BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1969

MÜNCHEN 1970

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Linearisierung kontrahierender biholomorpher Abbildungen des $\mathbf{C}^3$

Von Ernst Peschl und Ludwig Reich in Bonn

Vorgelegt am 18. April 1969

§ 1. Einleitung

Das Normalformenproblem für kontrahierende biholomorphe Abbildungen wurde in [5], [6] ausführlich behandelt, und es wurden dort alle möglichen Typen (halbkanonischen Formen) ermittelt. Für die kontrahierenden Abbildungen des $\mathbf{C}^3$ wurde schließlich in [4] das Problem der Aufstellung kanonischer Normalformen vollständig gelöst. Aus ganz einfachen formalen Überlegungen (vgl. [4]) hat sich dabei ergeben, daß schon etwa im $\mathbf{C}^2$ eine kontrahierende biholomorphe Abbildung i. a. nicht einer linearen Abbildung (die ihrem Linearteil ähnlich sein müßte) biholomorph äquivalent sein kann, und zwar i. a. dann nicht, wenn gewisse multiplikative Relationen zwischen den Eigenwerten des Linearteils bestehen. So sieht man z. B. direkt sofort, daß die kontrahierende biholomorphe Abbildung

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \varrho_1 x_1 \\
x_2^{(1)} &= \varrho_1^2 x_2 + x_1^2, \quad 0 < |\varrho_1| < 1,
\end{aligned}
$$

nicht ihrem Linearteil

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \varrho_1 x_2 \\
x_2^{(1)} &= \varrho_1^2 x_2
\end{aligned}
$$

biholomorph äquivalent ist. Andererseits wurde schon in [3], wo sich das Problem der Klassifizierung der kontrahierenden biholomorphen Abbildungen in höheren Dimensionen für die Funktionentheorie als interessant erwies, gezeigt, daß sich im $\mathbf{C}^2$ bei Bestehen der Relation $\varrho_2 = \varrho_1^\nu$ (vgl. [5]) für die Eigenwerte ϱ_i des

Linearteils, doch noch durch Übergang zu einer endlich-blättrigen Überlagerung einer Umgebung des Fixpunktes, deren Verzweigungsgebilde den Fixpunkt enthält, eine gewisse „Linearisierung" erreichen läßt. Es sei nämlich die Abbildung F

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \varrho_1 x_1 \\ x_2^{(1)} &= \varrho_2 x_2 + x_1^\nu, \ \nu \geq 2, \ \varrho_2 = \varrho_1^\nu, \quad 0 < |\varrho_1| < 1, \end{aligned} \tag{1}$$

in ihrer kanonischen Normalform vorgelegt. Wir betrachten die Abbildung T

$$T: \begin{array}{ll} x_1 \to \xi_1 = x_1^\nu, & x_1^{(1)} \to \xi_1^{(1)} = x_1^{(1)\nu} \\ x_2 \to \xi_2 = x_2, & x_2^{(1)} \to \xi_2^{(1)} = x_2^{(1)}. \end{array} \tag{2}$$

Durch T wird eine Umgebung des Punktes (0,0) im $\mathbf{C}^2$ der x biholomorph auf eine gewisse endlich-blättrige Überlagerung $\mathfrak{R}$ einer Umgebung des Punktes (0,0) im ξ-Raum abgebildet, wobei das Verzweigungsgebilde den Punkt (0,0) enthält. Nun gilt aber, wenn (1) und (2) bestehen, auch

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1)} &= \varrho_2 \xi_1 \\ \xi_2^{(1)} &= \xi_1 + \varrho_2 \xi_2, \end{aligned} \tag{3}$$

somit sind die Bildpunkte unter T von $x^{(1)}, x$, die ihrerseits durch (1) aufeinanderbezogen sind, durch die lineare Abbildung (3) miteinander verknüpft, die Abbildung F ist durch „Liften" auf $\mathfrak{R}$ linearisiert. Es ergibt sich nun die Frage: Läßt sich dieser skizzierte Prozeß der Linearisierung durch Übergang zu einer endlich-blättrigen Überlagerung des $\mathbf{C}^n$, bzw. einer Einbettung im $\mathbf{C}^m$, $m > n$, bei allen Typen kontrahierender biholomorpher Abbildungen im $\mathbf{C}^n$ auch für $n \geq 3$ durchführen?

