

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1970

MÜNCHEN 1971

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H.Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Berechnung vorgespannter Netzwerke

Die Lösung eines nicht-linearen elastischen Problems

Von **John H. Argyris** und **Dieter W. Scharpf**
in Stuttgart

Vorgelegt durch H. Neuber

Dem Andenken von Constantin Carathéodory gewidmet

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird ein auf der Matrizenverschiebungsmethode der Statik und Dynamik beruhendes Verfahren beschrieben, welches bei Einsatz moderner elektronischer Großrechenanlagen eine exakte Berechnung vorgespannter Netzwerke von beliebiger Form und Größe erlaubt. Auf diese Weise soll für die Errichtung leichter Flächentragwerke eine sichere Grundlage geschaffen werden, welche die Risiken der Bauausführung auf ein Minimum reduziert. Den aktuellen Anlaß für die Entwicklung der im folgenden genannten Rechenprogramme bildete die Untersuchung der Zeltdächer für die olympischen Spiele in München 1972.

Die Problematik der weitgespannten Netzwerke beruht auf der Tatsache, daß der für die Tragfähigkeit einer solchen Konstruktion maßgebliche Spannungszustand äußerst empfindlich gegen kleinste Änderungen der Seilgeometrie ist. Der Zuschnitt eines Netzes sollte daher mit der größtmöglichen Genauigkeit ermittelt werden, um zu vermeiden, daß auf der Baustelle übermäßig viel Zeit für das Nachspannen des Netzes aufgewendet werden muß oder daß sich unter Umständen der notwendige Spannungszustand überhaupt nicht erreichen läßt. Nur die elektronische Berechnung kann für ein Netzwerk mit vorgeschriebener Form und Spannung eine statisch verträgliche Geometrie in praktisch be-

liebig hoher Genauigkeit liefern. Im Gegensatz dazu liegen die beim bisher üblichen Modellbau unvermeidlichen Fehler in einer Größenordnung, welche für die Endausführung eine erhebliche Unsicherheit mit sich bringt.

Die Grundzüge des von uns eingeschlagenen Weges sollen in den folgenden Sätzen kurz umrissen werden. Das Verfahren beruht auf der sogenannten Steifigkeitsmatrix eines Systems, welche im vorliegenden Falle die Verformbarkeit eines elastischen und gespannten Netzwerkes als eine lineare Beziehung zwischen den Verschiebungen und Lasten beschreibt. Selbstverständlich müssen dabei auch Verschiebungen und Lasten durch Matrizen dargestellt sein. Die Steifigkeitsmatrix eines Netzes wird aufgrund einfacher kinematischer Zusammenhänge aus leicht zu berechnenden Element-Steifigkeiten einzelner Stäbe aufgebaut. Der Einfluß der Formänderung auf das Gleichgewicht des *gespannten* Netzwerkes, welche die Nichtlinearität des Problems verursacht, wird durch eine zusätzliche sogenannte geometrische Steifigkeit der Stabelemente simuliert, die der Stabkraft proportional ist. In der Ausgangsgeometrie eines Netzwerkes sind im allgemeinen die Gleichgewichtsbedingungen nicht erfüllt. Wir ermitteln dann eine Matrix von Ungleichgewichtskräften und erhalten über die Auflösung eines aus den Steifigkeits- und Last-Matrizen gebildeten linearen Gleichungssystems Verschiebungen, welche das Netzwerk in einer Weise deformieren, daß die Gleichgewichtsbedingungen besser als im ursprünglichen Zustand erfüllt sind. Den endgültigen Gleichgewichtsstand erreicht man in der Regel nicht sofort, weil die Steifigkeitsmatrix streng genommen nur die Deformierbarkeit bei unendlich kleinen Verschiebungen zu beschreiben vermag. Bei einer Wiederholung des soeben aufgezeigten Relaxationsprozesses kommt man jedoch rasch beliebig nahe an die tatsächliche Gleichgewichtslage heran.

Im folgenden Kapitel leiten wir zunächst die für den gegenwärtigen Zweck besonders wichtigen elastischen und geometrischen Steifigkeiten eines Stabes her, aus denen sich, wie bereits gesagt, die Gesamtsteifigkeit eines gespannten Netzwerkes aufbauen läßt. Einige der theoretischen Grundlagen wurden zwar bereits 1959 entwickelt und sind in der Literatur dokumentiert [1, 2, 3, 4, 5], beziehen sich aber auf eine speziell luftfahrttech-

nische Problemstellung. Hier unterbreiten wir eine neuartige, elegantere Darstellung der Theorie, die auf die nichtlineare Analyse vorgespannter Netzwerke ausgerichtet ist. Die Autoren möchten an dieser Stelle auch auf ihre Arbeiten über die Berechnung großer Verschiebungen in Rahmen, Platten, Schalen sowie zwei- und dreidimensionalen Kontinua hinweisen [6, 7, 8, 9].

Die Technik des Aufbaus der Steifigkeitsmatrix eines vollständigen Netzwerks aus den sogenannten Elementsteifigkeiten behandeln wir ebenfalls im zweiten Kapitel.

Die iterative Ermittlung der Gleichgewichtslage eines vorgespannten Netzwerks wird in Kapitel 3 eingehend erläutert. Insbesondere geben wir auch an, wie die Gleichgewichtsbedingungen überprüft werden und wie die Matrix der Ungleichgewichtskräfte berechnet wird. Anschließend zeigen wir, daß das zunächst aufgrund physikalischer Überlegungen hergeleitete Verfahren von mathematischem Standpunkt aus als Newtonverfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme gedeutet werden kann.

Im vierten Kapitel beschreiben wir eine Methode, welche es gestattet eine für die iterative Berechnung der Gleichgewichtslage hinreichend genaue Ausgangsgeometrie zu erzeugen, in der sowohl die Gestalt und Ausrichtung des Netzes als auch der Spannungszustand vorgeschrieben werden können. Die Entwicklung dieser Methode ergab sich aus der Tatsache, daß die mit Unregelmäßigkeiten behaftete, aus einem Modell vermessene Ausgangsgeometrie für unser Verfahren zur Ermittlung eines exakten Zuschnitts zu ungenau ist. Unseres Erachtens erübrigt sich durch dieses neu entwickelte Verfahren in Zukunft der Bau aufwendiger Meß- und Zuschnittsmodelle.

Fragen der praktischen Anwendung des Matrizenverschiebungsverfahrens zur Berechnung vorgespannter Netzwerke sind im fünften Kapitel zusammengefaßt. Insbesondere geben wir auch an, welche Ausgangsdaten benötigt werden und in welcher Form diese vorliegen sollten. Ferner beschreiben wir Maßnahmen, die es erlauben während der iterativen Berechnung des Gleichgewichts die vorgesehenen Seilspannungen aufrecht zu erhalten. Großen Wert haben wir auf eine möglichst zweckmäßige Ausgabe der Ergebnisse gelegt. Es ist für uns selbstverständlich, daß

wir genaue Werte der Längen und Spannkraften aller Netz-, Rand- und Abspannseile sowie der Maste liefern. Darüber hinaus haben wir Programme entwickelt, durch welche das bearbeitete Netzwerk in jedem Zustand und in jeder gewünschten Projektion automatisch aufgezeichnet werden kann. Schließlich sollte auch darauf hingewiesen werden, daß dasselbe Programm zur Ermittlung des Zuschnitts und zur Berechnung des Netzverhaltens unter Belastung benützt wird. Wir brauchen uns dabei sogar nicht auf äußere Lasten wie Eigengewicht, Schnee, Winddruck, usw. zu beschränken sondern können z. B. ebensogut den Einfluß einseitiger Erwärmung des Netzes erfassen.

