BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1968

MÜNCHEN 1969

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die Gestalten der Kontinua vom schwachen Punktordnungswert Drei in topologisch projektiven Ebenen. II

Von **Otto Haupt** und **Hermann Künneth** in Erlangen

Vorgelegt am 6. Dezember 1968

Mit 17 Abbildungen

Einleitung

I. In einer *ersten Mitteilung* H.-K. [1][1] waren, nach Zusammenstellung einiger Hilfssätze (H.-K. [1], § 2) die „Gestalten" gewisser Kontinua C vom schwachen Punktordnungswert Drei, kurz schwPOW$(C; \mathfrak{k}) = 3$, in topologisch ebenen projektiven Ebenen E bezüglich der Systeme $\mathfrak{k}$ der verallgemeinerten Geraden, der sogenannten Ordnungscharakteristiken, kurz OCh, bestimmt worden (H.-K. [1], § 3); und zwar handelte es sich dabei zunächst um diejenigen *maximalen*, d. h. ordnungsfest nicht erweiterbaren, Kontinua C, welche entweder Verzweigungspunkte v, kurz VP v, der Verzweigungsordnung VO$(v) \geq 5$ und dann genau einen VP besitzen (vgl. H.-K. [1], 2.4., Satz, Zusatz) oder welche (mindestens also vgl. H.-K. [1], 2.5., Beh. (II), genau) vier VP besitzen. (schwPOW$(C; \mathfrak{k}) = 3$ bedeutet dabei: Es gibt eine in $\mathfrak{k}$ nirgends dichte Menge $\mathfrak{n}$ derart, daß für $K \in \mathfrak{k} \setminus \mathfrak{n}$ gilt: Die Mächtigkeit POW$(C \frown K)$ von $C \frown K$ besitzt das Maximum Drei, demgemäß ist schwPOW$(K; \mathfrak{k}) = 1$, nämlich in $\mathfrak{k} \setminus \{K\}$.[2] Der Begriff der Gestalt möge dabei definiert werden ähnlich wie für Bogen, vgl. H.-K. [2]. Nr. 3.2.8.4. (S. 98)).

II. In der vorliegenden *zweiten Mitteilung* werden alle noch übrigen Fälle von maximalen Kontinuen C mit schwPOW$(C; \mathfrak{k}) =$

---

[1] Verweis auf das Literaturverzeichnis am Ende der Note.

[2] Dabei ist $\mathfrak{k} \setminus \mathfrak{n} := \mathfrak{k} \frown C\mathfrak{n}$ usw.

$= 3$ erledigt, mit *Ausnahme der Bogen und Kurven.* Während aber die in der ersten Mitteilung behandelten Kontinua C sämtlich Vereinigungen von $\mathfrak{k}$-Strecken waren, deren beide Endpunkte Verzweigungspunkte von C sind oder einer der Endpunkte ein Verzweigungspunkt, der andere (freier) Endpunkt von C ist, können die jetzt betrachteten C auch Bogen B mit schwPOW$(B;\mathfrak{k}) = 2$ oder $= 3$ enthalten, die bis auf Endpunkte fremd sind zu den VP von C. Bemerkt sei hierzu: Jedes B mit schwPOW$(B;\mathfrak{k}) = 2$ ist $\mathfrak{k}$-konvex und umgekehrt (H.-K. [2], Nr. 3.1.5.3., Satz 4), während die B mit schwPOW$(B;\mathfrak{k}) = 3$ Vereinigungen von höchstens 4 $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen sind und höchstens 3 $\mathfrak{k}$-singuläre Punkte (Wendepunkte oder Schnäbel) besitzen (vgl. H.-K. [2], Nr. 3.2.4., 3.2.5., 3.2.6., 3.2.7., sowie H. [1]). Es sei hier darauf hingewiesen, daß (vgl. H.-K. [1], Nr. 3.1.3.) in einem (maximalen) Kontinuum vom schwPOW 3 mit (mindestens) einem VP kein Dorn auftreten kann.

Unter den Ergebnissen der Klassifikation unserer Kontinuen seien als neuartig gegenüber dem Fall der Bogen und Kurven genannt: Es gibt Kontinua C mit schwPOW$(C;\mathfrak{k}) = 3$ und vier Wendepunkten (bei Bogen und Kurven höchstens drei Wendepunkte), ferner Kontinua C mit Verzweigungspunkt, die drei Wendepunkte (und sogar den POW 3) besitzen (wohingegen Bogen und Kurven mit Verzweigungspunkt höchstens einen Wendepunkt besitzen). (Vgl. Figur 14.)

Anmerkung. Die in H.-K. [1], 3.2.3., Zusatz, gemachte Feststellung ist – für den Fall der gewöhnlichen projektiven Ebene – Spezialfall eines allgemeineren Satzes von Herrn D. Derry [1].

§ 1. Vorbemerkungen

1.0. Bezeichnungen. Ist $K \in \mathfrak{k}$, also K eine OCh, mit $x, y \in K$, so setzen wir: $K(x,y) := K$. Ist B ein (einfacher, abgeschlossener) Bogen mit den Endpunkten a und b, so setzen wir $B(a|b) := B$ und $\underset{\sim}{B} := B \setminus \{a\} \setminus \{b\} = \underset{\sim}{B}(a|b)$. Ist schwPOW$(B;\mathfrak{k}) = m \geq 2$, so heißt jede OCh mit POW$(B \frown M) = m$ eine Maximalsekante von B; dabei sind die Punkte von $\underset{\sim}{B} \frown M$

Schnittpunkte (vgl. H.-K. [2], Nr. 1.4.4.). Ist $B = B(a|b)$ mit schwPOW$(B; \mathfrak{k}) = m \geq 2$, so hat genau eine der beiden abgeschlossenen Teilbogen S von $K(a, b)$, die von a und b begrenzt werden, der sogen. $\mathfrak{k}$-Strecken S, die Eigenschaft, daß auch schwPOW$(B \cup S; \mathfrak{k}) = m$ ist (vgl. H.-K. [2], S. 335, Zeile 1 ff.). Man bezeichnet diese $\mathfrak{k}$-Strecke mit $S(B)$ und als die $\mathfrak{k}$-Schlußstrecke von B. Ist B' ein Bogen und $x' \in B'$ mit $p :=$ schwPOW$(x'; B'; \mathfrak{k})$ = min (schwPOW$(U; \mathfrak{k})$ für alle Umgebungen U von x' auf B'), so werde x' als $\mathfrak{k}$-singulär bezeichnet, falls $p \geq 3$ ist. Für $p = 3$ ist $x' \in \underset{\sim}{B}'$ und x' ein $\mathfrak{k}$-Wendepunkt oder ein $\mathfrak{k}$-Schnabel oder ein $\mathfrak{k}$-Dorn oder eine $\mathfrak{k}$-Dornspitze (vgl. H.-K. [2], Nr. 3.2.1. ff.). Für $p = 2$ heißt x' $\mathfrak{k}$-regulär.

Ist Q eine Menge in E und existiert eine OCh K_0 mit $\bar{Q} \cap K_0 = \theta$, so werde Q als $\mathfrak{k}$-beschränkt (in E) bezeichnet, genauer in $E_0 = E \setminus K_0$. In jedem E_0 kann man für jede OCh $K \neq K_0$ zwei $\mathfrak{k}$-Seiten unterscheiden, etwa $K(+)$ und $K(-)$ (vgl. H.-K. [2], Nr. 3.1.2., Folgerungen).

1.1. Vor. Es sei $B = B(a|b) \subset E_0$ mit schwPOW$(B; \mathfrak{k}) = 2$. Für die $\mathfrak{k}$-Tangenten T_a bzw. T_b in a bzw. in b an B (vgl. H.-K. [2], Nr. 3.1.6.) gelte $T_a \cap T_b = \{z\} \subset E \setminus K(a, b)$. (Dabei kann auch $B \subset T_a \cup T_b$, also B Vereinigung von zwei $\mathfrak{k}$-Strecken $T_a(a|z)$ und $T_b(b|z)$ sein).

Beh. Es gibt genau ein abgeschlossenes $\mathfrak{k}$-Dreieck $D' := D'(B)$ mit den Ecken a, b, z derart, daß eine $\mathfrak{k}$-Seite von D' gleich der Schlußstrecke $S = S(B)$ von B (vgl. 1.0.) und daß $(D' \setminus \{a\} \setminus \{b\} \setminus \{z\}) \cap B = \theta$. Dabei gilt: (1 **a**) Für jeden Punkt $x \in D = D' \setminus S$ und jede OCh K' mit $x \in K'$ enthält $B \cap K'$ höchstens einen Punkt, der verlängert sein kann, wenn $K' \subset T_a \cup T_b$. – (1 **b**) Zu jedem Punkt $y \in \complement D = E \setminus D = \complement(D' \setminus S)$ gibt es (mindestens) eine OCh K'' mit $y \in K''$ und mit POW$(B \cap K'') = 2$.

Zusatz. Falls schwPOW$(B; \mathfrak{k}) = 2$ und $T_a = K(a, b)$ oder (und) $T_b = K(a, b)$ ist, reduziert sich D' auf die Schlußstrecke $S(B)$ von B. Dabei ist POW$(\underset{\sim}{B} \cap K') = 1$ genau dann, wenn $\underset{\sim}{S}(B) \frown K' \neq 0$ und $S(B) \not\subset K'$ ist. Durch jeden Punkt $y \in K(a, b) \setminus \underset{\sim}{S}(B)$ geht (mindestens) eine OCh K'' mit $\mathrm{POW}(B \frown K'') = 2$.

Bew. Betr. T_a, T_b vgl. auch H.-K. [2], Nr. 3.1.6. – Betr. (1 **a**). Für jede OCh K' mit $D \frown K' \neq 0$ gibt es nur folgende Möglichkeiten: Entweder ist $\underset{\sim}{S} \frown K' \neq 0$, wobei $\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}(B)$, und dann $\mathrm{POW}(\underset{\sim}{B} \frown K') = 1$; oder es ist $\underset{\sim}{S} \frown K' = 0$ und dann entweder $S \frown K' = 0$ oder $(\{a\} \smile \{b\}) \frown K' \neq 0$, wobei im ersteren Falle $B \frown K' = 0$, im letzteren aber $B \frown K' = \{a\}$ oder $B \frown K' = \{b\}$, also $\mathrm{POW}(B \frown K') = 1$. – Betr. (1 **b**) Wegen der $\mathfrak{k}$-Konvexität von B geht durch jedes $y \in \complement(D')$ eine StützOCh an $\underset{\sim}{B}$ und durch jedes $y'' \in S(B)$ ein $K'' \in \mathfrak{k}$, nämlich $K'' = K(a, b)$, mit $\mathrm{POW}(B \frown K'') = \{a\} \smile \{b\}$. – Betr. Zusatz. Folgt entsprechend.