In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, daß diese Frage für $n = 3$ zu bejahen ist. Hierbei stützen wir uns darauf, daß im Falle $n = 3$ die halbkanonischen Formen noch leicht explizit hinzuschreiben sind (vgl. die Arbeit [4], deren Bezeichnungen wir hier übernehmen).

Insbesondere beweisen wir folgenden

Satz: *Es sei $x^{(1)} = Fx$ eine kontrahierende biholomorphe Abbildung im $\mathbf{C}^3$ mit Fixpunkt* (0,0,0). *Dann existiert eine lokale* *holomorphe Abbildung* $T: x \to \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ *auf eine Menge* $\mathfrak{R}$, $\xi = 0 \in \mathfrak{R}$, *im* $\mathbf{C}^m$ $(m \geq 3)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Die Jacobische Matrix* $\left\| \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right\|$ *hat in einer Umgebung* $\mathfrak{U}$ *des Fixpunktes* $x = 0$ *abgesehen höchstens von den Punkten einer lokalen analytischen Mannigfaltigkeit einer Dimension* ≤ 2, *den Rang* 3, *d.h.* T^{-1} *ist i.a. endlich vieldeutig. Es ist* $rg \left\| \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}(0) \right\| < 3$, *und* $T(0) = 0$.
(Eine solche Abbildung heiße „nicht entartet", vgl. [1], *p.* 23.*)*

(ii) *(Linearisierung von* F *auf* $\mathfrak{R}$*). Es existiert eine nichtsinguläre lineare Abbildung* $L: \xi \to \xi^{(1)} = L\xi$ *im* $\mathbf{C}^m$, *so daß mit* $x^{(1)} = Fx$, $\xi = Tx$, $\xi^{(1)} = Tx^{(1)}$ *die Relation* $\xi^{(1)} = L\xi$ *besteht, d. h.* $L|_{\mathfrak{R}}$ *verknüpft genau dann* ξ *mit* $\xi^{(1)}$, *wenn* $\xi^{(1)}$, ξ *unter* T *Bilder von Punkten* $x^{(1)}$, x *sind, die mittels* F *aufeinander bezogen sind.*

Es ist festzuhalten, daß T, wie auch die Dimension m des Einbettungsraumes von $\mathfrak{R}$ keineswegs eindeutig bestimmt sind. Die Beweismethode verwendet die Auflösung einfacher Systeme von Differenzengleichungen (§ 3). Die Eigenschaften der Relationensysteme für die Eigenwerte setzen wir aus [5] und die Gestalt der halbkanonischen Formen aus [4] als bekannt voraus. Wir schließen uns in der Bezeichnung an [4] an. Im folgenden wird der Beweis des Satzes, nach den verschiedenen Fällen von $(J^{(\nu)}, R_\mu)$ getrennt, ausgeführt. Es treten dabei nur die folgenden Fälle auf: $(J^{(1)}, R_1)$, $(J^{(1)}, R_2)$, $(J^{(1)} R_3)$, $(J^{(2)}, R_1)$, $(J^{(3)}, R_1)$, $(J^{(4)}, R_1)$, $(J^{(5)}, R_1)$. Am Schluß der Arbeit geben wir eine Übersicht.

§ 2. Die Linearisierung in den Fällen $(J^{(1)}, R_1)$, $(J^{(1)}, R_3)$, $(J^{(2)}, R_1)$, $(J^{(3)}, R_1)$, $(J^{(5)}, R_1)$

Hier ist es ganz einfach, eine geeignete Transformation T aufzustellen.

Wir setzen für die halbkanonische Form an

$$x^{(1)} = J^{(\nu)} x + P(x).$$

Im Fall $(J^{(1)}, R_1)$, $P_2 \neq 0$, können wir $P_2(x) = x_1^\nu$, $\nu \geq 2$, annehmen.

Wir setzen an:

$$(4) \qquad T: \begin{array}{ll} \xi_1 = x_1^\nu & \xi_1^{(1)} = x_1^{(1)\nu} \\ \xi_2 = x_2 & \xi_2^{(1)} = x_2^{(1)} \\ \xi_3 = x_3 & \xi_3^{(1)} = x_3^{(1)}. \end{array}$$

Offensichtlich hat T die in der Behauptung (i) des Satzes festgestellten Eigenschaften, und es ist hier $T(\mathfrak{U})$ eine ν-blättrige Überlagerung einer Umgebung des Punktes $\xi = 0 \in \mathbf{C}^3$.