Der Rahmen dieser Arbeit verbietet es leider die grundsätzlichen Fragen des Tragverhaltens und der Auslegung vorgespannter Netzwerke zu behandeln, was wir auch nicht als unsere Aufgabe betrachten. Wir möchten aber betonen, daß die hier dargestellte Methodik auch als ein ideales Werkzeug zum Studium dieser Probleme dienen kann. Zum Beispiel lassen sich in kurzer Zeit umfangreiche Parameteruntersuchungen durchführen, bei denen die Form des Netzes, die Richtungen der Seile und die Belastung mit geringerem Arbeitsaufwand innerhalb weiter Grenzen variiert werden können.

Die Verfasser möchten den Mitarbeitern des ISD, welche zum erfolgreichen Abschluß dieser Arbeit beigetragen haben, ihren herzlichen Dank aussprechen. Für die Unterstützung bei der Entwicklung und Anwendung der Rechenprogramme danken wir den Herren Siv.-Ing. O. Botterud, Dipl.-Ing. I. Grieger und vor allem Herrn Dipl.-Ing. Th. Angelopoulos, der sich durch besonders großen Einsatz hervorgetan hat. Die graphische Auswertung der Ergebnisse auf einem numerisch gesteuerten Zeichengerät haben die Herrn Dipl.-Ing. W. Aicher, Dr. R. E. Hammer und Dipl.-Ing. M. Müller ermöglicht.

Wir wollen hier auch die sehr gute Zusammenarbeit des ISD mit dem Ingenieurbüro Leonhardt und André anerkennen. Bei der Anwendung des Rechenverfahrens auf die Olympiadächer hat uns insbesondere Herr Dipl.-Ing. J. Noesgen tatkräftig unterstützt. Für viele wertvolle Anregungen danken wir Herrn Dr. Ing. J. Schlaich und Herrn M. Biguenet, Ingenieur M. et A.

2. Steifigkeitsmatrix eines vorgespannten Netzwerkes

2. a) Einführung

Wie bereits in der allgemeinen Einleitung gesagt wurde, beruht das hier beschriebene Verfahren zur Untersuchung vorgespannter Netzwerke auf der Berechnung einer Steifigkeitsmatrix, die für das gesamte System aus den Steifigkeiten einzelner Elemente aufgebaut wird. Als einzelne Elemente definieren wir in einem Netzwerk Stücke von Seilen, welche zwischen zwei Knoten liegen. Ein Knoten bedeutet dabei einen Kreuzungspunkt in dem zwei oder mehr Drahtseile verbunden sind. Da die so definierten Seilelemente dieselben statischen Eigenschaften besitzen wie die Stäbe eines Fachwerks, werden wir sie im weiteren stets als „Stäbe“ bezeichnen und den Begriff „Seil“ nur für die Gesamtheit eines durchlaufenden Seils verwenden.

Die im folgenden für die Elemente angegebenen Steifigkeitsmatrizen beschreiben die *lineare* Beziehung zwischen kleinen Verschiebungen der Knotenpunkte des Elements und den dadurch erzeugten Knotenpunktskräften. In einem nicht gespannten Stab bewirken die Verschiebungen in den Knoten nur elastische Kräfte \mathbf{P}_E . Die zusätzlichen Kräfte, die man benötigt um einen vorgespannten Stab zu verschieben, wollen wir geometrische Kräfte \mathbf{P}_G nennen. Entsprechend dieser Einteilung haben wir eine elastische und eine geometrische Steifigkeitsmatrix, \mathbf{k}_E bzw. \mathbf{k}_G , aufzustellen; s. a. Ref. 2. 3.

2. b) Geometrie, Verschiebungs- und Lastmatrix

Wir beginnen damit, daß wir die Lage des Stabelements im dreidimensionalen Raum durch einen geometrischen Vektor

$$\mathbf{x} = \{x_1 \ y_1 \ z_1 \ x_2 \ y_2 \ z_2\} \quad (6 \times 1) \quad (1)$$

beschreiben. Dabei sind x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die kartesischen Koordinaten der Knotenpunkte 1 und 2 des Stabs; siehe auch Abb. 1. Aus dem Vektor \mathbf{x} kann man sofort die momentane Länge des Stabs

$$l = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

und einen Einheitsvektor

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

berechnen, welcher die Richtung des Stabs angibt.

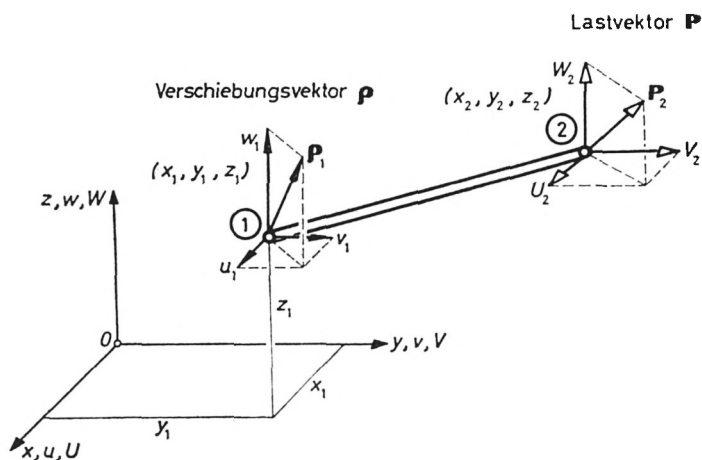


Abb.1 Geometrie, Verschiebungen und Lasten des Stabelements

Den Verschiebungsvektor des Stabs definieren wir als

$$\boldsymbol{\rho} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2\} = \{\boldsymbol{\rho}_1 \ \boldsymbol{\rho}_2\} \quad (6 \times 1) \quad (4)$$

wobei u_1, v_1, w_1 bzw. u_2, v_2, w_2 die kartesischen Komponenten der Verschiebungsvektoren $\boldsymbol{\rho}_1$ und $\boldsymbol{\rho}_2$ der Knoten sind; siehe Abb. 1. Der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{\rho}$ aus Gl. (4) entspricht genau dem geometrischen Vektor \mathbf{x} von Gl. (1), was für die Untersuchung großer Verschiebungen eine unabdingbare Voraussetzung ist. Haben nämlich vor einer Belastung die Geometrie des Stabs durch \mathbf{x}_{vor} gegeben und finden für das Element eine Verschiebung $\boldsymbol{\rho}$, so ergibt sich die neue Geometrie nach der Belastung einfach aus der Summe

$$\mathbf{x}_{\text{nach}} = \mathbf{x}_{\text{vor}} + \boldsymbol{\rho} \quad (5)$$

Entsprechend zu $\boldsymbol{\rho}$ von Gl. (4) führen wir nun den Lastvektor des Stabelements ein als

$$\mathbf{P} = \{U_1 \ V_1 \ W_1 \ U_2 \ V_2 \ W_2\} = \{\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2\} \quad (6 \times 1) \quad (6)$$

In \mathbf{P} sind also die sechs kartesischen Komponente der Kraftvektoren \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_2 enthalten, welche in den Knotenpunkten wirken; siehe Abb. 1.