1.2. Es sei $B = \bar{B} = B(a, b)$ ein $\mathfrak{k}$-konvexer Bogen mit $\{z\} = T_a \frown T_b \not\subset K(a, b)$. Ferner sei $D = D(B)$ und $K_1 \in \mathfrak{k}$ mit $\underline{D} \frown K_1 \neq 0$ sowie mit $S(B) \frown K_1 = 0$, also $z \notin K_1$. Ist $\{t_a\} = K_1 \frown T_a$ und $\{t_b\} = K_1 \frown T_b$, so besitzt die zu $\underline{D}$ fremde, abgeschlossene $\mathfrak{k}$-Strecke $K_1(t_a | t_b) = : Q(K_1, D(B))$ die folgende Eigenschaft: Für jede $\mathfrak{k}$-Paratingente P an B und jede Maximalsekante M von B ist $P \frown Q(K_1, D(B)) \neq 0$ bzw. $M \frown Q(K_1, D(B)) \neq 0$. Überdies liegt jeder Punkt von $Q(K_1, D(B))$ auf genau einer $\mathfrak{k}$-Paratingente P an B sowie jeder Punkt von $\underset{\sim}{Q}(K_1, D(B))$ auf (mindestens) einer Maximalsekante M von B. Es ist $K(a, b) \frown K_1 \subset \underset{\sim}{Q}(K_1, D(B))$.

Bemerkung. Unter einer $\mathfrak{k}$-Paratingente P in x an (irgend) einen Bogen B werde jeder Limes einer Folge von OCh K_n verstanden, deren jede mit B (mindestens) zwei Punkte gemeinsam hat, die mit $n \to \infty$ gegen x konvergieren. Jede $\mathfrak{k}$-Paratingente ist eine OCh. Das System der StützOCh an B in x ist identisch mit dem System der $\mathfrak{k}$-Paratingenten in x an B, sofern $\mathrm{schwPOW}(B; \mathfrak{k}) = 2$; es sind dann T_a bzw. T_b die einzigen $\mathfrak{k}$-Paratingenten an B in a bzw. in b (vgl. H.-K. [2], Nr. 3.1.6., Satz 1 und Zusatz).

Bew. Durch die Punkte $x \in K_1 \setminus Q(K_1, D(B))$ gehen keine Maximalsekanten sowie, wenn von $x = t_a$ und von $x = t_b$ abgesehen wird, keine $\mathfrak{k}$-Paratingenten (gemäß 1.1., Beh. (1a)). Hingegen gehen (wegen $\underset{\sim}{Q}(K_1, D(B)) \subset \complement D'$ und gemäß 1.1., (1b)) durch jeden Punkt $x \in \underset{\sim}{Q}(K_1, D(B))$ mindestens eine Maximalsekante und genau eine $\mathfrak{k}$-Paratingente an B; für $x = t_a$ bzw. $x = t_b$ ist T_a bzw. T_b diese $\mathfrak{k}$-Paratingente.

1.2.1. Jede Maximalsekante von B ist fremd zu $\underset{\sim}{D}$ (Folgt aus 1.1., Beh. (1a)).

1.2.2. Ist eine $\mathfrak{k}$-Strecke $S := K(a|b) \subset K \in \mathfrak{k}$ gegeben und $K_1 \in \mathfrak{k}$ mit $S \frown K_1 = \theta$, so existieren $\mathfrak{k}$-konvexe Bogen $B' = B'(a|b)$ mit S als Schlußstrecke derart, daß $\underset{\sim}{Q}(K_1, D(B'))$ in einer beliebig kleinen Umgebung von $K(a, b) \frown K_1$ auf K_1 liegt. – Bew. Es genügt, daß die Tangenten T'_a, T'_b in a bzw. in b an B' hinreichend benachbart sind (in $\mathfrak{k}$) zu $K(a, b)$.

1.3. Vor. (1) Es sei $B = B(a|b)$ ein einfacher $\mathfrak{k}$-beschränkter Bogen mit $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 3$; dabei enthalte B genau einen $\mathfrak{k}$-singulären Punkt w und dieses w sei ein $\mathfrak{k}$-Wendepunkt. – (2) Es sei $K(a, b) \frown \underset{\sim}{B} = \theta$.

Beh. (1) Die lokal $\mathfrak{k}$-konvexen Teilbogen $B_a = B(a|w)$ und $B_b = B(w|b)$ von B sind (global) $\mathfrak{k}$-konvex (d. h. $\mathrm{POW}(B_a; \mathfrak{k}) = \mathrm{POW}(B_b; \mathfrak{k}) = 2$). – (2) Genügt sowohl B_a als B_b der Vor. in 1.1. (betr. T_a, T_w bzw. T_w, T_b) und ist $D_a = D(B_a)$ bzw. $D_b = D(B_b)$ (vgl. 1.1., Beh. (1a) betr. D_a, D_b) gesetzt, so ist K Maximalsekante höchstens dann, wenn $\underset{\sim}{D}_a \frown K = \theta$ oder $\underset{\sim}{D}_b \frown K = \theta$.

1. Anmerkung. Die in Beh. (2) gefundene Bedingung für Maximalsekanten K von B ist im allgemeinen nicht auch hinreichend, wie einfache Beispiele zeigen.

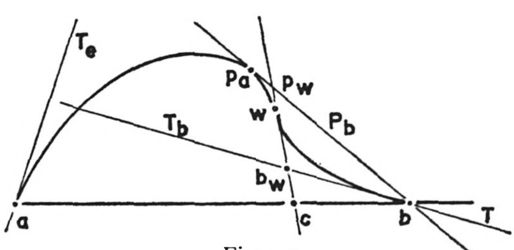
2. Anmerkung. Gemäß Vor. enthält B keine $\mathfrak{k}$-Strecken. Diese Vor. dient nur zur Vereinfachung der Beh. und der Beweise; es könnte auch $\mathrm{schwPOW}(B; \mathfrak{k}) = 3$ zugelassen werden, ebenso wie w als $\mathfrak{k}$-Schnabel (betr. der Begriffe $\mathfrak{k}$-Wendepunkt und $\mathfrak{k}$-Schnabel vgl. H.-K. [2], Nr. 3.2.2.).

Bew. *Betr. Beh.* (1). Da $\underset{\sim}{B}_a$ keinen $\mathfrak{k}$-singulären Punkt enthält, ist $\underset{\sim}{B}_a$ lokal $\mathfrak{k}$-konvex, d. h. jedes $x \in \underset{\sim}{B}_a$ besitzt auf $\underset{\sim}{B}_a$

eine $\mathfrak{k}$-konvexe Umgebung. Wäre $\underset{\sim}{B}_a$ nicht global $\mathfrak{k}$-konvex, so wäre B_a eine $\mathfrak{k}$-Spirale (oder $\mathfrak{k}$-Doppelspirale), was für einfache, der Vor. (2) genügende B nicht möglich ist (vgl. H.-K. [2], Nr. 3.2.5.1.–3.2.5.4.; auch 3.8.2., Zeile 1 ff.).

Betr. Beh. (2). Es sei K Maximalsekante von B mit $B \frown K = \{d_1\} \smile \{d_2\} \smile \{d_3\}$. Gemäß Vor. (1) und (2) ist $\mathfrak{k}$ normal zu B, d. h. bei gegebener Orientierung von B kann K so orientiert werden, daß d_1, d_2, d_3 in dieser Reihenfolge auf K aufeinanderfolgen, wenn dies auf B der Fall ist. (In der Tat: Wäre B nicht normal, so existierte eine Maximalsekante M mit $\underset{\sim}{B} \frown M = \{1\} \smile \{2\} \smile \{3\}$, wobei die Reihenfolge der 1, 2, 3 auf B bzw. M diese ist: 1, 2, 3 bzw. 1, 3, 2. Dann liegt aber ein Endpunkt, etwa b, von B im Innern des von $M(1 \mid 3 \mid 2) \smile B(1 \mid 2)$ begrenzten Gebiet, im Widerspruch zur Vor. (2).). Es sei also d_1, d_2, d_3 diese Reihenfolge; dann liegt w zwischen d_1 und d_3 auf B. Ist $d_2 = w$, d. h. ist $w \in K$, so ist $\mathrm{POW}(B_a \frown K) = \mathrm{POW}(B_b \frown K) = 2$; wegen 1.2.1. gilt $K \subset \complement D_a \frown \complement D_b$. – Ist aber $w \notin K$, also $w \neq d_2$ und ist etwa $w \in \underset{\sim}{B}(d_1 \mid d_2)$, so ist $d_2, d_3 \in B_b$, also $K \subset \complement D_b$ (gemäß 1.2.1.). Entsprechend ergibt sich $K \subset \complement D_a$, wenn $w \in \underset{\sim}{B}(d_2 \mid d_3)$.

1.3.1. Vor. (1) Es sei $B = \bar{B} = B(a \mid b)$ ein einfacher, $\mathfrak{k}$-beschränkter Bogen vom $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 3$. – (2) Es besitze B genau einen $\mathfrak{k}$-singulären Punkt w und dieser sei $\mathfrak{k}$-Wendepunkt auf B (es ist $w \in \underset{\sim}{B}$). Dabei liege weder a noch b auf der $\mathfrak{k}$-Wendetangente W von B (in w). – (3) Es sei $\underset{\sim}{B} \frown K(a, b) = \theta$ und folglich $B_a = B(a \mid w)$ sowie $B_b = B(w \mid b)$ $\mathfrak{k}$-konvex (gemäß 1.3.). Ferner sei $K(a, b) \neq T_a$ und $K(a, b) \neq T_b$, wobei T_a bzw. T_b $\mathfrak{k}$-Tangente an B in a bzw. in b ist. Auch sei $B_a \frown T_b \neq \theta$ und $B_b \frown T_a = \theta$ (Figur 1).



Figur 1

Beh. (I) Ist $S(B) = \overline{S(B)}$ die $\mathfrak{k}$-Schlußstrecke von B (vgl. 1.0.), also $C_3 = B \cup S(B)$ eine einfache (nicht $\mathfrak{k}$-beschränkte) Kurve mit schwPOW$(C_3; \mathfrak{k}) = 3$, so ist eines der a, b, etwa a $\mathfrak{k}$-singulär auf C_3 und dann b $\mathfrak{k}$-regulär auf C_3 (also schwPOW$(a; C_3; \mathfrak{k}) = 3$ und schwPOW$(b; C_3; \mathfrak{k}) = 2$). – (II) Es sei $\{c\} := K(a, b) \cap W$ und $S' := K(a, b) \setminus \underset{\sim}{S}(B)$ gesetzt; dann ist $c \in \underset{\sim}{S}'$. Wird weiter mit $K(b|c) = \bar{K}(b|c)$ die in S' enthaltene (zu a fremde) $\mathfrak{k}$-Strecke bezeichnet, so gilt $K(a, b) \cap M = (K(b|c) \setminus \{c\}) \cap M$ für jede Maximalsekante M von B; und durch jeden Punkt von $K(b|c) \setminus \{c\}$ gehen solche Maximalsekanten M.