Es folgt

$$\xi_1^{(1)} = x_1^{(1)\nu} = (\varrho_1 x_1)^\nu = \varrho_1^\nu x_1^\nu = \varrho_2 \xi_1$$

aufgrund der Relationen R_1. Daher ergibt sich für die geliftete Abbildung auf der Überlagerung $\mathfrak{R}$:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \xi_1^{(1)} &= \varrho_2 \xi_1 \\ \xi_2^{(1)} &= \quad \xi_1 + \varrho_2 \xi_2 \\ \xi_3^{(1)} &= \qquad\qquad \varrho_3 \xi_3. \end{aligned}$$

Ähnlich einfach ist der Fall $(J^{(1)}, R_3)$ zu behandeln. Dann hat $P_3(x_3) \neq 0$ die Gestalt:

$$P_3(x) = \sum_{r=0}^{\gamma} b_r x_1^{\alpha + r\alpha_1} x_2^{\beta - r\beta_1}, \quad \text{mit} \quad \gamma = \left[\frac{\beta}{\beta_1}\right],$$

$$0 \leq \alpha < \alpha_1, \; \beta \geq 0, \; \beta_1 \geq 0 \text{ fest, und es gilt}$$

$$\varrho_3 = \varrho_1^{\alpha + r\alpha_1} \varrho_2^{\beta - r\beta_1}, \quad r = 0, 1, \ldots, \gamma.$$

Es sei zunächst stets $\beta - r\beta_1 \neq 0$ oder ein $b_r \neq 0$, $r < \beta/\beta_1$ (= ganz).

Wir setzen

$$(6) \qquad T: \begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \\ \xi_2 &= \sum_{r=0}^{\gamma} B_r x_1^{\alpha + r\alpha_1} x_2^{\beta - r\beta_1}, \quad \text{analog für } \xi^{(1)}. \\ \xi_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\xi_1^{(1)} = x_1^{(1)} = \varrho_1 x_1 = \varrho_1 \xi_1$$

$$\xi_2^{(1)} = \sum_{r=0}^{\gamma} B_r x_1^{(1)\alpha + r\alpha_1} x_2^{(1)\beta - r\beta_1} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\gamma} B_r (\varrho_1 x_1)^{\alpha + r\alpha_1} (\varrho_2 x_2)^{\beta - r\beta_1} =$$

$$= \varrho_3 \sum_{r=0}^{\gamma} B_r x_1^{\alpha + r\alpha_1} x_2^{\beta - r\beta_1} = \varrho_3 \xi_2$$

$$\xi_3^{(1)} = x_3^{(1)} = \varrho_3 x_3 + \sum_{r=0}^{\gamma} b_r x_1^{\alpha + r\alpha_1} x_2^{\beta - r\beta_1} = \varrho_3 \xi_3 + \xi_2,$$

falls $B_r = b_r$, für $r = 0, \ldots, \gamma$, gesetzt wird. Die linearisierte Abbildung lautet:

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1)} &= \varrho_1 \xi_1 \\ \xi_2^{(1)} &= \quad \varrho_3 \xi_2 \\ \xi_3^{(1)} &= \qquad \xi_2 + \varrho_3 \xi_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Es gilt hier für T: $rg \left\| \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right\| = 3$ für Unbestimmte x, da wegen $B_r = b_r$ nicht alle $B_r = 0$, $r < \beta/\beta_1$ (= ganz), oder wegen $\beta - r\beta_1 \neq 0$ für alle r.

Falls aber $\beta/\beta_1 = \gamma$ ganz und $B_r = 0$ für alle $r < \gamma$, dann setzen wir

$$T\colon \begin{aligned} \xi_1 &= x_1^{\alpha + \gamma\alpha_1} \\ \xi_2 &= x_2, \quad \text{analog für } \xi^{(1)} \\ \xi_3 &= x_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Es folgt

$$\xi_1^{(1)} = x_1^{(1)\alpha + \gamma\alpha_1} = (\varrho_1 x_1)^{\alpha + \gamma\alpha_1} =$$

$$= \varrho_3 x_1^{\alpha + \gamma\alpha_1} = \varrho_3 \xi_1$$

$$\xi_2^{(1)} = x_2^{(1)} = \varrho_2 x_2 = \varrho_2 \xi_2$$

$$\xi_3^{(1)} = x_3^{(1)} = \varrho_3 x_3 + b_\gamma x_1^{\alpha + \gamma\alpha_1} = b_\gamma \xi_1 + \varrho_3 \xi_3.$$