Schließlich wollen wir noch die wichtigen Begriffe der natürlichen Verschiebungen und Lasten definieren. Wir nennen diese natürliche Verschiebung ρ_N des Stabelements die wesentliche elastische Deformation des Stabs, also seine Längenänderung. Aus dem Verschiebungsvektor \mathbf{p} von Gl. (4) ergibt sich mit dem Einheitsvektor \mathbf{e} aus Gl. (3) sofort

$$\begin{array}{lcl} \rho_N = \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_2 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_1 & = & -\mathbf{e}^t \mathbf{p}_1 + \mathbf{e}^t \mathbf{p}_2 \quad (7) \\ \text{Vektorschreibweise} & & \text{Matrizenschreibweise} \end{array}$$

Als natürliche Last P_N des Stabs bezeichnen wir die Zug- oder Druckkraft, welche dieser als Tragwerkselement aufnehmen kann. Infolge von P_N erhält man offensichtlich die Knotenpunktkräfte

$$\mathbf{P}_1 = -\mathbf{e} P_N; \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{e} P_N \quad (8)$$

Die Beziehungen (7) und (8) können nun zu den eleganteren dualen Matrixgleichungen

$$\rho_N = \mathbf{a}_N \mathbf{p} \quad \text{und} \quad \mathbf{P} = \mathbf{a}_N^t P_N \quad (9)$$

zusammengefaßt werden, wobei die (1×6) Matrix

$$\mathbf{a}_N = [-\mathbf{e}^t \quad \mathbf{e}^t] \quad (10)$$

ist.

2. c) Elastische Steifigkeitsmatrix des Stabelements

Die elastische Steifigkeit des Stabelements leitet sich am elegantesten aus der sogenannten natürlichen Steifigkeit k_N ab. Letztere beschreibt das Verhältnis zwischen natürlicher Last und natürlicher Verschiebung durch die bekannte Beziehung

$$P_N = \frac{EA}{l_0} \rho_N = k_N \rho_N \quad (11)$$

Hier bedeutet E den Elastizitätsmodul, A die Querschnittsfläche des Stabs und l_0 dessen ungedehnte Länge. Mit den Gln. (9) er-

halten wir aus Gl. (11) sofort die elastischen Knotenpunktskräfte \mathbf{P}_E infolge eines Verschiebungsvektors $\boldsymbol{\rho}$ zu

$$\mathbf{P}_E = \mathbf{a}_N^t k_N \mathbf{a}_N \boldsymbol{\rho} = \mathbf{k}_E \boldsymbol{\rho} \quad (12)$$

Wir haben somit die elastische Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}_E = \mathbf{a}_N^t k_N \mathbf{a}_N = \frac{EA}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{c}\mathbf{c}^t & -\mathbf{c}\mathbf{c}^t \\ -\mathbf{c}\mathbf{c}^t & \mathbf{c}\mathbf{c}^t \end{bmatrix} \quad (6 \times 6) \quad (13)$$

gefunden. Man beachte, daß \mathbf{k}_E als wesentliche Untermatrix nur die symmetrische (3×3) Matrix

$$\mathbf{k}'_E = \frac{EA}{l_0} \mathbf{c}\mathbf{c}^t \quad (14)$$

enthält.

2. d) Geometrische Steifigkeitsmatrix des Stabelements

Die im letzten Abschnitt angegebene Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}_E berücksichtigt nicht den Einfluß einer im Stab vorhandenen Vorspannung. Die Veränderung der Steifigkeit infolge einer bereits vorhandenen natürlichen Last P_N wird durch die geometrische Steifigkeit beschrieben, welche ihrerseits die elastischen Eigenschaften des Stabs unberücksichtigt läßt. Während gemäß Gl. (12) elastische Kräfte \mathbf{P}_E nur dann entstehen, wenn die Verschiebungen eine Änderung der Stablänge bewirken, entstehen infolge der Vorspannung P_N nur dann geometrische Kräfte \mathbf{P}_G , wenn $\boldsymbol{\rho}$ eine Rotation des Stabs enthält.

Wir zerlegen zunächst die Verschiebungsvektoren $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2$ der Knoten in Komponenten parallel und orthogonal zum Stab. Wir erhalten so

$$\boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{\rho}_{i, \text{par}} + \boldsymbol{\rho}_{i, \text{orth}} \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

mit

$$\boldsymbol{\rho}_{i, \text{par}} = (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\rho}_i) \mathbf{c} = \mathbf{c}\mathbf{c}^t \boldsymbol{\rho}_i \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\rho}_{i, \text{orth}} = \boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_{i, \text{par}} = [\mathbf{I}_3 - \mathbf{c}\mathbf{c}^t] \boldsymbol{\rho}_i \quad (16)$$

wobei \mathbf{I}_3 eine (3×3) Einheitsmatrix ist. Ein Maß für die Verdrehung des Stabs bildet der Vektor

$$\bar{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\rho}_{2, \text{orth}} - \boldsymbol{\rho}_{1, \text{orth}} = [\mathbf{I}_3 - \mathbf{c}\mathbf{c}^t] [\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1] \quad (17)$$

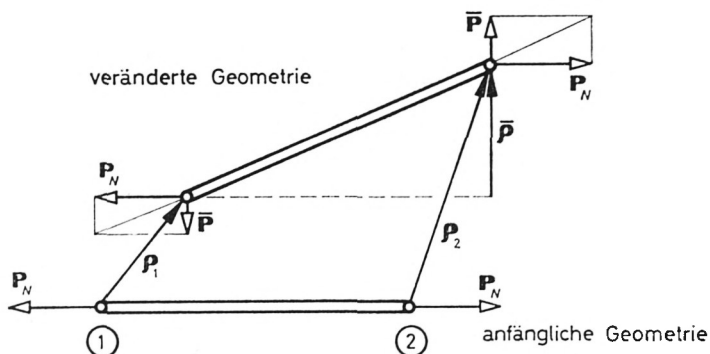


Abb.2 Zur Herleitung der geometrischen Steifigkeit des Stabelements

Wie Abb. 2 zeigt, erzeugt die Vorspannung P_N infolge von $\bar{\rho}$ ein Moment $M = P_N |\bar{\rho}|$, welchem durch die Knotenlasten

$$\mathbf{P}_1 = -\bar{\mathbf{P}}, \mathbf{P}_2 = \bar{\mathbf{P}} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{P}} = \frac{P_N}{l_0} \bar{\rho} \quad (18)$$

das Gleichgewicht gehalten wird. Die Gln. (17) und (18) können zusammengefaßt werden zu

$$\mathbf{P}_G = \frac{P_N}{l_0} \begin{bmatrix} -\bar{\rho} \\ \bar{\rho} \end{bmatrix} = \frac{P_N}{l_0} \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{c}\mathbf{c}^t) & -(\mathbf{I}_3 - \mathbf{c}\mathbf{c}^t) \\ -(\mathbf{I}_3 - \mathbf{c}\mathbf{c}^t) & (\mathbf{I}_3 - \mathbf{c}\mathbf{c}^t) \end{bmatrix} \boldsymbol{\rho} = \mathbf{k}_G \boldsymbol{\rho} \quad (19)$$