Bew. *Betr. Beh.* (I). Gemäß Vor. (1) existiert ein $K_0 \in \mathfrak{k}$ mit $B \cap K_0 = \theta$; es ist dann $\underset{\sim}{S}(B) \cap K_0 \neq \theta$. Die beiden $\mathfrak{k}$-beschränkten Teilbogen $B_a = B(a|w)$, $B_b = B(w|b)$ von B sind $\mathfrak{k}$-konvex (vgl. 1.3.) und liegen (gemäß Vor. (2)) auf verschiedenen Seiten von W (in $E = E \setminus K_0$), abgesehen von w; somit liegen a und b auf verschiedenen Seiten von W. Für $S' = K(a,b) \setminus \underset{\sim}{S}(B)$ existiert daher $\underset{\sim}{S}' \cap W = \{c\}$ (wobei $S' \subset E_0$). Weil B_a und B_b $\mathfrak{k}$-konvex sind, ist $\underset{\sim}{B}_a \cap K(a, w) = \theta = \underset{\sim}{B}_b \cap K(w, b)$. Folglich ist etwa die $\mathfrak{k}$-beschränkte Kurve $C_a = B_a \cup W(w|c) \cup K(a|c)$ $\mathfrak{k}$-konvex, nicht aber dann $C_b = B_b \cup W(w|c) \cup K(c|b)$; dabei ist $K(a|c) \cup K(c|b) = S' \subset E_0$ und $W(w|c) \subset E_0$. In der Tat: Es sei J das Innere der $\mathfrak{k}$-beschränkten Kurve $C = B \cup S'$. Eine einseitige Umgebung U von c auf $W \setminus \{c\}$ liegt in J, also, da J $\mathfrak{k}$-beschränkt, $U \subset W(w|c)$ und folglich $\underset{\sim}{W}(w|c) \subset J$. Es liegt aber $W(w|c)$ auf der $\mathfrak{k}$-Halbtangente in w entweder an C_a oder an C_b, etwa an C_b. Damit ist $K(w|b) \subset E_0 \setminus J$ und die $\mathfrak{k}$-Halbtangente an B_b in b trifft $W(w|c) \setminus \{w\}$, wobei $\underset{\sim}{B}_b$ und $K(b|c) \subset E_0$ nicht auf der gleichen Seite dieser $\mathfrak{k}$-Halbtangente liegen, falls nicht $K(a, b)$ $\mathfrak{k}$-Tangente an B in b ist. Mithin ist b $\mathfrak{k}$-singulär auf C, also $\mathfrak{k}$-regulär auf C_3. Andererseits ist $\underset{\sim}{K}(a|w) \subset J$ und schwPOW$(C_a; \mathfrak{k}) = 2$. In der Tat: Es sei H'_a, H'_w das Komplement der Halbtangente an B_a in a bzw. in w. Dann ist das ($\mathfrak{k}$-beschränkte) Gebiet G', dessen Begrenzung R in $H'_a \cup B_a \cup H'_w$ enthalten ist, $\mathfrak{k}$-konvex; denn für jede OCh K mit POW$(R \cap K) \geq 2$ ist $R \cap K$ entweder eine $\mathfrak{k}$-Strecke oder es ist $R \cap K = B_a \cap K$

oder $R \frown K = (H'_a \smile H'_w) \frown K$ oder es ist $B_a \frown K \neq \theta$ und $H'_a \frown K \neq \theta$ bzw. $H'_w \frown K \neq \theta$. Das von C_a begrenzte, $\mathfrak{k}$-beschränkte Gebiet ist aber (weil $c \in H'_w$, also $W(c|w) \subset H'_w$ und R $\mathfrak{k}$-konvex ist) Durchschnitt von G' mit einer von $K(a, b)$ begrenzten $\mathfrak{k}$-Halbebene in E_0, also $\mathfrak{k}$-konvex, woraus die $\mathfrak{k}$-Konvexität seiner Begrenzung, d. h. die $\mathfrak{k}$-Konvexität von C_a folgt. Daher ist a $\mathfrak{k}$-regulär auf C, also $\mathfrak{k}$-singulär auf C_3. – Zugleich ist oben der erste Teil der Beh. (II) bewiesen.

Betr. Beh. (II). Wird B_b von M in zwei Punkten getroffen, dann ist $\theta \neq M \frown K(b|c)$ und $\theta \neq M \frown W(w|c)$; ist aber $M \frown B_b$ einpunktig, dann auch $M \frown K(b|w)$, also entweder $M \frown$ $\frown K(b|c) \neq \theta$ oder $M \frown W(w|c) \neq \theta$, wobei letzteres unmöglich ist, weil M Maximalsekante von B sein soll. Jede Maximalsekante M von B trifft daher $K(b|c) \setminus \{c\}$, so daß M fremd ist entweder zu $K(a|w)$ oder zu $K(w|b)$. Daß durch jedes $x \in$ $\in K'(b|c) := K(b|c) \setminus \{c\}$ ein M geht, kann man so sehen: Man gehe von der $\mathfrak{k}$-Wendetangente W an B (in w) aus und beachte, daß jede OCh K mit $w \in K$ und mit $K'(b|c) \frown K \neq \theta$ Maximalsekante, also ein M, ist.

1.3.2. Vor. Es seien für $B = B(a|b)$ mit $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 3$ die Voraussetzungen wie in 1.3.1. erfüllt. Es sei b $\mathfrak{k}$-regulär auf $C_3 = B \smile S(B)$ und a $\mathfrak{k}$-singulär auf C_3. Weiter sei $K_1 \in \mathfrak{k}$ gegeben mit $(B \setminus \{a\}) \frown K_1 = \theta$ und $\{s\} = S(B) \frown K_1$; es kann also $s = a$ sein (aber es ist $s \neq b$) und es ist K_1 verschieden von der $\mathfrak{k}$-Tangente T_b bzw. W an B in b bzw. in $w \in \underset{\sim}{B}$ (W Wendetangente). Schließlich sei noch Δ das offene, von T_b und W begrenzte, eine Umgebung von w auf $\underset{\sim}{B}(a|w)$ enthaltende Dieder (in E).

Beh. Die in Δ enthaltene $\mathfrak{k}$-Strecke $\underset{\sim}{K}_1(b'|w') = K_1 \frown \Delta$ ist gleich der Menge der Durchschnitte der Maximalsekanten M von B mit K_1; dabei ist $\{b'\} = T_b \frown K_1$, $\{w'\} = W \frown K_1$. Anders gesagt: Durch jedes $x \in \underset{\sim}{K}_1(b'|w')$ gehen M und jedes M trifft $\underset{\sim}{K}_1(b'|w')$.

Zusatz. Bei jeder Erweiterung B^* von $B(a|b)$ über b hinaus mit $\mathrm{POW}(B^*; \mathfrak{k}) = 3$ wird Δ, also auch $K_1 \frown \Delta = \underset{\sim}{K}_1(b'|w')$ größer.

Bew. Es sei P_b die durch b gehende Stütz-OCh an $\underset{\sim}{B}(a|w)$. Es sei $\{p_a\} = \underset{\sim}{B}(a|w) \frown P_b$ der Stützpunkt von P_b mit $\underset{\sim}{B}(a|w)$, ferner $\{p_w\} = W \frown P_b$ und $\{b_w\} = W \frown T_b$. Dann gilt

(F) Für jede Maximalsekante M von B ist

$$(T_b(b|b_w) \setminus \{b_w\}) \frown M \neq \theta \text{ und } \underset{\sim}{W}(b_w|p_w) \frown M \neq \theta.$$

In der Tat: Zunächst ist $(K(c|b) \setminus \{c\}) \frown M \neq \theta$ und $\underset{\sim}{W}(b_w|p_w) \frown \frown M \neq \theta$. Und da $T_b(b|b_w)$ im Innern des $\underset{\sim}{B}(b|w)$ enthaltenden $\mathfrak{k}$-Dreiecks $D(b, c, p_w)$ liegt, folgt $(T_b(b|b_w) \setminus \{b_w\}) \frown M \neq \theta$ und damit (F). – Nun sei H die abgeschlossene Hülle des, von $B(a|p_a) \smile P_b(p_a|b) \smile K(b|c|a)$ begrenzten, $\underset{\sim}{B}(w|b)$ enthaltenden, $\mathfrak{k}$-konvexen Gebietes; dabei ist $(P_b(p_w|b) \setminus \{b\}) \frown M = \theta$. Nach den bezüglich K_1 gemachten Voraussetzungen ist $(H \setminus \{a\}) \frown K_1 = \theta$, insbesondere ist also $D(b, b_w, p_w) \subset D(b, c, p_w)$ fremd zu K_1. Durch jeden Punkt von Δ geht ein M und es ist $M \setminus D(b, b_w, p_w) \frown M \subset \Delta$. In der Tat: Es sei Δ' das offene, von $T_b \smile K(b|w)$ begrenzte, $\underset{\sim}{B}_b$ enthaltende Dieder. Dann wird $\Delta \frown \Delta'$ bzw. $\Delta \setminus \Delta'$ überdeckt von denjenigen M, für die $b \in M$ bzw. $w \in M$ ist. Daraus folgt die Beh.

1.3.3. Zu gegebenem $K(a|b) \subset E_0$, beliebigem $c \in \underset{\sim}{K}(a|b)$ und $K_1 \in \mathfrak{k}$ mit $K(a,b) \frown K_1 = \{s\}$, wobei $s \notin \underset{\sim}{K}(a|b) \smile \{b\}$, gibt es $B = B(a|b) \subset E_0$, welche die Vor. von 1.3.2. erfüllen und für die die in 1.3.2. erwähnte $\mathfrak{k}$-Strecke $\underset{\sim}{K}_1(b'|w')$ fremd ist zu s sowie beliebig benachbart zu s auf K_1. Zugleich läßt sich B so wählen, daß die Schnittpunkte von K_1 mit den 2-Sekanten von B, d. h. denjenigen OCh, die mit B zwei Punkte gemeinsam haben, eine beliebig kleine Umgebung von s auf K_1 erfüllen.