Für T gelten die Behauptungen (i), (ii), wie leicht zu sehen ist, und für die Linearisierung auf $\mathfrak{R}$ bekommen wir

$$\begin{aligned}\xi_1^{(1)} &= \varrho_3\xi_1\\ \xi_2^{(1)} &= \quad \varrho_2\xi_2 \\ \xi_3^{(1)} &= \qquad b_\nu\xi_1 + \varrho_3\xi_3.\end{aligned} \tag{9}$$

Im Fall $(J^{(2)}, R_1)$ verfährt man ebenso wie im vorangehenden Fall. Falls in $P_3(x) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_\lambda x_1^{\nu-\lambda} x_2^\lambda$ ein $c_\lambda \neq 0$ für $\lambda > 0$, so setzen wir

$$T\colon \begin{aligned}\xi_1 &= x_1\\ \xi_2 &= P_3(x) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} c_\lambda x_1^{\nu-\lambda} x_2^\lambda, \quad \text{analog für } \xi^{(1)}.\\ \xi_3 &= x_3\end{aligned} \tag{10}$$

Für T gilt die Behauptung (i), und die Linearisierung lautet:

$$\begin{aligned}\xi_1^{(1)} &= \varrho_1\xi_1\\ \xi_2^{(1)} &= \quad \varrho_2\xi_2 \\ \xi_3^{(1)} &= \qquad \xi_2 + \varrho_2\xi_3.\end{aligned} \tag{11}$$

Falls $P_3(x) = x_1^\nu$, dann setzen wir:

$$T\colon \begin{aligned}\xi_1 &= x_1^\nu\\ \xi_2 &= x_2, \quad \text{analog für } \xi^{(1)},\\ \xi_3 &= x_3\end{aligned} \tag{12}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\xi_1^{(1)} &= \varrho_2\xi_1\\ \xi_2^{(1)} &= \quad \varrho_1\xi_2 \\ \xi_3^{(1)} &= \qquad \xi_1 + \varrho_2\xi_2.\end{aligned} \tag{13}$$

Die Fälle $(J^{(3)}, R_1)$, $(J^{(5)}, R_1)$ sind ebenso einfach zu behandeln.

$(J^{(3)}, R_1)$

$$T\colon \begin{aligned}\xi_1 &= x_1^\nu\\ \xi_2 &= x_2, \quad \text{analog für } \xi^{(1)}\\ \xi_3 &= x_3\end{aligned} \tag{14}$$

$$\text{(15)}\qquad \begin{aligned} \xi_1^{(1)} &= \varrho_2\xi_1 \\ \xi_2^{(1)} &= \quad \xi_1 + \varrho_2\xi_2 \\ \xi_3^{(1)} &= \qquad\qquad \varrho_2\xi_3. \end{aligned}$$

$(J^{(5)}, R_1)$

$$\text{(16)}\qquad T:\ \begin{aligned} \xi_1 &= x_1^\nu \\ \xi_2 &= x_2, \\ \xi_3 &= x_3 \end{aligned} \quad \text{analog für } \xi^{(1)}$$

$$\text{(17)}\qquad \begin{aligned} \xi_1^{(1)} &= \varrho_2\xi_1 \\ \xi_2^{(1)} &= \quad \varrho_2\xi_2 \\ \xi_3^{(1)} &= \qquad \xi_2 + \varrho_2\xi_3. \end{aligned}$$

§ 3. Die Fälle $(J^{(1)}, R_3)$, $(J^{(4)}, R_1)$

Diese schwierigeren Fälle führen wir auf die Auflösung eines Systems von Differenzengleichungen zurück. Zunächst werde der Fall $(J^{(1)}, R_3)$ behandelt. Falls $P_2 = 0$, so können wir wie im Fall $(J^{(1)}, R_2)$ vorgehen und erhalten wie dort zwei Unterfälle, je nachdem, ob $P_3 = x_1^{\alpha+\beta\nu}$, oder ob P_3 auch von x_2 abhängt. (Der Fall, daß außerdem noch $P_3 = 0$ ist, ist hier ohne Interesse.)

Es sei also $P_2 = x_1^\nu$, $P_3(x) = \sum_{k=0}^{\beta} b_r\, x_1^{\alpha+k\nu} x_2^{\beta-k}$.