Wir haben somit die interessante Formel für die geometrische Steifigkeit des Stabelements

$$\mathbf{k}_G = \frac{P_N}{l_0} \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{c}\mathbf{c}^t) & -(\mathbf{I}_3 - \mathbf{c}\mathbf{c}^t) \\ -(\mathbf{I}_3 - \mathbf{c}\mathbf{c}^t) & (\mathbf{I}_3 - \mathbf{c}\mathbf{c}^t) \end{bmatrix} \quad (6 \times 6) \quad (20)$$

hergeleitet. Die Gesamtsteifigkeit des Stabelements erhalten wir wegen

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_E + \mathbf{P}_G = \mathbf{k}_E \boldsymbol{\rho} + \mathbf{k}_G \boldsymbol{\rho} = [\mathbf{k}_E + \mathbf{k}_G] \boldsymbol{\rho} = \mathbf{k} \boldsymbol{\rho} \quad (21)$$

einfach als die Summe von elastischer und geometrischer Steifigkeit zu

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_E + \mathbf{k}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{k}' & -\mathbf{k}' \\ -\mathbf{k}' & \mathbf{k}' \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}' = \frac{EA - P_N}{l_0} \mathbf{e}\mathbf{e}^t + \frac{P_N}{l_0} \mathbf{I}_3 \quad (22)$$

Auch die geometrische Steifigkeitsmatrix enthält wie die elastische nur eine wesentliche (3×3) Untermatrix, welche wieder symmetrisch ist. Für die Gesamtsteifigkeit eines Stabs müssen also nur die Größen

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{EA - P_N}{l_0} c_x^2 + \frac{P_N}{l_0}; & k_{22} &= \frac{EA - P_N}{l_0} c_y^2 + \frac{P_N}{l_0}; \\ k_{33} &= \frac{EA - P_N}{l_0} c_z^2 + \frac{P_N}{l_0} \\ k_{12} &= \frac{EA - P_N}{l_0} c_x c_y; & k_{13} &= \frac{EA - P_N}{l_0} c_x c_z; & k_{23} &= \frac{EA - P_N}{l_0} c_y c_z \end{aligned} \quad (23)$$

berechnet werden.

Es soll hier noch vermerkt werden, daß die angegebenen Matrizen \mathbf{k}_E und \mathbf{k}_G selbstverständlich auch zur Untersuchung von Fachwerken bei kleinen und großen Deformationen, sowie zur Berechnung der Knicklasten von Fachwerken angewendet werden können (siehe Ref. 3). Zwecks Abkürzung der Notation haben wir bisher die für ein einzelnes Element gültigen Matrizen \mathbf{P} , $\boldsymbol{\rho}$, \mathbf{k} nicht mit einem auf die Nummer des Elements verweisenden Index versehen. Im folgenden werden die genannten Symbole für noch zu definierende Supermatrizen benützt, während solche Matrizen, die nur für bestimmte Elemente gelten durch einen unteren Index bezeichnet werden.

2. e) Gesamtsteifigkeit des Netzwerks

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix eines Netzwerks läßt sich aus den einzelnen Elementsteifigkeiten aufgrund einfacher kinematischer Überlegungen aufbauen, welche besonders elegant als Boole'sche Kongruenttransformation dargestellt werden können [2, 3]. Wir definieren für das Gesamtsystem einen Verschiebungsvektor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma} &= \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \text{---} \quad u_n \quad v_n \quad w_n\} \\ &= \{r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4 \quad r_5 \quad r_6 \quad \text{---} \quad r_{m-2} \quad r_{m-1} \quad r_m\} \end{aligned} \quad (24)$$

in welchem alle erlaubten Freiheitsgrade zusammengefaßt sind. Aus \mathbf{r} können die Verschiebungen ρ_p eines typischen Elements p extrahiert werden mit Hilfe einer Boole'schen Matrix \mathbf{a}_p durch

$$\rho_p = \mathbf{a}_p \mathbf{r} \quad (25)$$

Verstehen wir nun unter ρ einen Supervektor aller (6×1) Elementverschiebungsvektoren ρ_p , so erhalten wir bei s Elementen

$$\underset{(6s \times 1)}{\rho} = \mathbf{a} \mathbf{r} \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} = \{\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \text{---} \quad \mathbf{a}_p \quad \text{---} \quad \mathbf{a}_s\} \quad (26)$$

Fassen wir analog die Lastvektoren der Elemente zu

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \text{---} \quad \mathbf{P}_p \quad \text{---} \quad \mathbf{P}_s\} \quad (27)$$

zusammen, so erhalten wir aus Gl. (21) sofort

$$\mathbf{P} = \mathbf{k} \rho \quad (28)$$

wobei nun \mathbf{k} die $(6s \times 6s)$ Superdiagonalmatrix

$$\mathbf{k} = [\mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k}_2 \quad \text{---} \quad \mathbf{k}_p \quad \text{---} \quad \mathbf{k}_s] \quad (29)$$

bedeutet.

Wir führen nun entsprechend \mathbf{r} von Gl. (24) einen Gesamtlastvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \{U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad W_2 \quad \text{---} \quad U_n \quad V_n \quad W_n\} \\ &= \{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6 \quad \text{---} \quad R_{m-2} \quad R_{m-1} \quad R_m\} \end{aligned} \quad (30)$$

ein. Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit folgt sofort die zu Gl. (26) duale Beziehung

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}^t \mathbf{P} \quad (31)$$

Mit den Gln. (26) und (31) liefert nun Gl. (28), daß

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}^t \mathbf{P} = \mathbf{a}^t \mathbf{k} \rho = \mathbf{a}^t \mathbf{k} \mathbf{a} \mathbf{r} = \mathbf{K} \mathbf{r} \quad (32)$$

gilt und wir erhalten damit die Gesamtsteifigkeit des Netzwerks zu

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}^t \mathbf{k} \mathbf{a} \quad (33)$$

Für solche einfache Systeme wie sie Netzwerke darstellen, kann die Boole'sche Transformation der Gl. (33) besonders leicht durchgeführt werden. Entsprechen zum Beispiel die Elementverschiebungen des p -ten Elements den Freiheitsgraden $i, i+1,$

$i + 2, j, j + 1, j + 2$ innerhalb des Vektors \mathbf{r} so wird die Untermatrix \mathbf{k}'_p der Elementsteifigkeit (siehe Gl. (22)) wie in Abb. 3 gezeigt in der Gesamtsteifigkeit \mathbf{K} akkumuliert. Wäre der Knoten 2 des Elements p eingespannt, so müßte nur einmal \mathbf{k}'_p zu der diagonalen Untermatrix von \mathbf{K} addiert werden. Wegen der offensichtlichen Symmetrie von \mathbf{K} reicht es selbstverständlich, wenn man nur deren obere Dreiecksmatrix aufbaut.

