ disjunkt sind. Anderenfalls wäre nämlich die von x erzeugte abgeschlossene echte Untergruppe von G kompakt und mithin G keine L-Gruppe. Somit gilt für die Borelsche Menge $C' := \bigcup_{j \geq 1} C x^{n_j}$ vermöge obiger Gleichung:

$$\begin{aligned}\nu(C') &= \nu\Big(\bigcup_{j \geq 1} C x^{n_j}\Big) = \sum_{j \geq 1} \nu(C x^{n_j}) = \sum_{j \geq 1} \nu * \varepsilon_{x^{n_j}}(C) \\ &= \sum_{j \geq 1} \nu(C) = \infty\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Endlichkeit von ν.

Also kann die Folge $(\nu_k^n)_{n\geq 1}$ nur einen Häufungspunkt haben. Da G separabel ist, ist dieser der Limes, und wir erhalten die Konvergenz auch der Folge $(\nu_k^n)_{n\geq 1}$ für jedes $0 \leq k < n$. Damit ist der Satz in 4. anwendbar. Es existiert also eine eindeutig bestimmte kompakte Untergruppe H von G, so daß der Limes von (ν_k^n) H-invariant ist für alle $0 \leq k < n$, und es gilt

$$Y_n \xrightarrow{H\text{-}fs} Y.$$

Da G eine L-Gruppe ist, muß $H = \{e\}$ sein, und es folgt

$$Y_n \xrightarrow{fs} Y,$$

womit der Beweis beendet ist.

6.2 *Korollar*: Für die Implikation $Y_n \xrightarrow{V} Y \Rightarrow Y_n \xrightarrow{fs} Y$ ist unter den Voraussetzungen des Satzes folgende Bedingung hinreichend:

P_Y ist für keine kompakte Untergruppe $K \neq \{e\}$ von G (rechts-) K-invariant.

6.3 *Definition*: Eine lokalkompakte separable Gruppe G *genügt dem Äquivalenzprinzip* ($\ddot{A}P$), wenn für jede Folge (X_j) von G-Zufallsvariablen und die zugehörige Folge (Y_n) der n-ten Partialprodukte der X_j fast sichere, stochastische und Verteilungskonvergenz äquivalent sind.

6.4 *Satz* 2. Es sei G eine lokalkompakte separable Gruppe. Dann genügt G dem ($\ddot{A}P$) genau dann, wenn G eine L-Gruppe ist.

Beweis: Wegen Satz 1 bleibt noch zu zeigen, daß für Folgen (Y_n) von G-Zufallsvariablen fast sichere und stochastische Konvergenz äquivalent sind. Da die fast sichere Konvergenz für beliebige Folgen von meßbaren Abbildungen auf einem WS-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ die stochastische Konvergenz nach sich zieht, muß nur noch die umgekehrte Implikation begründet werden. Diese ergibt sich aber nach dem klassischen Vorbild etwa wie in [4].

Mit der Aussage von Satz 2 ist nicht nur das klassische Äquivalenzprinzip von $\mathbf{R}^1$ auf die Klasse der L-Gruppen verallgemeinert, sondern auch sein genauer Gültigkeitsbereich festgelegt.

7. *Verallgemeinerung für homogene Räume.*

Die Ergebnisse von 6. lassen sich ohne weitere Schwierigkeiten auf die folgende Situation verallgemeinern.

Vorgelegt seien wie in 6. eine lokalkompakte separable Gruppe G sowie eine kompakte Untergruppe K von G.

7.1 *Satz 3.* Es sei (X_j) eine unabhängige Folge von G-Zufallsvariablen (auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$) mit der Eigenschaft, daß P_{X_j} K-invariant ist für alle $j \geq 1$. Mit (Y_n) werde wie üblich die Folge der n-ten Partialprodukte $Y_n = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$ bezeichnet. Dann sind K-fast sichere und K-Verteilungskonvergenz genau dann äquivalent, wenn K maximal kompakt ist.

Beweis: läßt sich analog zum Beweis von Satz 1 erbringen. Man hat nur die Eigenschaften der Menge $\mathfrak{M}_K$ auszunützen (vgl. 2.3). Im einzelnen kann man sich auf 2.4 stützen, um zu je zwei Häufungspunkten ν' und ν'' der Folge (ν_k^n) ein $x \in G$ mit $xK = Kx$ zu finden, so daß $\nu'' = \nu' * \varepsilon_x$ gilt. Betrachtet man nun die von x erzeugte abgeschlossene Untergruppe L von G, so hat diese die Eigenschaft $LK = KL$, d. h. LK ist selbst Untergruppe von G und nach dem entsprechenden Schluß in 6.1 sogar kompakt. Da K maximal kompakt ist, folgt also $x \in K$ und somit $\nu'' = \nu'$, womit die Konvergenz jeder der Folgen (ν_k^n) für $0 \leq k < n$ gezeigt ist. Der Rest des Beweises erfolgt unter Heranziehung von 4.2.