Wir führen die Abkürzungen

$$\text{(18)}\qquad z = \frac{x_2}{x_1^\nu}$$

und

$$P_3(x_1, x_2) = x_1^{\alpha+\beta\nu}\,\chi(z) \quad \text{mit}$$

$$\text{(19)}\qquad \chi(z) = \sum_{k=0}^{\beta} b_k \left(\frac{x_2}{x_1^\nu}\right)^{\beta-k} = \sum_{j=0}^{\beta} b_{\beta-j}\, z^j$$

ein und setzen für die Transformation T (vom $\mathbf{C}^3$ in den $\mathbf{C}^{\beta+2}$) an:

$$(20)\qquad T:\begin{array}{l}\xi_1 = x_1^{\alpha+\beta\nu}\\ \xi_2 = q_1(x_1, x_2)\\ \xi_3 = q_2(x_1, x_2),\quad \text{analog für } \xi^{(1)}.\\ \quad\vdots\\ \xi_\lambda = q_{\lambda-1}(x_1, x_2)\\ \quad\vdots\\ \xi_{\beta+1} = q_\beta(x_1, x_2)\\ \xi_{\beta+2} = x_3 + q_{\beta+1}(x_1, x_2),\end{array}$$

wobei die $q_j(x_1, x_2)$ geeignet zu bestimmende Linearkombinationen der Zusatzmonome $x_1^{\alpha+k\nu}\, x_2^{\beta-k}$, $k = 0, \ldots, \beta$, sein sollen. Wir können wie bei (19) setzen:

$$(21)\qquad q_r(x_1, x_2) = x_1^{\alpha+\beta\nu} \sum_{\mu=0}^{\beta} a_{r,\mu}\, z^\mu = x_1^{\alpha+\beta\nu}\, \varphi_r(z).$$

Wir definieren noch $\varphi_0(z) = 1$.

Ferner halten wir fest: Ersetzen wir in $\chi(z)$ und $\varphi_r(z)$ x_1, x_2 durch $x_1^{(1)} = \varrho_1 x_1$, $x_2^{(1)} = \varrho_2 x_2 + x_1$, so ergibt sich für z eine Transformation:

$$(22)\qquad z = \frac{x_2}{x_1^\nu} \to \frac{\varrho_2 x_2 + x_1^\nu}{\varrho_1^\nu\, x_1^\nu} = z + \frac{1}{\varrho_2} = z + h,$$

mit $\frac{1}{\varrho_2} = h\,(\neq 0)$, wegen R_3.

Dann folgt aus (17):

$$(23)\qquad \begin{aligned}\xi_1^{(1)} &= x_1^{(1)\,\alpha+\beta\nu} = \varrho_1^{\alpha+\beta\nu}\, x_1^{\alpha+\beta\nu} = \varrho_3 \xi_1\\ \xi_\lambda^{(1)} &= q_{\lambda-1}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = \varrho_3 x_1^{\alpha+\beta\nu}\, \varphi_{\lambda-1}(z+h)\ (2 \leq \lambda \leq \beta + 1)\\ \xi_{\beta+2}^{(1)} &= x_3^{(1)} + q_{\beta+1}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = \varrho_3 x_3 + P_3(x_1, x_2) +\\ &\quad + q_{\beta+1}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) =\\ &= \varrho_3 x_3 + x_1^{\alpha+\beta\nu}\big(\chi(z) + \varrho_3 \varphi_{\beta+1}(z+h)\big).\end{aligned}$$

Wir setzen für die Linearisierung an

$$(24)\qquad \begin{aligned}\xi_1^{(1)} &= \sigma_1 \xi_1\\ \xi_\lambda^{(1)} &= c_\lambda \xi_{\lambda-1} + \sigma_\lambda \xi_\lambda\ (2 \leq \lambda \leq \beta + 2),\end{aligned}$$

mit noch zu bestimmenden c_λ, $\sigma_\lambda \neq 0$. Substituieren wir in (24) links (23), rechts (20), so folgt ein System von Differenzengleichungen für die $\varphi_r(z)$, wobei schon $\sigma_\lambda = \varrho_3$ gesetzt wurde:

$$(25)\quad \begin{aligned} &\varrho_3\varphi_{\lambda-1}(z+h) - \varrho_3\varphi_{\lambda-1}(z) = c_\lambda\varphi_{\lambda-2}(z) \quad (2 \leq \lambda \leq \beta+1) \\ &-c_{\beta+2}\varphi_\beta(z) + \varrho_3(\varphi_{\beta+1}(z+h) - \varphi_{\beta+1}(z)) = -\chi(z), \end{aligned}$$