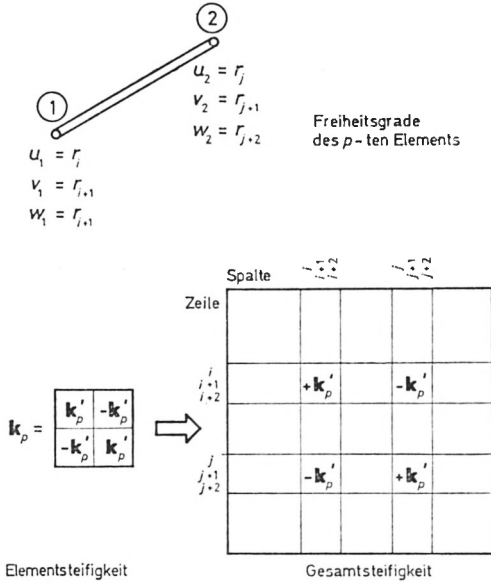


Abb.3 Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix

3. Iterative Berechnung des Gleichgewichtszustandes eines vorgespannten Netzwerks.

3. a) Die Gleichgewichtsbedingung des vorgespannten Netzwerks

Wir gehen davon aus, daß für ein vorgespanntes Netzwerk die elastischen Eigenschaften (EA) und die ungedehnten Längen l_0 der einzelnen Stäbe sowie die Geometrie des gesamten Systems durch einen Supervektor \mathbf{x} gegeben sind. Bei s Elementen ist somit \mathbf{x} ein $(6s \times 1)$ -Vektor, dessen Untermatrizen die (6×1) -

Vektoren der Gl. (1) bilden. Nach Gl. (2) können nun die tatsächlichen Längen l_p der Stäbe berechnet werden, aus denen sich die natürlichen Lasten

$$P_{Np} = \frac{EA}{l_{0p}} (l_p - l_{0p}) \quad p = 1, 2, \dots, s \quad (34)$$

ergeben. Über die nach Gl. (3) aus \mathbf{x} ermittelten Einheitsvektoren \mathbf{e}_p werden sodann gemäß Gl. (10) die \mathbf{a}_N -Matrizen aller Stäbe aufgebaut.

Wenn auf das Gesamtnetzwerk eine Belastung \mathbf{R} (siehe Gl. (30)) wirkt, so kann unter Verwendung der zweiten Gl. (9) und Gl. (31) die Gleichgewichtsbedingung geschrieben werden als

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}^t \mathbf{a}_N^t \mathbf{P}_N \quad (35)$$

(Vergl. auch Ref. 6). Dabei muß selbstverständlich \mathbf{a}_N als $(s \times 6s)$ Superdiagonalmatrix

$$\mathbf{a}_N = [\mathbf{a}_{N1} \quad \mathbf{a}_{N2} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{Np} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{Ns}] \quad (36)$$

verstanden werden und \mathbf{P}_N ist der $(s \times 1)$ -Vektor

$$\mathbf{P}_N = \{P_{N1} \quad P_{N2} \quad \dots \quad P_{Np} \quad \dots \quad P_{Ns}\} \quad (37)$$

mit den Elementen P_{Np} aus Gl. (34).

In der Gleichgewichtsbedingung (35) sind nur die Matrizen \mathbf{P}_N und \mathbf{a}_N von der augenblicklichen Geometrie \mathbf{x} des Systems abhängig, während der Lastvektor \mathbf{R} und die kinematische Matrix \mathbf{a} von der Lage des Netzwerks unabhängig sind.

In einem näherungsweise ermittelten Anfangszustand des Netzwerkes wird natürlich die Gleichgewichtsbedingung (35) nicht erfüllt sein. Dasselbe gilt in einem deformierten Zustand des Systems, wenn die durch Auflösung der Gl. (32) berechneten Verschiebungen \mathbf{r} nicht sehr klein sind, wie es bei der Aufstellung der Steifigkeitsmatrizen vorausgesetzt wurde. Für eine solche Ungleichgewichtslage des Netzwerkes definieren wir die Ungleichgewichtskräfte \mathbf{R}_u durch

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{R} - \mathbf{a}^t \mathbf{a}_N^t \mathbf{P}_N \quad (38)$$

Die letztere Beziehung besagt einfach, daß man im Knotenpunkt i den Vektor \mathbf{R}_{ui} der Ungleichgewichtskraft erhält aus der

Differenz zwischen der im Knoten vorhandenen äußeren Kraft \mathbf{R}_i und der Vektor-Summe der Kräfte \mathbf{P}_N in denjenigen Stäben ist, welche im Knoten i zusammenkommen.

Im Rahmen einer numerischen Rechnung werden wir die Gleichgewichtsbedingung als erfüllt ansehen, wenn alle Komponenten des Vektors \mathbf{R}_u unter einer gewissen Schranke liegen. Da ein Netzwerk innerhalb der Tangentialebene sehr viel steifer ist als in der zugeordneten Normalenrichtung, empfiehlt es sich in der Praxis verschiedene Schranken für die tangentialen und normalen Komponenten der Ungleichgewichtskräfte einzuführen.

3. b) Iterative Ermittlung des Gleichgewichtszustandes

Aus den im vorhergehenden Abschnitt über das Gleichgewicht eines Netzwerkes angestellten Betrachtungen folgt auf natürliche Weise eine iterative Methode zur Ermittlung der Gleichgewichtslage, welche auch als ein Relaxationsverfahren bezeichnet werden kann. Im folgenden wollen wir einen typischen Iterationsschritt betrachten; vergleiche Ref. 7. Die im Verlaufe der Iteration sich verändernden Größen werden dabei durch hochgestellte Indices bezeichnet, welche die Nummer des Iterationsschritts anzeigen.

Die Geometrie zu Beginn des i 'ten Iterationsschritts sei durch den Supervektor \mathbf{x}^i gegeben, aus dem sich eine Supermatrix \mathbf{a}_N^i und die natürlichen Lasten \mathbf{P}_N^i wie beschrieben berechnen lassen. Man erhält so die Ungleichgewichtskräfte

$$\mathbf{R}_u^i = \mathbf{R} - \mathbf{a}^t (\mathbf{a}_N^i)^t \mathbf{P}_N^i \quad (39)$$

welche als eine auf dem Netzwerk verbleibende Belastung angesehen werden können. Einen der Gleichgewichtslage des Systems besser angepaßten Zustand des Tragwerks kann man nun finden, indem man die Deformation unter der Last \mathbf{R}_u^i berechnet. Mit der für die Geometrie \mathbf{x}^i gültigen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^i berechnen wir nach Gl. (32) die Verschiebungen

$$\mathbf{r}^i = (\mathbf{K}^i)^{-1} \mathbf{R}_u^i \quad (40)$$

Gl. (26) liefert sodann die Elementverschiebungen

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{a} \mathbf{r}^i \quad (41)$$

so daß nach Gl. (5) die neue Geometrie

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \mathbf{p}^i \quad (42)$$

folgt. Damit ist ein Zyklus der Iteration abgeschlossen und man kann nun einen neuen mit der Berechnung der $i + 1$ 'ten Ungleichgewichtskräfte \mathbf{R}_u beginnen. Falls alle Komponenten von \mathbf{R}_u^{i+1} unter der vorgegebenen Schranke liegen, wird die Iteration abgebrochen.

Normalerweise konvergiert die Iteration sehr schnell, wenn die anfänglichen Ungleichgewichtskräfte \mathbf{R}_u^0 nicht zu groß sind. Wenn man von einem Gleichgewichtszustand des vorgespannten Netzwerkes ausgeht und die Deformation unter einer Belastung \mathbf{R} berechnen will, so kann man die \mathbf{R}_u sehr einfach dadurch klein halten, daß man die Last in einer Reihe von kleinen Schritten \mathbf{R}_Δ aufbringt. Kennt man dagegen noch keinen Gleichgewichtszustand, wie es bei einem vorgespannten Netzwerk am Beginn der Untersuchung die Regel ist, so kann es notwendig werden, daß man das System nur mit einem gewissen Teil $\mathbf{R}_{u\Delta}^i$ der Ungleichgewichtskräfte \mathbf{R}_u^i belastet, oder daß man die Größe der Verschiebungen \mathbf{r}^i beschränkt. Ernsthafte Konvergenzprobleme sind in der Praxis noch nie aufgetreten. Bei der einfachen physikalischen Bedeutung der iterativen Methode ist es für den Ingenieur stets sehr leicht solche Maßnahmen zu treffen, welche die Konvergenz erzwingen.