1.4. Es sei jetzt $B = B(a|b) \subset E_0$ mit $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 3$, mit $\underset{\sim}{B} \frown K(a, b) = \theta$ und mit genau zwei $\mathfrak{k}$-singulären Punkten, die beide $\mathfrak{k}$-Wendepunkte seien. Außerdem sei $\underset{\sim}{B} \frown T_a \neq \theta$ und $\underset{\sim}{B} \frown T_b \neq \theta$, also $T_a \neq K(a, b)$ und $T_b \neq K(a, b)$. Nun sei $K_1 \in \mathfrak{k}$ mit $K_1 \frown \underset{\sim}{S}(B) = \{s\}$, so daß $\{a'\} = T_a \frown K_1$, $\{b'\} = T_b \frown K_1$ mit $s \neq a' \neq b' \neq s$. Sind W' bzw. W'' die $\mathfrak{k}$-Wendetangenten von B, wobei weder a noch b auf W' und auf W'' liegen, ist ferner $\{w'\} = W' \frown K_1$, $\{w''\} = W'' \frown K_1$, so sind die Punkte der zu s fremden $\mathfrak{k}$-Strecken $\underset{\sim}{K}_1(a'|w')$ und $\underset{\sim}{K}_1(b'|w'')$ bei geeigneter Bezeichnung von W', W'' (wenn nämlich W' dem am nächsten bei a gelegenen der beiden $\mathfrak{k}$-Wendepunkte entspricht) genau diejenigen, in denen K_1 von den Maximalsekanten von B getroffen wird. Es wird s auf K_1 durch a' und b' getrennt von w' und w''.

Bew. Entsprechend wie in 1.3.1. und 1.3.2.

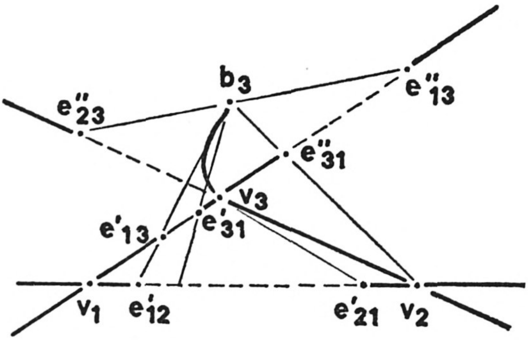
Zusatz. Ein Bogen $B = B(a|b)$ mit POW $(B; \mathfrak{k}) = 3$ besitzt höchstens 3 Wendepunkte. Sind 3 Wendepunkte vorhanden, so ist $\underset{\sim}{B} \cap K(a, b) \neq 0$.

§ 2. Maximale Kontinua C vom schwPOW $(C; \mathfrak{k}) = 3$ mit genau drei Verzweigungspunkten (VP), die nicht auf der gleichen OCh liegen

2.0. Bezeichnungen. Da die VP v_i, $i = 1, 2, 3$, nicht auf einer OCh liegen, sind sie Ecken von 4 (abgeschlossenen) $\mathfrak{k}$-Dreiecken D_r, $r = 0, 1, 2, 3, 4$, in E. Die 3 $\mathfrak{k}$-Seiten von D_0 seien mit S_i bezeichnet, wobei S_i fremd zu v_i sein soll, also v_i dem S_i in D_0 „gegenüberliegt". Mit D_i sei dasjenige $\mathfrak{k}$-Dreieck bezeichnet, dessen eine Seite S_i ist ($D_i \neq D_0$). Für $i, j, m = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq m \neq i$ sei $K_{ij} = K_{ji} = K(v_i, v_j) \in \mathfrak{k}$, $T'_{ij} = K_{ij}(v_i | e'_{ij}) \subset S_m$ und $T''_{ij} = K_{ij}(v_i | e''_{ij}) \subset K_{ij} \setminus \underset{\sim}{S}_m = S^c_m$, so daß also $T'_{ij} \cup T''_{ij} \subset K_{ij}$. Schließlich werde unter $B^q_i = B^q_i(v_i | b_i)$, $q, i = 1, 2, 3$, ein Bogen mit den Endpunkten v_i und b_i sowie mit schwPOW$(B^q_i; \mathfrak{k}) = q$ verstanden; speziell für $q = 1$ ist also B^1_i eine $\mathfrak{k}$-Strecke (d. h. Teilbogen einer OCh). *Bei den nachstehenden Konstruktionen ist stets $\underset{\sim}{B}^q_i \cup \{b_i\} \subset \underset{\sim}{D}_i$ zu wählen.* Man beachte dabei, daß gemäß H.-K. [1], 3.1.3., kein B^q_i einen Dorn enthalten kann.

Mit diesen Bezeichnungen lassen sich die Gestalten der (in diesem und den folgenden §§) zu besprechenden Kontinua C beschreiben, z. B. beschreibt $C = T'_{12} \cup T'_{21} \cup S^c_3 \cup S_1 \cup S_2 \cup \cup T''_{13} \cup T''_{23} \cup B^2_3(v_3 | b_3)$ das in der Figur 2 veranschaulichte Kontinuum.

Hinweis. Es sei Q Vereinigung von endlich vielen $\mathfrak{k}$-Strecken und endlich vielen $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen B, ferner besitze Q nur end-



Figur 2

lich viele Verzweigungspunkte (von je endlicher VO). Dann ist das System $\mathfrak{m}$ derjenigen OCh, welche $\mathfrak{k}$-Strecken, Verzweigungspunkte von Q oder Endpunkte der B enthalten oder welche $\mathfrak{k}$-Paratingenten (d. h. lokale StützOCh), insbesondere auch in den Ecken der B, sind, nirgends dicht in $\mathfrak{k}$. Bei der Untersuchung, ob schwPOW$(Q; \mathfrak{k}) = 3$ sei, kann und soll daher $\mathfrak{m}$ im folgenden außer Betracht bleiben.

Gemäß H.-K. [1], Nr. 3.2.1. und 3.2.2. ist $3 \leq \mathrm{VO}(v_i) \leq 4$ für alle $i = 1, 2, 3$.

2.1. Alle drei VP besitzen die VO Vier.

Gemäß H.-K. [1]. 2.4., Beh. (2), (3), münden in jedem der v_i genau zwei in K_{ij} enthaltene $\mathfrak{k}$-Strecken; $j, i = 1, 2, 3$; $j \neq i$. Es gibt daher genau ein maximales C, nämlich $C = K_{12} \cup K_{23} \cup K_{31}$.

2.2. Genau zwei der v_i besitzen die VO Vier; es sei etwa $\mathrm{VO}(v_1) = \mathrm{VO}(v_2) = 4$ und $\mathrm{VO}(v_3) = 3$.

(1) *In* v_3 *wird ein* $B^1 = B^1_3 = B(v_3 | b_3) \subset D_3$ *an* D_0 *angefügt.* Man erhält C durch die folgende

Konstruktion $\boldsymbol{K}$ (I). Man wähle B^1, T''_{13} und T''_{23} im Rahmen der nachstehenden Bedingungen: $K(e''_{13}, e''_{23}) \frown B^1 \neq \theta$ und $\{e''_{12}\} = K(e''_{13}, b_3) \frown \underset{\sim}{S}^c_3$, $\{e''_{21}\} = K(e''_{23}, b_3) \frown \underset{\sim}{S}^c_3$. Falls e''_{13}, b_3, e''_{23} auf einer OCh liegen, tritt K_{12} an Stelle von $S_3 \cup \cup T''_{12} \cup T''_{21}$ (wegen $e''_{12} = e''_{21}$).

Diese Konstruktion $\boldsymbol{K}$(I) ergibt

$$C = B_3^1 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup T_{13}'' \cup T_{23}'' \cup X,$$
$$\text{wobei } X = T_{12}'' \cup T_{21}'' \text{ bzw. } X = S_3^c.$$

(2) *In* v_3 *wird ein* $B^2 = B_3^2 = B(v_3 | b_3)$ *angefügt.* Man erhält C durch die

Konstruktion $\boldsymbol{K}$(II). Man wähle B^2, T_{13}'', T_{23}'' unter den bei $\boldsymbol{K}$(I) genannten Bedingungen. Für die $\mathfrak{k}$-Tangenten T_v und T_b an B^2 in v_3 bzw. in b_3 gilt dabei: $\{c'\} = T_v \frown \underset{\sim}{S}_3 \neq 0$, $\{d'\} = T_b \frown \underset{\sim}{S}_3 \neq 0$ und es wird $c' = e_{12}'$, $d' = e_{21}'$ gesetzt, wenn c' auf S_3 durch d' von v_2 getrennt wird, sonst $d' = e_{12}'$, $c' = e_{21}'$. – Gemäß dieser Konstruktion $\boldsymbol{K}$(II) ist

$$C = B_3^2 \cup S_1 \cup S_2 \cup T_{12}' \cup T_{21}' \cup T_{13}'' \cup T_{23}'' \cup X,$$
$$\text{wobei } X = T_{12}'' \cup T_{21}'' \text{ bzw. } X = S_3^c,$$

falls $e_{12}'' \neq e_{21}''$ bzw. $e_{12}'' = e_{21}''$.

(3) *In* v_3 *wird ein* $B^3 = B_3^3 = B(v_3 | b_3)$ *angefügt.* Man erhält C durch die

Konstruktion $\boldsymbol{K}$(III). Es wird $\underset{\sim}{B}^3 \frown K(v_3 | b_3) = 0$ gewählt, ferner $\underset{\sim}{B}^3 \frown T_b \neq 0$ und $\underset{\sim}{B}^3 \frown T_v = 0$. Die Schnittpunkte der 2-Sekanten bzw. der Maximalsekanten von B^3 mit K_{12}, K_{31}, K_{23} bilden je eine offene $\mathfrak{k}$-Strecke. Keine der abgeschlossenen Hüllen dieser $\mathfrak{k}$-Strecken, soweit die offenen $\mathfrak{k}$-Strekken im weiteren Verlaufe dieser Konstruktion $\boldsymbol{K}$(III) aus den K_{12}, K_{31}, K_{23} entfernt werden, darf v_1 oder v_2 oder v_3 enthalten. Des Näheren gilt:

Die Schnittpunkte der 2-*Sekanten* von B^3 bilden *Erstens* mit K_{12} eine $\mathfrak{k}$-Strecke Z_{12} mit $\bar{Z}_{12} \subset \underset{\sim}{S}_3$; *Zweitens* mit K_{31} eine $\mathfrak{k}$-Strecke $Z_{31} \subset \underset{\sim}{S}_2$ mit v_3 als Endpunkt, welche $\mathfrak{k}$-Strecke bei der Konstruktion erhalten bleibt (nicht entfernt wird); *Drittens* mit K_{23} eine $\mathfrak{k}$-Strecke $Z_{23} \subset S_1^c$ mit v_3 als Endpunkt (hierin könnte man K_{31} mit K_{23} vertauschen; doch führte dies auf ein nicht wesentlich verschiedenes C).