für die Polynome $\varphi_r(z)$ vom formalen Grad β. Die c_λ, $1 \leq \lambda \leq \beta+1$, setzen wir $c_\lambda = 1$. Über $c_{\beta+2}$ wird noch geeignet verfügt werden. Wir schreiben dieses System (25) noch einmal explizit hin:

$$(26)\quad \begin{aligned} \varphi_1(z+h) - \varphi_1(z) &= \frac{1}{\varrho_3} \\ \varphi_2(z+h) - \varphi_1(z) &= \frac{1}{\varrho_3}\varphi_1(z) \\ &\vdots \\ \varphi_\beta(z+h) - \varphi_\beta(z) &= \frac{1}{\varrho_3}\varphi_{\beta-1}(z) \\ \varrho_3(\varphi_{\beta+1}(z+h) - \varphi_{\beta+1}(z)) &= c_{\beta+2}\varphi_\beta(z) - \chi(z). \end{aligned}$$

Aus der Theorie der Differenzengleichungen ([2]) ist bekannt daß sich ein solches System von Differenzengleichungen durch Polynome des Grades β lösen läßt. Die explizite Darstellung und damit der Existenzbeweis für die Lösung des Systems (26) ergibt sich am einfachsten mit Hilfe der Bernoullischen Polynome $B_\nu(\zeta)$ (vgl. z. B. [2], p. 18, p. 295), die bekanntlich die beiden Eigenschaften haben:

(i) $B_\nu(\zeta)$ ist ein Polynom vom Grade ν, $(\nu \geq 1)$.

(ii) Es gilt: $B_\nu(\zeta+1) - B_\nu(\zeta) = \nu\zeta^{\nu-1}$ $(\nu \geq 1)$.

Dazu setzen wir:

$$(27)\quad \zeta = \frac{1}{h}z, \quad \varphi_j(z) = \psi_j(\zeta), \quad \chi(z) = \tau(\zeta).$$

Es folgt: $\varphi_j(z+h) = \varphi_j(h\zeta + h) = \psi_j(\zeta+1)$.

Also ergibt sich durch die Variablentransformation (27) aus (26) ein System von Differenzengleichungen mit der normierten Differenz 1:

$$(28)\qquad \begin{aligned} &\psi_k(\zeta+1)-\psi_k(\zeta)=\frac{1}{\varrho_3}\,\psi_{k-1}(\zeta),\ k=1,\ldots,\beta \\ &\varrho_3(\psi_{\beta+1}(\zeta+1)-\psi_{\beta+1}(\zeta))=c_{\beta+2}\,\psi_\beta(\zeta)-\tau(\zeta). \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß sich $\psi_k(\zeta)$, $k=1,\ldots,\beta$, aus dem System (28) als Polynom vom Grad k ergibt, und daß grad $\psi_{\beta+1}\leq\beta$ ist.

Für $k=1$ ist ja

$$\psi_1(\zeta+1)-\psi_1(\zeta)=\frac{1}{\varrho_3},$$

also $\psi_1(\zeta)=\frac{1}{\varrho_3}B_1(\zeta)+d_1$, $d_1\in\mathbf{C}$ beliebig.

Es sei nun die Behauptung für $k-1$ richtig, und es sei

$$\frac{1}{\varrho_3}\,\psi_{k-1}=\sum_{l=1}^{k}C_l\,l\,\zeta^{l-1},\quad C_k\neq 0.$$

Aus der Gleichung für ψ_k und aus der Linearität folgt

$$\psi_k(\zeta)=\sum_{l=1}^{k}C_lB_l(\zeta)+d_k,\quad d_k\in\mathbf{C}\text{ beliebig},$$

und da grad $B_k(\zeta)=k$, grad $B_j(\zeta)=j$, $j<k$, so folgt grad $\psi_k(\zeta)=$ $=k$. Um für die letzte, inhomogene Gleichung für $\psi_{\beta+1}(\zeta)$ ebenfalls eine Polynomlösung vom formalen Grad β zu finden, bestimmen wir $c_{\beta+2}$ so, daß

$$\operatorname{grad}(c_{\beta+2}\,\psi_\beta(\zeta)-\tau(\zeta))\leq\beta-1.$$

Das ist, wegen grad $\psi_\beta(\zeta)=\beta$, für genau ein $c_{\beta+2}$ möglich.