3. c) Die iterative Berechnung des Gleichgewichts als Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems mit Hilfe des Newton Verfahrens

Als eine interessante Ergänzung der Theorie soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, daß die angegebene Methode zur Berechnung der Gleichgewichtslage als eine Anwendung des bekannten Newton-Verfahrens zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems interpretiert werden kann. Diese Deutung erklärt die normalerweise außerordentlich rasche Konvergenz der Iteration, welche dem Newton-Verfahren allgemein zu eigen ist. Gleichzeitig soll noch einmal betont werden, daß die beim Newton-Verfahren häufig auftretenden Konvergenzschwierigkeiten aus den angeführten physikalischen Gründen nicht befürchtet werden

müssen. Zur Abkürzung der Notation werden wir eine Schreibweise mit Ableitungen nach Matrizen und Supermatrizen benutzen, deren Bedeutung der Leser leicht erkennen wird; siehe auch Ref. 6.

Wir beginnen mit der Gl. (38) und schreiben alle von der Geometrie abhängigen Matrizen als Funktion des Supervektors \mathbf{x} . Es wird so

$$\mathbf{R}_u(\mathbf{x}) = \mathbf{R} - \mathbf{a}^t \mathbf{a}_N^t(\mathbf{x}) \mathbf{P}_N(\mathbf{x}) \quad (43)$$

Bei einer Änderung $d\mathbf{x}$ der Geometrie erhält man eine Veränderung der Ungleichgewichtskräfte

$$d\mathbf{R}_u = \frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (44)$$

Wegen Gl. (5) gilt in einem so einfachen System wie es ein Netzwerk darstellt, daß die Änderung der Geometrie $d\mathbf{x}$ gleich den inkrementalen Elementverschiebungen $d\boldsymbol{\rho}$ ist, d. h.

$$d\mathbf{x} = d\boldsymbol{\rho} \quad (45)$$

und somit auch

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (46)$$

Mit Gl. (26) ergibt sich ferner

$$d\boldsymbol{\rho} = \mathbf{a} d\mathbf{r} = d\mathbf{x} \quad (47)$$

wobei $d\mathbf{r}$ ein inkrementaler Vektor der Verschiebungen des Gesamtsystems (entsprechend \mathbf{r}) ist. Die Gl. (43) liefert nun

$$d\mathbf{R}_u = -\mathbf{a}^t \left[\frac{\partial \mathbf{a}_N^t}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{P}_N + \mathbf{a}_N^t \frac{\partial \mathbf{P}_N}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right] \mathbf{a} d\mathbf{r} \quad (48)$$

Betrachten wir zunächst den Ausdruck $\mathbf{a}_N^t \frac{\partial \mathbf{P}_N}{\partial \boldsymbol{\rho}}$. Aus der ersten Gleichung (1) folgt in Verbindung mit Gln. (11) und (12)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_N^t \frac{\partial \mathbf{P}_N}{\partial \boldsymbol{\rho}} &= \mathbf{a}_N^t \frac{\partial \mathbf{P}_N}{\partial \boldsymbol{\rho}_N} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_N}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \mathbf{a}_N^t \frac{\partial \mathbf{P}_N}{\partial \boldsymbol{\rho}_N} \mathbf{a}_N \\ &= \mathbf{a}_N^t \mathbf{k}_N \mathbf{a}_N = \mathbf{k}_E \end{aligned} \quad (49)$$

d. h. dieser Term bedeutet einfach die Supermatrix der elastischen Elementsteifigkeiten.

Aus Mangel an Raum können wir hier nicht ausführlich die Differentiation von \mathbf{a}_N nach dem geometrischen Vektor \mathbf{x} behandeln. Der Leser kann die Ableitung jedoch unter Verwendung der Gln. (10) und (3) ausführen, wobei die Definition von \mathbf{x} durch Gl. (1) zu beachten ist. Eine detaillierte und weitergehende Darstellung findet man auch in früheren Veröffentlichungen der Verfasser [6, 9]. Das Ergebnis ist einfach, daß

$$\frac{\partial \mathbf{a}_N}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{P}_N = \mathbf{k}_G \quad (50)$$

d. h. gleich der geometrischen Steifigkeit ist.

Wir haben somit gezeigt, daß bei einer Änderung der Geometrie $d\mathbf{x}$ die Änderung der Ungleichgewichtskräfte

$$d\mathbf{R}_u = -\mathbf{a}^t [\mathbf{k}_E + \mathbf{k}_G] d\mathbf{x} = -\mathbf{a}^t \mathbf{k} d\mathbf{r} = -\mathbf{K} d\mathbf{r} \quad (51)$$

ist. Im Newton-Verfahren muß nun ein solches $d\mathbf{R}_u$ bestimmt werden, daß

$$\mathbf{R}_u + d\mathbf{R}_u = \mathbf{0} \quad (52)$$

gilt. Für die inkrementalen Verschiebungen $d\mathbf{r}$ besteht also das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{R}_u - \mathbf{K} d\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad d\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}_u \quad (53)$$

Diese Beziehung entspricht offensichtlich genau der Gl. (40), welche im vorausgegangenen Abschnitt aus rein statischen Überlegungen hergeleitet wurde.

Mit diesen ergänzenden Bemerkungen wollen wir nun die Darstellung der Theorie abschließen und uns mehr den praktischen Problemen bei der Untersuchung vorgespannter Netzwerke zuwenden.

4. Ermittlung einer angenäherten Anfangsgeometrie

4. a) Anforderungen an die Anfangsgeometrie des vorgespannten Netzwerks

Die Berechnung eines vorgespannten Netzwerks nach der Matrizenverschiebungsmethode geht von einem Zustand aus, in dem die Lage der Knotenpunkte und die ungedehnten Längen der Stäbe sowie deren elastische Eigenschaften bekannt sind. Die erste Aufgabe ist es daher, eine Anfangsgeometrie zu ermitteln,

in der selbstverständlich die Gleichgewichtsbedingungen nicht oder nur näherungsweise erfüllt sein können. Die Anfangsgeometrie wird also allein durch architektonische Anforderungen bestimmt, die in diesem Abschnitt zusammengestellt werden sollen.