Die Schnittpunkte der *Maximalsekanten* von B_3^3 bilden *Erstens* mit K_{12} eine $\mathfrak{k}$-Strecke M_{12} mit $\bar{M}_{12} \subset \underset{\sim}{S}_3$; *Zweitens* mit K_{31} eine

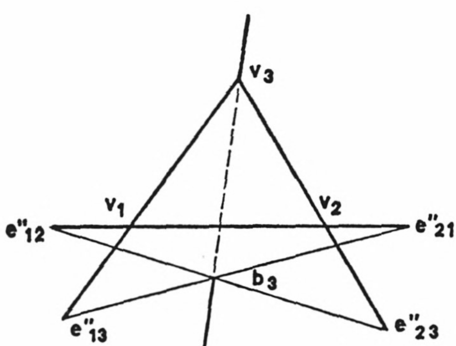
$\mathfrak{k}$-Strecke M_{13} mit $\bar{M}_{13} \subset \underset{\sim}{S}_2$; *Drittens* mit K_{23} eine $\mathfrak{k}$-Strecke M_{23} mit $\bar{M}_{23} \subset \underset{\sim}{S}_1^c$ (wobei wieder die Wahl von K_{23} statt K_{31} keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet).

Zunächst wird die kleinste, offene $Z_{12} \cup M_{12}$ enthaltende $\mathfrak{k}$-Strecke aus $\underset{\sim}{S}_3$ entfernt; ihre Endpunkte liefern e'_{12}, e'_{21} (denn gemäß 1.2. ist $\{e'_{12}\} = W \cap K_{12}$, $\{e'_{21}\} = T_v \cap K_{12}$). Ferner werden e'_{13}, e'_{31} durch die Endpunkte von M_{13} geliefert (gemäß 1.3.2 ist nämlich $\{e'_{13}\} = W \cap K_{13}$ und $\{e'_{31}\} = T_b \cap K_{13}$). Weiter ist T''_{23} fremd zu $\underset{\sim}{Z}_{23}$ zu wählen. Im Rahmen dieser Bedingungen und unter Rücksicht auf die Forderung, daß C maximal sei, ist dann den e''_{13}, e''_{23} die Einschränkung aufzuerlegen, daß $\underset{\sim}{B}_3^3 \cap K(e''_{13}, e''_{23}) = \theta$ sei. Entsprechend dieser Konstruktion $\boldsymbol{K}$(III) ist dann (vgl. 2.0., Figur 2).

$$C = B_3^3 \cup S_1 \cup T'_{12} \cup T'_{21} \cup T'_{13} \cup T'_{31} \cup T''_{13} \cup T''_{23} \cup S_3^c.$$

Bew. *Begründung von* $\boldsymbol{K}$(I)–$\boldsymbol{K}$(III). Daß $\boldsymbol{K}$(I)–$\boldsymbol{K}$(III) zu Kontinuen C der gewünschten Art führen, die maximal sind, ist einsichtig. – Zu zeigen ist, daß durch $\boldsymbol{K}$(I)–$\boldsymbol{K}$(III) alle Möglichkeiten erschöpft werden. In der Tat:

Vorbemerkung. Jedenfalls muß C (gemäß H.-K. [1], 2.4., Satz) Umgebungen von v_1 bzw. von v_2 auf K_{12} und auf K_{13} bzw. auf K_{12} und auf K_{23} enthalten sowie eine (einseitige) Umgebung von v_3 auf S_2 und auf S_1. Daher kann nur in v_3 ein B_3^q angefügt werden (und es muß ein derartiges B_3^q bis auf v_3 in $\underset{\sim}{D}_3$ liegen, wie aus H.-K. [1], 2.4., Beh. (3) und (4), folgt; vgl. die Festsetzung



Figur 3

in 2.0. (am Ende der „Bezeichnungen"). Kein B_3^q kann eine Kurve enthalten oder einen Verzweigungspunkt besitzen, weil andernfalls schwPOW$(C;\mathfrak{k}) \geq 4$ wird.

In Fall $q = 1$, d. h. bei $\boldsymbol{K}$(I), ist $K(e''_{12}|e''_{21}) \subset \underset{\sim}{S}{}_3^c$ (bis auf e''_{12}, e''_{21}) aus K_{12} herauszuschneiden, weil sonst schwPOW$(C;\mathfrak{k}) \geq$ ≥ 4 ist. (Vgl. Figur 3).

Im Fall $q = 2$, d. h. bei $\boldsymbol{K}$(II), ist jedenfalls $\underset{\sim}{S}_3 \frown T_v \neq \theta$ (wenn T_v die $\mathfrak{k}$-Tangente an B_3^2 in v_3 bezeichnet, vgl. $\boldsymbol{K}$(II)). Nun bilden die $\mathfrak{k}$-Paratingenten an B_3^2 ein Kontinuum (in $\mathfrak{k}$), ihre Schnittpunkte mit K_{12}, K_{23} und K_{31} erfüllen also je eine $\mathfrak{k}$-Strecke R_{12} bzw. R_{23} bzw. R_{31} (vgl. 1.2.); und es geht durch jeden Punkt von $\underset{\sim}{R}_{12}$ usw. (durch welchen eine $\mathfrak{k}$-Paratingente geht) auch eine Maximalsekante (2-Sekante) von B_3^2; und umgekehrt. Es ist v_3 Endpunkt von R_{23} und von R_{31}; und zwar liegt eine Umgebung U_{23} bzw. U_{31} von v_3 auf R_{23} bzw. R_{31} in S_1^c bzw. in S_2 (gemäß 1.2.). Da aber U_{23} nicht zu C gehört, wohl aber U_{31} (vgl. oben Bew., Vorbemerkung), kann R_{12} in Rücksicht auf schwPOW$(C;\mathfrak{k}) = 3$ nicht zu C gehören und muß daher, weil eine Umgebung von v_1 auf K_{12} zu C gehört, fremd sein zu v_1, d. h. $\bar{R}_{12} \subset \underset{\sim}{S}_3$. Wieder wegen schwPOW$(C;\mathfrak{k}) = 3$ ergibt sich die Konstruktion von T''_{12}, T''_{21}.

Im Fall $q = 3$, also bei $\boldsymbol{K}$(III), muß $\underset{\sim}{B} \frown K(v_3|b_3) = \theta$ sein, wobei $B = B_3^3 = B(v_3|b_3)$; denn sonst geht durch jeden Punkt einer einseitigen Umgebung von v_3 auf S_1 oder auf S_2 eine Maximalsekante von B, so daß eine solche Umgebung nicht zu C gehören kann, im Widerspruch damit, daß sie zu C gehört (vgl. Vorbemerkung). Insbesondere enthält also B höchstens 2 Wendepunkte (vgl. 1.4.) und zwar sogar nur einen: sind nämlich w', w'' $\mathfrak{k}$-Wendepunkte von B mit den zugehörigen $\mathfrak{k}$-Wendetangenten W', W'', so gibt es eine Umgebung U von v_3 auf $\underset{\sim}{S}_2$ (oder auf $\underset{\sim}{S}_1$), durch deren sämtliche Punkte Maximalsekanten M von B gehen, so daß U nicht zu C gehören könnte, im Widerspruch zur Vorbemerkung. Daraus folgt zugleich, daß die $\mathfrak{k}$-Tangente T_v an B in v_3 fremd zu $\underset{\sim}{B}$ ist, weil andernfalls wieder ein $U \subset \underset{\sim}{S}_2$ (oder $U \subset \underset{\sim}{S}_1$) von v_3 existiert, durch dessen sämtliche Punkte Maximalsekanten M gehen. Weil $\underset{\sim}{B} \subset D_3$ und B in der Umgebung von v_3 $\mathfrak{k}$-konvex ist, gilt $\underset{\sim}{S}_3 \frown T_v \neq \theta$, also $\bar{Z}_{12} \subset \underset{\sim}{S}_3$ (vgl. $\boldsymbol{K}$(III)). Ferner gehen durch jeden Punkt einer Umgebung U von v_3 auf S_2 (oder auf S_1) 2-Sekanten von B. Nach obigem gehört aber U zu C. Daher ist $\underset{\sim}{Z}_{12}$ aus $\underset{\sim}{S}_3$ herauszuschneiden. Weiter ergeben sich durch Schnittpunkte mit den Maximalsekanten die zu entfernenden $\mathfrak{k}$-Strecken M_{12} bzw. M_{13} in $\underset{\sim}{S}_3$ bzw. in $\underset{\sim}{S}_2$ sowie $M_{23} \subset \underset{\sim}{S}_1^c$ (vgl. 1.3.2., wo gezeigt ist, daß die M_{12} usw. $\mathfrak{k}$-Strecken sind). Daraus folgt die weitere Konstruktion insbesondere die der e'_{12}, e'_{21}, e'_{13}, e'_{31}. Schließlich ist bei $M_{12} \subset \underset{\sim}{S}_3$, $M_{31} \subset \underset{\sim}{S}_2$ die Bedingung $\underset{\sim}{B} \frown K(e''_{13}, e''_{23}) = \theta$ deshalb erforderlich, weil andernfalls eine $\mathfrak{k}$-Strecke aus $\underset{\sim}{S}_3^c$ zu entfernen wäre, um $\text{schwPOW}(C; \mathfrak{k}) \geq 4$ zu vermeiden (vgl. oben den Fall $q = 1$); dann wäre aber C nicht mehr zusammenhängend (weil $\mathfrak{k}$-Strecken sowohl aus $\underset{\sim}{S}_3$ als aus $\underset{\sim}{S}_2$ herauszuschneiden sind).

2.2.1. Hinweis auf die Darstellung in 2.3.ff.

Im gegenwärtigen § 2 haben wir die einzelnen Fälle, nämlich $\text{VO}(v_1) = \text{VO}(v_2) = 4$, $\text{VO}(v_3) = 4$ oder $= 3$ sehr ausführlich behandelt, um uns in 2.3. und den folgenden §§ an verschiedenen Stellen kürzer fassen, d. h. uns mit Bezugnahme auf die Konstruktionen $\boldsymbol{K}$ (I)–$\boldsymbol{K}$ (III) begnügen zu können.

2.3. Genau einer der VP v_i besitzt die VO Vier; es sei etwa $\text{VO}(v_1) = 4$, $\text{VO}(v_2) = \text{VO}(v_3) = 3$.