Es sei dann

$$c_{\beta+2}\,\psi_\beta(\zeta)-\tau(\zeta)=\sum_{l=1}l\,D_l\,\zeta^{l-1}.$$

Dann folgt

$$\psi_{\beta+1}(\zeta)=\sum_{l=1}^{\beta}D_lB_l(\zeta)+d_{\beta+2},$$

also ein Polynom vom formalen Grad β, wie es sein muß.

Wir haben jetzt die Polynome $q_r(x_1, x_2)$ in (17) bestimmt, und es bleibt zu zeigen, daß für Unbestimmte x die Jacobische Matrix $\left\| \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right\|$ den Rang 3 hat. Dazu beachten wir, daß $q_1(x_1, x_2)$ von x_2 wirklich abhängt, und daß daher

$$\left| \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_{\beta+2})}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \right| \neq 0. \tag{29}$$

Es läßt sich zeigen, daß man im Fall grad $\chi < \beta$ mit einem ähnlichen Ansatz wie in § 2 $\mathfrak{R}$ schon als Überlagerung einer Umgebung des Ursprungs im $\mathbf{C}^3$ erhalten kann, i. a. führt aber dieser Ansatz zu einem Widerspruch. Dies sei hier kurz ausgeführt. Wir nehmen also an, daß der Fall $(J^{(1)}, R_2)$ vorliege, und daß explizit gelte:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \varrho_1 x_1 \\ x_2^{(1)} &= \varrho_2 x_2 + x_1 \\ x_3^{(1)} &= \varrho_3 x_3 + \sum_{k=1}^{\beta} b_k x_1^{\alpha+k\nu} x_2^{\beta-k}, \end{aligned}$$

also $b_0 = 0$.

Wir setzen als holomorphe Abbildung T an:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1^{\nu} \\ \xi_2 &= x_2, \qquad \text{analog für } \xi^{(1)} \\ \xi_3 &= x_3 + \sum_{k=0}^{\beta} B_k x_1^{\alpha+k\nu} x_2^{\beta-k}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1)} &= (x_1^{(1)})^{\nu} = \varrho_1^{\nu} x_1^{\nu} = \varrho_2 \xi_1 \\ \xi_2^{(1)} &= x_2^{(1)} = \varrho_2 x_2 + x_1^{\nu} = \xi_1 + \varrho_2 \xi_2 \end{aligned}$$

$$\xi_3^{(1)} = x_3^{(1)} + \sum_{k=0}^{\beta} B_k x_1^{(1)\alpha+k\nu} x_2^{(1)\beta-k} = \tag{30}$$

$$= \varrho_3 x_3 + \sum_{k=0}^{\beta} b_k x_1^{\alpha+k\nu} x_2^{\beta-k} + \sum_{k=0}^{\beta} B_k (\varrho_1 x_1)^{\alpha+k\nu} (\varrho_2 x_2 + x_1^{\nu})^{\beta-k} =$$

$$= \varrho_3 x_3 + \sum_{l=0}^{\beta} \left\{ b_{\beta-l} + \varrho_3 B_{\beta-l} + \sum_{0 \leq l+k < \beta} \binom{\beta-k}{l} \varrho_1^{\alpha+k\nu} \varrho_2^{l} B_k \right\} x_1^{\alpha+(\beta-l)\nu} x_2^{l}.$$

Wir machen nun für ξ_3 den Ansatz

$$\xi_3^{(1)} = \sigma \xi_3 = \sigma \left(x_3 + \sum_{k=0}^{\beta} B_k x_1^{\alpha + k\nu} x_2^{\beta - k} \right).$$

Durch Vergleich mit der letzten Zeile von (30) ergibt sich $\sigma = \varrho_3$, und ferner das Gleichungssystem für die $B_1, \ldots, B_{\beta-1}$:

$$b_0 = 0$$
$$b_{\beta-1} = -(l+1)\,\varrho_3 \varrho_2^{-1} B_{\beta-l-1} + B_{\beta-l+2} + \ldots, \quad l = \beta - 1, \ldots, 1, 0.$$

Die Bedingung $b_0 = 0$ hatten wir als Voraussetzung angenommen. Die übrigen Zeilen bilden aber ein eindeutig auflösbares rekursives Gleichungssystem für die $B_1, \ldots, B_{\beta-1}$, während B_β unbestimmt bleibt.