7.2 *Korollar:* Hinreichend für die Implikation $Y_n \xrightarrow{K\text{-}V} Y \Rightarrow Y_n \xrightarrow{K\text{-}fs} Y$ ist die folgende Bedingung

P_Y ist für keine von K verschiedene kompakte Untergruppe $K' \supset K$ von G (rechts-) K'-invariant.

Schließlich ergibt sich:

7.3 *Satz 4.* (Verallgemeinertes Äquivalenzprinzip). Es sei die Situation von Satz 3 vorgelegt. Es sind für die Folge (Y_n) K-fast sichere, K-stochastische und K-Verteilungskonvergenz genau dann äquivalent, wenn K maximal kompakt ist.

Beweis: Man hat nur die Verallgemeinerung des einzigen nicht-trivialen Schlusses im Beweis von Satz 2 durchzuführen. Diese ist übrigens im Beweis des Satzes von Csiszár ([1], S. 292, 293) enthalten.

8. *Zusammenhang mit Markoff-Prozessen.*

Eine Anwendung von Satz 4 steht in etwas abgeschwächter Form bereits in [2].

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P, M, (Z_j)_{j \geq 1})$ ein (diskreter) *Markoff-Prozeß* mit einem homogenen Raum $M := G/K$ als Zustandsraum, wobei G eine lokalkompakte separable Gruppe und K eine kompakte Untergruppe von G ist. Der Prozeß besitze zudem *Übergangswahrscheinlichkeiten* $P^y_{n,m}$ definiert für alle $y \in M$ und alle $B \in \mathfrak{B}(M)$ durch

$$P^y_{n,m}(B) = P[Z_m \in B \mid Z_n = y] \quad (n, m \geq 1 \text{ und } n < m)$$

und sei *G-invariant* in dem Sinne, daß für alle $x \in G$ gilt:

$$P^{xy}_{n,m}(xB) = P^y_{n,m}(B).$$

Derartige Prozesse werden gelegentlich *reguläre* Markoff-Prozesse genannt. Als Referenz für die Terminologie benütze man etwa [5], section 38.2. Dann gilt

8.1 *Satz* 5. Für reguläre Markoff-Prozesse mit einem homogenen Raum $M = G/K$ als Zustandsraum sind f. s. Konvergenz, stochastische Konvergenz und Verteilungskonvergenz genau dann äquivalent, wenn K maximal kompakt ist.

Der *Beweis* beruht auf den folgenden in [2] bewiesenen Aussagen:

(1) Für jede Folge (Y_j) mit den in Satz 4 formulierten Eigenschaften definiert die Folge (Z_j) mit $Z_j = \pi \circ Y_j$ für alle $j \geq 1$ einen regulären Markoff-Prozeß mit Zustandsraum M.

(2) Zu jedem regulären Markoff-Prozeß $(\Omega, \mathfrak{A}, P, M, (Z_j)_{j \geq 1})$ existiert eine Folge (Y_j) von G-Zufallsvariablen wie in (1), so daß die Folgen $(\pi \circ Y_j)$ und (Z_j), als Prozesse aufgefaßt, äquivalent sind.

8.2 Ein *Beispiel* für die Situation in Satz 5 bietet die Spezialisierung $G = GL(n, \mathbf{R}^1)$ und $K = O(n)$.

Literatur

[1] I. Csiszár, On infinite products of random elements and infinite convolutions of probability distributions on locally compact groups, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 5 (1966), 279–295.

[2] A. R. Galmarino, The equivalence theorem for compositions of independent random elements on locally compact groups and homogeneous spaces, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 7 (1967), 29–42.

[3] V. M. Gluškov, The structure of locally compact groups and Hilbert's fifth problem, Uspehi Mat. Nauk 12 (1957), 3–41 (Englische Übersetzung in Amer. Math. Soc. Translations Series 2, Vol 15, 55–93).

[4] H. Heyer, L'analyse de Fourier non-commutative et applications à la théorie des probabilités, Ann. Inst. Henri Poincaré Vol IV (1968), 143–164.

[5] M. Loève, Probability theory 2nd edition, D. Van Nostrand Company (1960).

[6] R. M. Loynes, Products of independent random elements in a topological group, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 1 (1963), 446–455.

[7] D. Montgomery, L. Zippin, Topological Transformation Groups, Interscience Publishers (1955).

[8] A. Tortrat, Lois tendues et convolutions dénombrables dans un groupe topologique X, Ann. Inst. Henri Poincaré Vol II (1966), 279–298.