Bemerkung. Als „maximal" war (vgl. H.-K. [1], 3.2.) ein Kontinuum C mit $\text{schwPOW}(C; \mathfrak{k}) = 3$ bezeichnet worden, das nicht ordnungsfest erweiterbar, d. h. das nicht echter Teil eines C' mit $\text{schwPOW}(C'; \mathfrak{k}) = 3$ ist. Dieser Definition gemäß liefert die hier naheliegende Figur, nämlich $C = K_{12} \smile K_{31} \smile S_1$, kein maximales Kontinuum; denn diese Figur ist enthalten in $C' = K_{12} \smile K_{23} \smile K_{31}$ (wobei C' allerdings nur VP mit der VO Vier aufweist).

Um die maximalen C mit $\text{VO}(v_1) = 4$, $\text{VO}(v_2) = \text{VO}(v_3) = 3$ und $\text{schwPOW}(C; \mathfrak{k}) = 3$ zu überblicken, unterscheiden wir:

2.3.1. Es wird angefügt (an D_0) nur *ein* B_i^q (Fall (A)) (also in nur einem der v_2, v_3) oder (Fall (B)) zwei B_i^q (also sowohl in v_2 als in v_3).

2.3.1.1. Fall (A). Es genügt B^q in v_3 anzufügen:

Betr. $q = 1$. Es müssen e''_{13}, b_3, v_2 auf einer OCh liegen (vgl. 2.2., (1) $\boldsymbol{K}$ (I)). Also $C = B^1_3 \cup S_1 \cup S_2 \cup K_{12} \cup T''_{13}$.

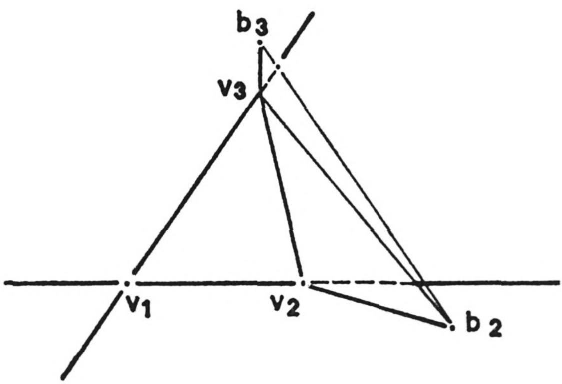
Betr. $q = 2$. Es ist

$$C = B^2_3 \cup S_1 \cup S_2 \cup T'_{12} \cup T'_{21} \cup T''_{13} \cup S^c_3.$$

Betr. $q = 3$. Es ist $C = B^3_3 \cup S_1 \cup S^c_3 \cup T'_{12} \cup T'_{21} \cup \cup T'_{13} \cup T'_{31} \cup T''_{13}$, wobei wieder e''_{13}, b_3, v_2 auf einer OCh liegen (vgl. 2.2., (3) $\boldsymbol{K}$ (III)).

2.3.1.2. Fall (B). Mit $q(i, j)$ soll der Fall bezeichnet werden, daß in v_3 ein B^i_3 und in v_2 ein B^j_2 angefügt wird.

Betr. $q(1, 1)$. Man hat $C = B^1_3 \cup B^1_2 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cup T''_{13} \cup T''_{12}$. (Vgl. Figur 4.). Dabei sind T''_{13}, T''_{12} die größten



Figur 4

$\mathfrak{k}$-Strecken mit v_1 als Endpunkt, welche die Bedingung erfüllen, daß e''_{13}, b_3, v_2 sowie e''_{12}, b_2, b_3 (vgl. auch 2.2., (1) $\boldsymbol{K}$ (I)) je auf einer OCh liegen.

Anmerkung. Auf die *Grenzfälle*, daß $B^1_2 \subset K_{12}$ oder $B^1_2 \subset K_{23}$ ist, sei nur hingewiesen.

Betr. $q(1, 2)$. Man hat (vgl. 2.2., (2) $\boldsymbol{K}$ (II))

$$C = B^1_3 \cup B^2_2 \cup T'_{13} \cup T'_{31} \cup S_3 \cup S_1 \cup T''_{13} \cup T''_{12},$$

wobei die e''_{13}, b_3, b_2, e''_{12} den gleichen Einschränkungen unterliegen wie im Falle $q(1, 1)$ (vgl. oben).

Anmerkung. Die Fälle $q(i, j)$, wobei i und j beide ≥ 2 sind, liefern keine C mit schwPOW$(C; \mathfrak{k}) = 3$. In der Tat: Für $i \geq 2$, $j \geq 2$ ist in jedem Falle aus $\underset{\sim}{S}_3$ sowohl als aus $\underset{\sim}{S}_2$ je eine $\mathfrak{k}$-Strecke herauszuschneiden. Und da auch eine Umgebung von v_2 auf $\underset{\sim}{S}_3^c$ fehlt, kann die so erhaltene Menge nicht zusammenhängend sein.

Betr. $q(3, 1)$. Hier hat man gemäß 2.2., (3), Konstruktion $\boldsymbol{K}$(III), $\bar{M}_{12} \subset \underset{\sim}{S}_3$, $\bar{M}_{13} \subset \underset{\sim}{S}_2$. Daher ist aus $\underset{\sim}{S}_3$ und aus $\underset{\sim}{S}_2$ je eine $\mathfrak{k}$-Strecke herauszuschneiden, wodurch der Zusammenhang zerstört wird.

2.3.2. In 2.0. war angenommen worden, daß jeder in einem v_i anzufügende Bogen $B_i^{q_i}$ bis auf v_i in $\underline{D}_i$ liege. Läßt man aber zu, daß etwa $B_3 := B_3^{q_3} \not\subset D_3$ ist, so kann $\underset{\sim}{B}_3 \cap D_0 = \theta$ angenommen werden, weil Teilbogen von C, die nicht in K_{23} liegen, auf verschiedenen Seiten von K_{23} in v_2 münden müssen. Berücksichtigt man, daß C maximal sein soll, so ergibt sich: Es ist $B_3 \setminus \{v_3\} \subset \underline{D}_1$ und $B_3^2 = B_2^2$ $(= B_3^{q_3}) = B(v_2 | v_3) = B^2$. Daher ist $C = B^2 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_1^c \cup T''_{12} \cup T''_{13}$ mit $\{e''_{12}\} = \underset{\sim}{S}_{12}^c \cap \cap T_3$, $\{e''_{13}\} = \underset{\sim}{S}_{13}^c \cap T_2$, wobei T_3 bzw. T_2 die Tangente an B^2 in v_3 bzw. in v_2 bedeutet. Wir bezeichnen diesen Fall durch $q(2 = 2)$.

2.4. Alle drei VP v_ν besitzen die VO Drei.

Man erhält die hierher gehörigen Fälle aus den in 2.3. diskutierten (einschließlich von Grenzfällen, welche solchen in 2.3.1. 2., Fall (B), $q(1, 1)$, Anmerkung, entsprechen), indem man $S_{12}^c \cup S_{13}^c$ durch ein $B_1^{q_1} = B(v_1 | b_1)$ mit schwPOW$(B_1^{q_1}; \mathfrak{k}) = q_1$ ersetzt; für die Endpunkte b_ν der $B_\nu^{q_\nu} = B(v_\nu | b_\nu)$, $\nu = 1, 2, 3$, gelten dann jeweils Einschränkungen analog den in 2.3.1.1. bzw. in 2.3.2.2. betr. $q = 1$ bzw. $q(1, 1)$ erwähnten. Gegenüber 2.3. hat man hier die Fälle $q_1 = i$, $q_2 = j$, $q_3 = k$ mit $1 \leq i, j, k \leq 3$, kurz die Fälle $q(i, j, k)$ zu diskutieren (wobei v_1, v_2, v_3 eine beliebig gewählte Reihenfolge der VP bezeichnet). Dem Fall $q(2 = 2)$ in 2.3.2. entsprechen hier etwa Fälle $q(i = j, k)$.

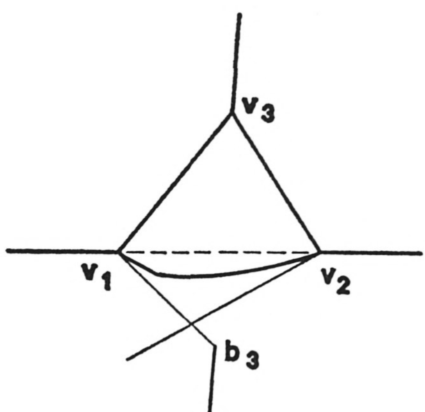
2.4.1. Zunächst werden betrachtet die Fälle $q(i, j, k)$ (nicht $q(i = j, k)$), in denen also $B_\nu^{q_\nu} \setminus \{v_\nu\} \subset \underline{D}_\nu$, $\nu = 1, 2, 3$. Gemäß

H.-K. [1], Nr. 2.4., ist dann eine Umgebung von v_ν auf S_μ und auf S_τ, $\nu \neq \mu \neq \tau \neq \nu$, in C enthalten.

Demgegenüber bezeichnen wir als *Sonderfälle* solche C, in denen mindestens ein Bogen $B_\nu^{q_\nu}$ in $K_{\nu\mu}$ liegt. Zwei derartige Fälle, die hier erwähnt seien, sind: $C = B_3^1 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cup T_{13}'' \cup T_{23}''$ und $C = B_3^2 \cup S_1 \cup S_2 \cup T_{12}' \cup T_{21}' \cup T_{13}'' \cup \cup T_{23}''$, wobei $B_3^1 \setminus \{v_3\} \subset \underline{D}_3$ bzw. $B_3^2 \setminus \{v_3\} \subset \underline{D}_3$; sie gehören zu den Typen $q(1, 1, 1)$ bzw. $q(1, 1, 2)$.

Sehen wir jetzt von solchen Sonderfällen ab, so können nicht zwei der i, j, k gleich 2 sein, etwa $j = k = 2$. (Der Fall $q(2, 2, 2)$ liefert kein zusammenhängendes C). In der Tat: Da kein Sonderfall vorliegt, ist zunächst $\underset{\sim}{S}_3^c \cap C = \theta$; denn andernfalls ist $\mathrm{POW}(C \cap K) = 4$ für gewisse OCh K, die etwa zu K_{13} benachbart sind und von denen $\underset{\sim}{B}_1^{q_1}$, $\underset{\sim}{S}_3^c$, $\underset{\sim}{S}_1$ und $\underset{\sim}{S}_2$ getroffen werden, wobei $B_1^{q_1} \setminus \{v_1\} \subset \underline{D}_1$. Es ist dann im Falle $q(i, 2, 2)$ aus S_3 und etwa aus S_1 je eine $\mathfrak{k}$-Strecke herauszuschneiden, so daß C nicht mehr zusammenhängend ist. – Die übrigen Fälle $q(1, 1, 1)$, $q(1, 1, 2)$ ergeben sich, wie in 2.4. erwähnt, aus den in 2.3. diskutierten. Ein Fall mit etwa $k = 3$ ist nicht möglich.