Es bleibt der Fall $(J^{(4)}, R_1)\ P_3 \neq 0$. Wir haben $P_3(x_1, x_2) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} b_\lambda x_1^\lambda x_2^{\nu-\lambda}$, und führen die Abkürzungen

(31)
$$z = \frac{x_2}{x_1}$$
$$P_3(x) = x_1^\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} b_\lambda \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\nu-\lambda} = x_1^\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} b_{\nu-\lambda} z^\lambda = x_1^\nu \chi(z) \qquad \text{ein.}$$

Die Substitution $x_1 \to x_1^{(1)} = \varrho_1 x_1,\ x_2 \to x_1 + \varrho_2 x_2$ bedeutet für z eine Translation

$$z \to z + \frac{1}{\varrho_1}$$

und für $P_3(x_1, x_2)$

$$P_3(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = x_1^\nu \chi\left(z + \frac{1}{\varrho_1}\right). \tag{32}$$

Wir machen wieder den Ansatz

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= x_1\\
\xi_2 &= q_1(x_1, x_2)\\
&\ \vdots\\
\xi_{\nu+1} &= q_\nu(x_1, x_2)\\
\xi_{\nu+2} &= x_3 + q_{\nu+1}(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

wobei die $q_j(x_1, x_2)$ geeignete Linearkombinationen der Zusatzmonome $x_1^\lambda x_2^{\nu-\lambda}$ sind, und für die Linearisierung

$$\begin{aligned} &\xi_1^{(1)} = \sigma_1 \xi_1 \\ (33) \qquad &\xi_\lambda^{(1)} = c_\lambda \xi_{\lambda-1} + \sigma_\lambda \xi_\lambda, \quad 2 \leq \lambda \leq \gamma + 2, \\ &\sigma_\lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Weiter gehen wir, wie im Fall $(J^{(1)}, R_3)$, über die Auflösung eines Systems von Differenzengleichungen vor.

Abschließend erhalten wir folgende *Übersicht. Im Fall $n = 3$ ist die Linearisierung möglich durch Überlagerung im $\mathbf{C}^3$ in den Fällen* $(J^{(1)}, R_1)$, $(J^{(1)}, R_3)$, $(J^{(2)}, R_1)$, $(J^{(3)}, R_1)$, $(J^{(5)}, R_1)$, *sowie*

$$\begin{aligned} &(J^{(1)}, R_2) \ \textit{mit}\ P_2 = 0 \\ &(J^{(1)}, R_2) \ \textit{mit}\ \tau = \underset{\text{in } x_2}{\operatorname{grad}} P_3 < \beta \\ &(J^{(4)}, R_1) \ \textit{mit}\ \tau = \underset{\text{in } x_2}{\operatorname{grad}} P_3 < \nu\,; \end{aligned}$$

durch Einbettung in den $\mathbf{C}^m$, $m > 3$, in den Fällen

$$\begin{aligned} &(J^{(1)}, R_2),\ P_2 \neq 0,\ \tau = \underset{\text{in } x_2}{\operatorname{grad}} P_3 = \beta,\ \textit{mit}\ m = \beta + 2 \\ &(J^{(4)}, R_1),\ P_3 \neq 0,\ \tau = \underset{\text{in } x_2}{\operatorname{grad}} P_3 = \nu,\ \textit{mit}\ m = \beta + 2. \end{aligned}$$

Literatur

[1] Bochner, S. and W. T. Martin: Several Complex Variables. Princeton University Press, Princeton 1948.

[2] Nörlund, N. E.: Vorlesungen über Differenzenrechnung. J. Springer, Berlin 1924.

[3] Peschl, E.: Über die Bilder von Sternbereichen. Ein allgemeiner Abbildungssatz im Raume mehrerer komplexer Veränderlichen. Bericht über die Mathematikertagung in Tübingen vom 23.–27. September 1946, S. 112–116. Mathematisches Institut der Universität Tübingen, 1946.

[4] Peschl, E. u. L. Reich: Kanonische Normalformen kontrahierender biholomorpher Abbildungen des $\mathbf{C}^3$. Math. Z. **111**, 333–349 (1969).

[5] Reich, L.: Das Typenproblem bei formal-biholomorphen Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt. Math. Ann. **179**, 227–250 (1969).