Die räumlichen Begrenzungen für das zu errichtende Netzwerk sind durch den gegebenen Unterbau bestimmt, der als unveränderlich betrachtet wird. Die Gestalt des Netzes wird in den Grundzügen nach architektonischen Gesichtspunkten festgelegt und es ist die Aufgabe des Ingenieurs ein Tragwerk der gewünschten Form zu konstruieren. Zu diesem Zweck wird das Netzwerk zuerst mit Hilfe analytischer Verfahren statisch berechnet. Wir können hier nicht auf die dabei angewendete Technik eingehen und möchten auch feststellen, daß die entsprechenden Untersuchungen für die im ISD nach der Matrizenverschiebungsmethode berechneten Netzwerke vom Ingenieurbüro Leonhardt und André durchgeführt wurden. Die genannten Berechnungen liefern Werte für die im Netzwerk aufgrund der Form und Belastung notwendigen Vorspannungen. Zugleich können auch die Beanspruchungen der Rand- und Abspannseile sowie der Masten ermittelt werden. Die Dimensionierung aller Seile und Masten wird nach diesen Spannungswerten vorgenommen. Die sich ergebenden Werte für die Querschnittsflächen und die elastischen Eigenschaften der Stäbe werden selbstverständlich auch für den Aufbau der Steifigkeitsmatrix benötigt und verwendet. Nach dieser ersten statischen Berechnung werden auch diejenigen Punkte ermittelt, in denen die Abspannseile und Stützmasten am Netz befestigt werden. Bei der Analyse des Netzwerks nach der Matrizenverschiebungsmethode ist es am besten die genannten Punkte festzuhalten. Die genaue Lage der Fundamente für die Stützmaste und der Verankerung für die Abspannseile kann nach der Berechnung des eigentlichen Netzwerks aufgrund einer einfachen Gleichgewichtsbetrachtung exakt ermittelt werden. Beim Bau der Olympiadächer entstand infolge der großen Zeitnot leider die extrem ungünstige Situation, daß die Fundamente sowohl bezüglich ihrer räumlichen Lage als auch bezüglich der Richtung in der sie Kräfte aufnehmen können völlig fixiert waren, bevor eine Berechnung des Netzwerks nach der hier beschriebenen Me-

thode durchgeführt wurde. Die Ermittlung eines Zuschnitts bei Einhaltung der aus statischen Gründen vorgesehenen Netzspannungen wurde dadurch außerordentlich erschwert.

Eine sehr wichtige Anforderung an das Netzwerk hat den fertigungstechnischen Grund, daß es als ebenes quadratisches Seilnetz vorgefertigt wird. Es besteht also die Bedingung, daß alle Stäbe mit Ausnahme der Randseile und der Anschlußstücke an die Randseile eine konstante Länge haben. Dies hat zur Folge, daß die Koordinaten der Knotenpunkte in der Anfangsgeometrie mit sehr großer Genauigkeit vorliegen müssen; denn die Differenz zwischen den aus den Koordinaten berechneten Seillängen und der konstanten Soll-Länge muß bei allen Stäben unter Berücksichtigung ihrer elastischen Eigenschaften die vorgesehenen Spannkkräfte liefern.

Zusammengefaßt ergeben sich somit für die Anfangsgeometrie eines Netzwerkes die folgenden Bedingungen:

1. Alle Knotenpunkte liegen auf einer durch die Form des Netzwerkes bestimmten Fläche.
2. Diejenigen Punkte, in welchen Abspannseile und Masten befestigt werden, müssen streng eingehalten werden.
3. In den Stäben sollen die vorgesehenen Spannungen wirken.
4. Alle inneren Stäbe müssen eine konstante Soll-Länge besitzen.

Bei der iterativen Ermittlung der Gleichgewichtslage läßt es sich selbstverständlich nicht vermeiden, daß die zunächst vorgesehene Form verändert wird, d. h. die erste Bedingung wird nicht mehr eingehalten. Je besser die Gleichgewichtsbedingung in der Anfangsgeometrie eingehalten wird, desto kleiner wird aber die Verformung sein. Die dritte Bedingung kann ebenfalls nicht für alle Stäbe aufrechterhalten bleiben, da sonst die vierte Forderung nicht erfüllt werden könnte. Streng beachtet werden also nur die 2. und 4. Bedingung. Später werden noch Maßnahmen beschrieben, die es erlauben, die vorgesehenen Werte der Seilspannung mit hoher Genauigkeit zu erreichen, so daß keinesfalls die vorgesehenen Seilstärken verändert werden müssen.

4. b) Daten für die Anfangsgeometrie

Wir wollen im folgenden insbesondere darstellen, in welcher Form die Ausgangsdaten für die Ermittlung einer Anfangsgeometrie vorliegen sollten und beginnen dabei mit der Beschreibung der geometrischen Form der Netzfläche. Zur Berechnung des Grundzustandes des Netzwerks gehen wir aus von einer Funktion $z = z(x, y)$, welche für jeden Punkt in einer Grundrißebene – sie sei die xy -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems – die Höhe z der Netzfläche über der Ebene liefert. Am zweckmäßigsten ist es die Funktion als Polynom in zwei Variablen

$$\begin{aligned} z &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{20}y^2 + \dots \\ &= \sum_{n, m} a_{nm} x^n y^m \end{aligned} \quad (54)$$

anzusetzen. Die Koeffizienten a_{nm} können nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt werden, wenn eine hinreichende Anzahl von auf der gewünschten Netzfläche liegenden Punkten gegeben ist. Bei den von uns bisher untersuchten Netzwerken erhielten wir solche Daten vom Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, Universität Stuttgart, in dem eine Auswertung der im Institut für leichte Flächentragwerke, ebenfalls Universität Stuttgart, gebauten Modelle durchgeführt wurde. Wir möchten an dieser Stelle bemerken, daß uns der Bau eines aufwendigen Meßmodells nicht notwendig erscheint, nur um eine mathematische Beschreibung der Netzfläche zu erhalten. Wenn von Anfang an eine Berechnung nach der Matrizenverschiebungsmethode eingeplant wird, sollte die Anfertigung eines einfachen Tüllmodells ausreichen. Der Mehraufwand an Computerzeit für die iterative Ermittlung der Gleichgewichtslage aus einer eventuell schlechteren Anfangsgeometrie verursacht sehr viel niedrigere Unkosten als die Erstellung eines in seinen elastischen Eigenschaften der Bauausführung ähnlichen Modells, die außerdem sehr lange Zeit beansprucht.

Zurückkommend auf die Polynomdarstellung der Netzfläche möchten wir noch bemerken, daß es sich am besten bewährt hat, die Ordnung des Polynoms niedrig zu halten, z. B. $n, m \leq 4$, und dafür die gesamte Netzfläche in eine Anzahl relativ kleiner Bereiche aufzuteilen, in denen ein bestimmter Satz von Koeffizienten

a_{nm} gilt. Eine erste Unterteilung des gesamten Systems ergibt sich meist schon dadurch, daß das Netzwerk aus mehreren sogenannten Feldern zusammengesetzt ist, welche durch starke Randseile abgegrenzt sind und selbständige Tragwerke bilden. Die oben erwähnten Fixpunkte der Netzfäche werden am einfachsten dadurch berücksichtigt, daß man mit Lagrange'schen Parametern Nebenbedingungen in die Summe der Fehlerquadrate einführt.

Der Verlauf der Randseile wird im allgemeinen nur in der Grundrißebene beschrieben. Wegen der allgemeinen Form und Lage der Randseile kommt dabei nur eine Parameterdarstellung in Frage. Wir benützen drei verschiedene Arten von Parametern t , nämlich

$$\begin{aligned} 1. \quad & x = t, \quad y = P(t) \\ 2. \quad & y = t, \quad x = P(t) \\ 3. \quad & x = x_m + P(t) \cos t, \quad y = y_m + P(t) \sin t \end{aligned} \quad (55)$$

wobei $P(t)$ ein Polynom in t bezeichnet. Selbstverständlich handelt es sich nur im 3. Fall um eine echte Parameterdarstellung. Die Polynome $P(t)$ können in der Regel ebenfalls auf die maximal 4. Ordnung beschränkt werden. Eine mathematische Beschreibung der Höhe z der Randseile ist normalerweise unnötig. Um jedoch sicher zu gehen, daß ein zwischen zwei benachbarten Feldern verlaufendes Randseil trotz der verschiedenen Polynome für die Netzflächen der einzelnen Felder eine glatte Kurve bildet, empfiehlt es sich in solchen Fällen auch ein Polynom $z = P(t)$ aufzustellen.