2.4.2. Anders verhält es sich mit den Fällen $q(2 = 2, k)$, welche dem Fall $q(2 = 2)$ in 2.3.2. entsprechen. In diesen ist etwa $C \cap K_{12} = S_3^c$ und, neben $k = 1$, auch $k = 2$ sowie $k = 3$ möglich. Man erhält die Fälle $k = 2$ bzw. $k = 3$ aus $q(2 = 2)$ (in 2.3.2.), d. h. aus $C = B^2 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_1^c \cup T_{12}'' \cup T_{13}''$ indem



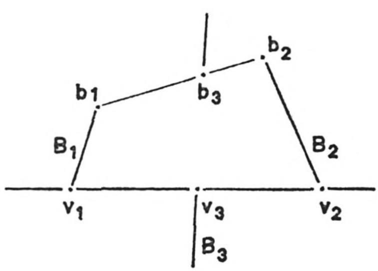
Figur 5

man die T''_{12}, T''_{13} durch ein B_1^2 bzw. B_1^3 (bis auf v_1 in $\underline{D}_1$) ersetzt und aus $\underset{\sim}{B}^2$ bzw. aus $\underset{\sim}{B}^2$ sowie aus $\underset{\sim}{S}_2$ oder $\underset{\sim}{S}_3$ einen Teilbogen bzw. einen Teilbogen sowie eine $\mathfrak{k}$-Strecke herausschneidet (vgl. dazu 1.3.2.). (Vgl. Figur 5.).

§ 3. Maximale Kontinua C vom schwPOW $(C; \mathfrak{k}) = 3$ mit genau drei VP, die auf einer OCh $\hat{K}$ liegen

Gemäß H.-K. [1], Nr. 2.3., ist $\mathrm{VO}(v_\nu) = 3$, $\nu = 1, 2, 3$. Weiter gehört für jedes ν mit $1 \leq \nu \leq 3$ eine beiderseitige Umgebung von v_ν auf $\hat{K}$ zu C. O. B. d. A. sei $v_\nu \in E_0 = E \setminus K_0$, wobei $K_0 \in \mathfrak{k}$; es entspreche die Reihenfolge v_1, v_2, v_3 einer Orientierung von $\hat{K}$. Gemäß H.-K. [1], Nr. 2.4., gilt weiter: Ist Q_ν die in v_ν mündende (einzige) Komponente von $C \setminus \hat{K} \frown C$, so liegen Q_1 und Q_3 auf der entgegengesetzten Seite von $\hat{K}$ (in E_0) wie Q_2 (vgl. aber weiter unten den Fall $q(2 = 2, k)$). Dabei ist $Q_\nu = B_\nu^{q_\nu} = B(v_\nu | b_\nu)$ mit $1 \leq q_\nu = \mathrm{schwPOW}(B_\nu^{q_\nu}; \mathfrak{k}) < 4$, $\nu = 1, 2, 3$. Zur Abkürzung wird der Fall $q_1 = i$, $q_2 = j$, $q_3 = k$ wieder mit $q(i, j, k)$ bezeichnet; ferner bezeichnen wir mit $q(2 =, j, = 2)$ (entsprechend zu $q(2 = 2, k)$ in 2.4.2.) den Fall, daß $B_1^2 = B_3^2 = B^2(v_1 | v_3)$ bzw. mit $q(2 = 2, k)$ den Fall, daß $B_1^2 = B_2^2$.

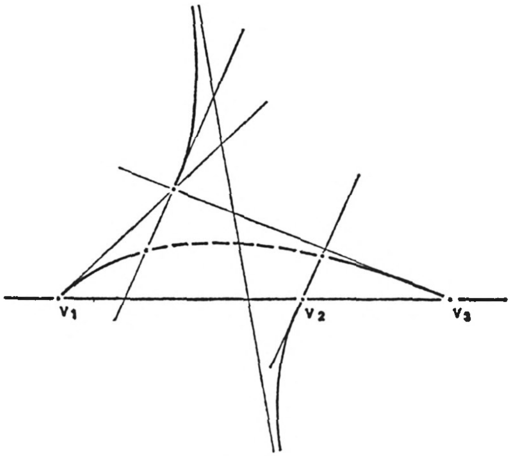
Zusatz. Wegen der zyklischen Vertauschbarkeit der v_1, v_2, v_3 ist z. B. $q(2, k, 2) = q(2, 2, k)$ und $q(2 = 2; k) = q(2 = ; k; = 2)$.



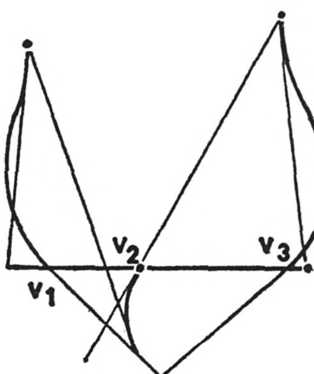
Figur 6

3.1. Man erhält den Fall $q(1, 1, 1)$ (vgl. Figur 6) aus 2.4.1., indem man dort etwa v_2 nach $\underset{\sim}{S}_2$ rücken läßt. In den tatsächlich auftretenden Fällen mit $1 \leq i, k \leq 2$ und $1 \leq j \leq 2$ bzw. $j = 3$ ist

$C \frown \hat{K} = \hat{K}$ bzw. $C \frown \hat{K} = \hat{K} \setminus \underset{\sim}{\hat{S}}$, wobei $\hat{S}$ eine zu v_3 bzw. zu v_1 fremde, in $\underset{\sim}{\hat{K}}(v_1 | v_2)$ oder in $\underset{\sim}{\hat{K}}(v_3 | v_2)$ enthaltene $\mathfrak{k}$-Strecke ist. – Wenn aber $i = 3$ oder (und) $k = 3$ ist, so muß $1 \leq j \leq 2$ sein und $C \frown \hat{K} = \hat{K}(e' | v_1 | v_2 | v_3 | e'')$; auch diese Fälle treten auf. Dabei haben die zu $\hat{K}$ fremden Endpunkte der $B_\nu^{q_\nu}$ jeweils bestimmten Bedingungen zu genügen, analog denen etwa in 2.3.1.



Figur 7



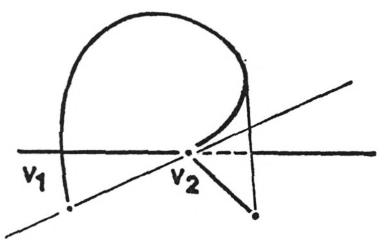
Figur 8

3.2. Im Fall $q(2 =, 1, = 2)$ ist $\hat{K} \subset C$. Betr. $q(2 =, 2, = 2)$ bzw. $q(3, 2, 3)$ vgl. Figur 7 bzw. 8.

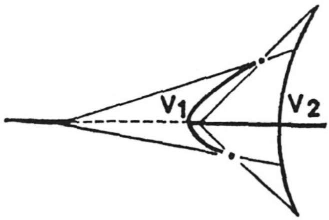
§ 4. Es besitzt C genau zwei VP v_1, v_2

Es sei $\hat{K} = K(v_1, v_2) \in \mathfrak{k}$. Gemäß H.-K. [1], insbesondere Nr. 2.4., gilt: Es ist $3 \leq VO(v_\nu) \leq 4$, $\nu = 1, 2$, und zu C gehört mindestens eine einseitige Umgebung von v_ν auf $\hat{K}$. Außerdem münden in v_ν mindestens ein und höchstens zwei, zu $\hat{K}$ fremde, in C enthaltene Bogen $\underset{\sim}{B}{}^{q_{\nu 1}}_{\nu 1}$, $\underset{\sim}{B}{}^{q_{\nu 2}}_{\nu 2}$, die auf verschiedenen Seiten von $\hat{K}$ liegen; dabei sind $q_{\nu 1}$ bzw. $q_{\nu 2}$ die schwPOW der betr. Bogen. Ist $q_{11} = i$, $q_{12} = j$, $q_{21} = k$ und $q_{22} = m$ und wird $q_{\nu\varrho} = 0$ gesetzt, soweit ein zugehöriger Bogen $B^{q_{\nu\varrho}}_{\nu\varrho}$ in C nicht vorkommt, also jedenfalls $VO(v_v) = 3$ ist, so sprechen wir von einem Fall $q(i, j; k, m)$. Ist $V(v_1) = V(v_2) = 4$, so gehört eine beiderseitige Umgebung von v_ν auf $\hat{K}$ zu C (und es treten zwei $B^{q_{\nu 1}}_{\nu 1}$, $B^{q_{\nu 2}}_{\nu 2}$ auf).

4.1. Vom Fall $q(1, 1; 1, 1)$ kann abgesehen werden, da sich dann ein zu H.-K. [1], Nr. 3.2.3., Satz, Beh. (I) oder (II), oder zu 2.1. gehöriges maximales C ergibt. Dagegen führt $q(2, j; k, m)$ für $1 \leq j, k, m \leq 2$ entweder *Erstens* zu einem $C = \hat{K} \cup C^2$, wobei C eine $\mathfrak{k}$-konvexe Kurve ist, welche von $\hat{K}$ in v_1 und v_2 geschnitten wird; in diesem Falle ist also z. B. $B^i_{11} \cup B^k_{21}$ sowie $B^j_{12} \cup B^m_{22}$ je ein $\mathfrak{k}$-konvexer Bogen mit den Endpunkten v_1 und v_2; daher wäre



Figur 9

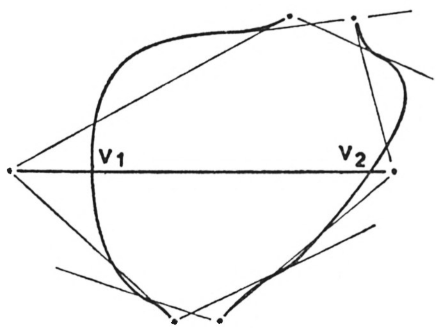


Figur 10

genauer $q(2 =, 2 =; = 2, = 2)$ zu schreiben. Daneben ist noch $q(2, 2 =; = 2, 1)$ mit $\mathrm{VO}(v_1) = 4$, $\mathrm{VO}(v_2) = 3$ möglich (vgl. Figur 9). – Oder *Zweitens* zu einem C, in welchem $B_{11}^i \cup B_{12}^j$ sowie $B_{21}^k \cup B_{22}^m$ je ein $\mathfrak{k}$-konvexer Bogen ist. Dabei gibt es noch verschiedene Möglichkeiten. So kann die $\mathfrak{k}$-konvexe Seite des einen Bogens der $\mathfrak{k}$-konvexen oder $\mathfrak{k}$-konkaven Seite des anderen Bogens zugewandt sein (vgl. Figur 10).

