BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1968

MÜNCHEN 1969

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkung zu einem Satz von Morita über Frobenius-Erweiterungen

Von Takeshi Onodera in München

Vorgelegt am 8. November 1968

Sei Γ ein Ring mit 1-Element und Λ ein Unterring von Γ mit 1. Γ ist eine Frobenius-Erweiterung von Λ nach Fr. Kasch [1], wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) ${}_{\Lambda}\Gamma$ ist endlich erzeugt und projektiv.

(2) ${}_{\Gamma}\Gamma_{\Lambda} \cong {}_{\Gamma}\mathrm{Hom}({}_{\Lambda}\Gamma, {}_{\Lambda}\Lambda)_{\Lambda}$.

Sei E der Endomorphismenring der additiven Gruppe Γ^{+} von Γ. Für eine Untermenge $U(\neq 0)$ von E bezeichnen wir mit $V_E(U)$ den Zentralisator von U in E. Für $\alpha \in \Gamma$ bezeichne α_L bzw. α_R den Endomorphismus von Γ^{+}, der durch Linksmultiplikation bzw. Rechtsmultiplikation von Γ mit α erzeugt wird.

Für $A \subseteqq \Gamma$ sei

$$A_L = \{\alpha_L \mid \alpha \in A\} \text{ bzw. } A_R = \{\alpha_R \mid \alpha \in A\}.$$

Offenbar gilt $\Gamma_R \subseteqq V_E(\Lambda_L)$ und daraus folgt

$$V_E(V_E(\Lambda_L)) \subseteqq V_E(\Gamma_R) = \Gamma_L.$$

Also gibt es einen Unterring $\Lambda' \subseteqq \Gamma$ mit

$$\Lambda \subseteqq \Lambda', \Lambda'_L = V_E(V_E(\Lambda_L)).$$

Sei ferner Λ_0 der Unterring von Λ, der von $1 \in \Lambda$ und allen Elementen $f(\gamma)$ mit $f \in \mathrm{Hom}({}_{\Lambda}\Gamma, {}_{\Lambda}\Lambda)$, $\gamma \in \Gamma$, erzeugt wird.

Kürzlich hat K. Morita den folgenden Satz bewiesen. ([2], Theorem 1.1).

Satz. Wenn Γ Frobenius-Erweiterung von Λ ist, dann ist Γ auch Frobenius-Erweiterung von jedem Unterring $T \subseteqq \Gamma$ mit

$$\Lambda_0 \subseteqq T \subseteqq \Lambda'.$$

Für diesen Satz wollen wir hier einen einfachen Beweis angeben.

Zum Beweis wird die folgende Kennzeichnung von Frobenius-Erweiterungen benutzt ([3], Satz 7):

Γ ist Frobenius-Erweiterung von Λ dann und nur dann, wenn es Elemente $r_1, \ldots, r_n, l_1, \ldots, l_n$ von Γ und einen zweiseitigen Λ-Homomorphismus (= Frobenius-Homomorphismus) h von Γ in Λ gibt, so daß gilt:

$$(*) \qquad \gamma = \sum_{i=1}^{n} h(\gamma r_i)\, l_i = \sum_{i=1}^{n} r_i\, h(l_i \gamma)$$

für jedes $\gamma \in \Gamma$.

Auf Grund dieser Tatsache genügt es zum Beweis zu zeigen, daß das zuvor angegebene h sogar ein zweiseitiger T-Homomorphismus von Γ in T ist. Es ist zunächst klar, daß h ein T-Homomorphismus von ${}_T\Gamma$ in ${}_T T$ ist, weil $h \in V_E(\Lambda_L)$ und $h(\Gamma) \subseteqq \subseteqq \Lambda_0 \subseteqq T$. Es bleibt zu zeigen, daß h ein T-Homomorphismus von Γ_T in T_T ist. Seien γ ein beliebiges Element von Γ und t ein beliebiges Element von T. Dann gilt für ein beliebiges Element γ' von Γ:

$$\begin{aligned} h\{(h(\gamma t) - h(\gamma)\, t)\, \gamma'\} &= h\{h(\gamma t)\, \gamma' - h(\gamma)\, t\gamma'\} \\ &= h(\gamma t)\, h(\gamma') - h(\gamma)\, h(t\gamma') = h\{\gamma t\, h(\gamma')\} - h(\gamma)\, h(t\gamma') \\ &= h\{\gamma\, h(t\gamma')\} - h(\gamma)\, h(t\gamma') = h(\gamma)\, h(t\gamma') - h(\gamma)\, h(t\gamma') = 0. \end{aligned}$$

Da wegen (*) kein von Null verschiedenes Rechtsideal im Kern von h enthalten ist, folgt

$$h(\gamma t) - h(\gamma)\, t = 0, \quad \gamma \in \Gamma, \quad t \in T,$$

d. h. ist h ein T-Homomorphismus von Γ_T in T_T.

Bemerkung 1. Seien Λ_1, Λ_2 und Λ_3 die folgendermaßen definierten Unterringe von Γ:

$$
\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \{\gamma_1 \in \Gamma;\ h(\gamma_1\gamma) = \gamma_1 h(\gamma) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma\},\\
\Lambda_2 &= \{\gamma_2 \in \Gamma;\ h(\gamma\gamma_2) = h(\gamma)\gamma_2 \text{ für alle } \gamma \in \Gamma\},\\
\Lambda_3 &= V_E(V_E(\Lambda_R)).
\end{aligned}
$$

Dann gilt $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda'$.

Diese Tatsache kann man leicht aus der Gleichung (*) und dem obigen Beweis entnehmen.

Bemerkung 2. Mit Hilfe der hier durchgeführten Überlegung kann man auch einen einfachen Beweis für Theorem 1.2 in [1] angeben.

Literatur

[1] Fr. Kasch, Projektive Frobenius-Erweiterungen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., (1960/1961), 89–109.

[2] K. Morita, A Theorem on Frobenius extensions (im Druck).

[3] T. Onodera, Über Kogeneratoren (im Druck).