4.2. Es sind noch die Fälle zu diskutieren, in denen etwa $i = 3$ ist. Es genügt, den Fall $q(3, 3; 3, 3)$ zu betrachten, da aus ihm diejenigen Fälle leicht abzulesen sind, in denen höchstens 3 der j, k, m gleich 3 sind; übrigens treten alle Fälle mit $1 \leq i, j; k, m \leq 3$ tatsächlich auf, außer dem Fall $i = j = k = m = 1$ (der nicht maximal ist); im Fall $i = k = 2, j = m = 1$ ist $\mathrm{VO}(v_1) = 3$ oder (und) $\mathrm{VO}(v_2) = 3$. Im Falle $q(3, 3; 3, 3)$ hat man

$C = B_{11}^3 \cup B_{12}^3 \cup B_{21}^3 \cup B_{22}^3 \cup K(e'' \,|\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, e')$. (Vgl. Figur 11).



Figur 11

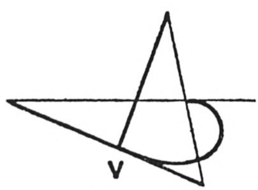
Bemerkung. Man beachte, daß im Falle $q(3, 3; 3, 3)$ Kontinua mit *vier Wendepunkten* auftreten, was bekanntlich für *Bogen und Kurven* von schwPOW 3 *nicht möglich* ist.

§ 5. Es besitzt C genau einen VP v

Hier ist $3 \leq \mathrm{VO}(v) \leq 4$, da die Fälle $5 \leq \mathrm{VP}(v) \leq 6$ schon in H.-K. [1], Nr. 3.2.1.; 3.2.2. erledigt wurden.

5.1. Es sei $\mathrm{VO}(v) = 4$. Analog wie in § 4 bezeichnen wir mit $q(i, j, k, m)$ den Fall, daß die 4 in v mündenden Bogen B_μ bzw. die schwPOW i, j, k, m besitzen. Sind dabei B_1, B_2, B_3, B_4 so numeriert, wie es einem Umlauf um v entspricht, so muß $\mathrm{schwPOW}(v; (B_1 \cup B_3); \mathfrak{k}) \leq 2$ und $\mathrm{schwPOW}(v; (B_2 \cup B_4); \mathfrak{k}) \leq$ ≤ 2 sein.

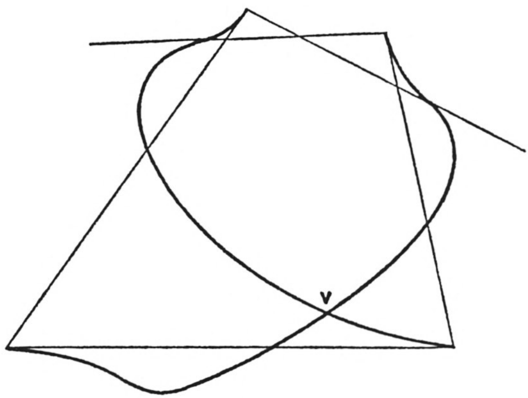
5.1.1. *Zunächst sei* $1 \leq i, j, k, m \leq 2$, also *kein in* v *mündender Bogen vom* schwPOW 3 *vorhanden.* Hier sind sämtliche Fälle $q(i, j, k, m)$ durch Kontinua C vertreten; allerdings finden sich darunter Bogen und Kurven und die übrigen Kontinua sind nicht alle maximal im Sinne von 2.3. Bemerkung, können also zu schon früher behandelten C erweitert werden. Wir begnügen uns mit der folgenden Feststellung: Es existiert kein maximales C vom Typus $q(1, 1, 1, 1)$; hingegen gibt es maximale C vom Typus $q(2, 2, 2, 2)$; aus diesen erhält man durch Ersetzung geeigneter der B_ν^2 solche vom Typus $q(1, 2, 2, 2)$, $q(1, 2, 1, 2)$, $q(2, 1, 1, 2)$ und $q(1, 1, 1, 2)$, wobei im letzteren Falle (vgl. Figur 12) noch zusätzliche Bedingungen hinsichtlich



Figur 12

der gegenseitigen Lage der B_2^1, B_3^1, B_4^2 zu erfüllen sind. Mit Ausnahme von $q(1, 1, 1, 1)$ sind also jedenfalls sämtlich Typen $q(i, j, k, m)$ mit $1 \leq i, j, k, m \leq 2$ vertreten.

5.1.2. *Mindestens einer der vier in* v *mündenden Bogen besitzt den* schwPOW 3. – Es sei also etwa ein B_1^3 vorhanden. In Betracht zu ziehen sind dann alle Typen $q(3, j, k, m)$ mit $1 \leq j, k, m \leq 3$. Die Lage der Endpunkte e_ν der vier, in v mündenden Bogen $B_\nu^{q_\nu}$ ist dabei eingeschränkt durch die (für $\mathrm{schwPOW}(C; \mathfrak{k}) \leq 3$ notwendige) Bedingung, daß keines der $B_\nu^{q_\nu}$ von Maximalsekanten eines der B_ϱ^3 geschnitten werden darf, ferner daß keine μ-Sekante eines B_ϱ^μ zugleich σ-Sekante eines anderen B_τ^σ ist, sofern $2 \leq \mu$, $2 \leq \sigma$ gilt. Daraus folgt insbesondere: Ist $q_\nu = 3$ für ein ν, so muß jeder nicht zu diesem B_ν gehörige Teilbogen von C fremd sein zu dem offenen Dieder, das begrenzt wird von der Tangente an B_ν in dessen Endpunkt e_ν und von der Wendetangente von B_v (vgl. 1.3.2.). Aus diesen Bedingungen folgt, daß kein (maximales) C vom Typus $q(3, 3, 3, 3)$ existiert. Da in $q(i, j, k, m)$ die i, j, k, m zyklisch vertauschbar sind, kommen o. B. d. A. nur Typen $q(3, j, k, m)$ in Betracht mit $1 \leq j \leq 2$. Man konstruiert zunächst ein C vom Typus $q(3, 2, 3, 3)$ (vgl. Figur 13). Hieraus gewinnt man Vertreter für

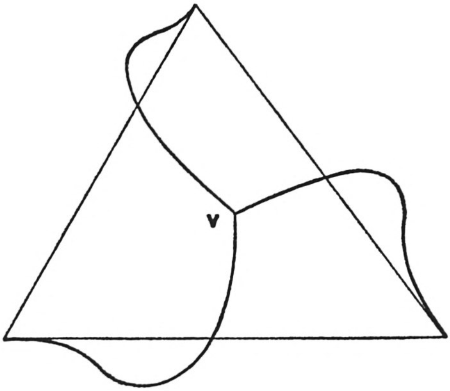


Figur 13

alle übrigen Typen, indem man in einem solchen C (mit $q(3, 2, 3, 3)$) für j bzw. k und m die verschiedenen Werte mit $1 \leq j \leq 2$ bzw. $1 \leq k, m \leq 3$ als POW der B_2^j bzw. B_3^k, B_4^m wählt. Man konstatiert, daß alle hiernach zu überprüfenden Typen tatsächlich auftreten.

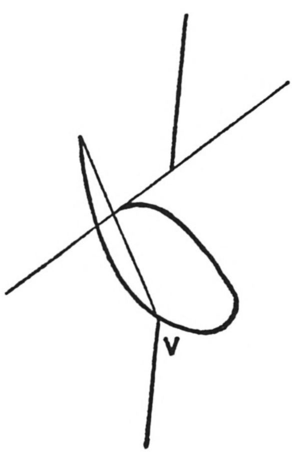
Bemerkung. Während Bogen und Kurven vom POW 3 mit einem Verzweigungspunkt *höchstens einen* Wendepunkt besitzen, existieren Kontinua von POW 3 mit Verzweigungspunkten und *mit drei Wendepunkten.*

5.2. *Es sei* $\mathrm{VO}(v) = 3$; wir haben es also mit Typen $q(i, j, k)$ zu tun. Dabei scheidet $q(1, 1, 1)$ aus, weil kein zugehöriges C maximal ist. Dagegen trifft $q(3, 3, 3)$ auf (vgl. Figur 14); hier liegt der Endpunkt $e_{\nu-1}$ von $B_{\nu-1}^{q_{\nu-1}}$ auf der Tangente an $B_\nu^{q_\nu}$ in e_ν, $\nu = 0, 1, 2, 3,$ mit $e_0 = e_3$ und $B_0 = B_3$. Entsprechende Bedin-

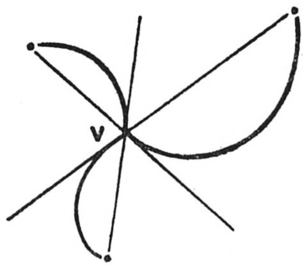


Figur 14

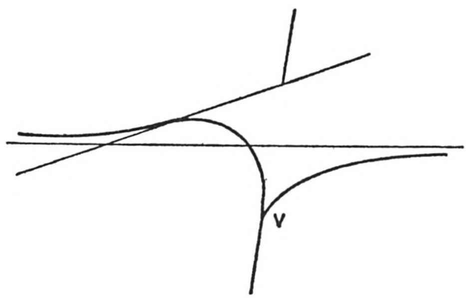
gungen sind zu erfüllen bei den Typen, soweit sie auftreten, also den $q(i, j, k)$ mit $i = 3$, $1 \leq j, k \leq 2$ oder $i = j = 3$, $1 \leq k \leq 2$. Maximale Typen $q(2, 2, 1)$, $q(2, 2, 2)$ und $q(3 = 3, 1)$ werden



Figur 15



Figur 16



Figur 17

durch die Figuren 15, 16 und 17 veranschaulicht. Die Konstruktion eines maximalen Typus $q(2, 1, 1)$ ist uns nicht gelungen.

Literatur

Derry, D. [1] Polygons of ordre n with $n+2$ sides. Erscheint in Scandinavica Mathematica.

Haupt-Künneth [1] Über die Gestalten der Kontinua vom schwachen Punktordnungswert Drei in topologisch projektiven Ebenen I. Mitt. Bayer. Akad. d. Wiss. Sitz.-Ber. math.-natur. Kl. 1967, 51–69. Zitiert mit H.-K. [1]. Dort auch weitere Literatur.

Haupt-Künneth [2], Geometrische Ordnungen. Berlin-Heidelberg-New York 1967. Zitiert mit H.-K. [2].

Haupt [1] Bestimmung der nicht-beschränkten Bogen dritter Ordnung mit Doppelpunkt in projektiven Ebenen. Bayer. Akad. d. Wiss. Sitz.-Ber. math.-naturw. Kl. 1966, 143–166. Zitiert mit H. [1].