Schließlich haben wir noch die Beschreibung der Sollspannung sowie der EA -Werte zu behandeln. Bei der Beschreibung der Kräfte kann mit hinreichender Genauigkeit angenommen werden, daß die Projektion des Stabkraftvektors $P_N \mathbf{e}$ auf einen festen Einheitsvektor \mathbf{e} konstant ist. Wir erhalten somit

$$P_N = H / |\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}| \quad (56)$$

wobei der Wert der Horizontalkraft H für jedes Seil vorgeschrieben ist. In der Praxis kann H als stückweise lineare Funktion der Seilnummer dargestellt werden, wenn die Seile fortlaufend nume-

riert sind. Für die stehenden und hängenden Seile müssen natürlich zwei verschiedene orthogonale Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ benutzt werden.

Ebenso wie die Horizontalkraft H können auch die EA -Werte der Seile als Funktion der Seilnummer beschrieben werden.

Sind nach der beschriebenen Methode die Werte von P_N und EA für einen Stab bekannt, so ergibt sich aus der konstanten ungedehnten Länge l_0 sofort dessen tatsächliche Länge im Anfangszustand des Netzwerkes zu

$$l_s = l_0 \left(1 + \frac{P_N}{EA} \right) \quad (57)$$

4. c) Erzeugung eines Ausgangsnetzes auf der mathematischen Fläche

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren angegeben, mit dem auf eine mathematisch definierte Fläche ein gleichmaschiges Netz gelegt wird. Bei den bisher im ISD berechneten Netzwerkes wäre es grundsätzlich auch möglich gewesen, für die aus dem Modell vermessene Geometrie nur einen Ausgleich der Stablängen im Innern durchzuführen. In diesem Fall müßte man z. B. – wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben – die Soll-Länge aller inneren Stäbe definieren. Die Differenz zwischen gemessener Länge und Soll-Länge liefert dann ein System von Stabkräften P_N , aus welchen nach Gl. (38) die Ungleichgewichtskräfte berechnet werden können. Somit kann also eine Iteration zur Ermittlung der Gleichgewichtslage gestartet werden. Die beim Modellbau in verkleinertem Maßstab unvermeidbaren Abweichungen von der Gleichmaschigkeit des Netzes sind jedoch selbst bei sorgfältigster Ausführung der Modelle so groß, daß man nicht mehr erwarten darf, den für die Tragfähigkeit des Netzwerkes notwendigen Spannungszustand zu erreichen. Außerdem ist eine große Deformation des Netzes in den Randbereichen zu erwarten, wobei gerade dort noch erschwerend hinzukommt, daß man nicht weiß, wie stark die im Modell eingebauten Randseile auf Biegung und Torsion beansprucht wurden. Wegen der genannten Schwierigkeiten empfehlen wir für die Berechnung eines Netzwerkes die anfängliche Lage der Knoten nach der im weiteren beschriebenen Methode zu ermitteln.

Wir gehen aus von einem Punkt der mathematischen Netzfläche, in dem wir zwei aufeinander senkrechte Ebenen definieren, welche ihrerseits entweder orthogonal zur Grundrißebene oder eventuell auch orthogonal zur Tangentialebene der Netzfläche sind. Entlang der beiden räumlichen Kurven, in denen die Ebenen die Netzfläche schneiden, können leicht Knotenpunkte bestimmt werden, welche untereinander einen vorgeschriebenen Sollabstand (siehe z. B. Gl. (57)) besitzen. Wir möchten an dieser Stelle betonen, daß damit abgesehen von später zu besprechenden Randzonen bereits die Lage sämtlicher Knotenpunkte des gleichmaschigen Netzes festgelegt ist. Auf eine optimale Auswahl des Anfangspunktes und der Anfangsrichtungen des Netzes kann im Rahmen der vorliegenden Arbeit leider nicht näher eingegangen werden.

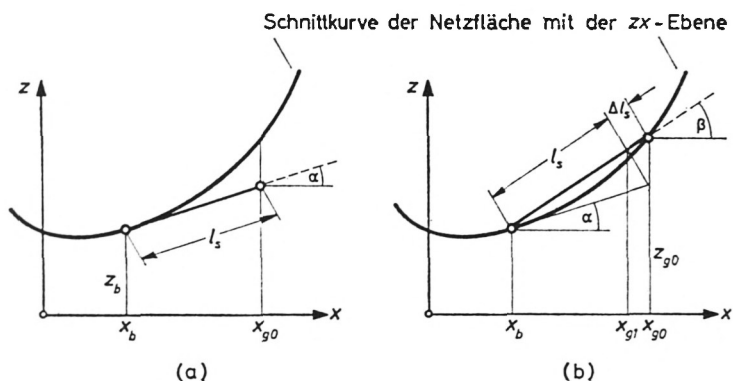


Abb.4 Ermittlung von Knotenpunkten auf Schnittkurven

Die Technik der Ermittlung der Knotenpunkte auf den Schnittkurven wird hier nur für den einfachen Fall beschrieben, daß die Schnittebene die zx -Ebene des Koordinatensystems ist, da der allgemeinere Fall durch eine Koordinatentransformation auf den elementaren zurückgeführt werden kann. Wir müssen nun nur die x -Koordinaten der Knoten berechnen. Wie in Abb. 4a gezeigt, bestimmen wir zunächst einen Rohwert x_{g0} des gesuchten Punktes zu

$$x_{g0} = x_b + l_s \cos \alpha \quad (58)$$

wobei l_s die vorgeschriebene Soll-Länge und x_b die Koordinate eines bekannten Punktes sind. Die Gleichung der Netzfläche liefert einen zu x_{g0} passenden Wert z_{g0} . Der Abstand zwischen den Punkten $(x_b, 0, z_b)$ und $(x_{g0}, 0, z_{g0})$ ist nun nicht mehr gleich l_s , sondern $l_s + \Delta l_s$. Einen verbesserten Wert x_{g1} berechnet man wie in Abb. 4b gezeigt aus

$$x_{g1} = x_{g0} - \Delta l_s \cos \beta \quad (59)$$

Wir kommen so zu einem Iterationsverfahren, das sehr schnell konvergiert und mit dem praktisch jede gewünschte Genauigkeit des Seilabstandes erreicht werden kann.

Die weiteren Knotenpunkte des Netzes können sehr einfach ermittelt werden, indem man zu jeweils zwei auf der Netzfläche liegenden bekannten Punkten einen dritten bestimmt, der von den beiden anderen vorgeschriebenen Abstände hat und selbst auf der Netzfläche liegt. Am zweckmäßigsten ist es dabei eine Erweiterung der bereits beschriebenen iterativen Methode zur Berechnung der Knoten auf den Ausgangskurven anzuwenden, die aber so offensichtlich ist, daß sie hier nicht detailliert werden muß.

Besonders wichtig ist auch das Problem des Randbereichs eines Netzes. Selbstverständlich können die Längen der an das Randseil angeschlossenen Netzstäbe nicht von vorne herein vorgeschrieben werden und der Begriff der Gleichmaschigkeit läßt sich grundsätzlich nicht mehr definieren. Die Richtungen der Randstäbe werden am einfachsten dadurch festgelegt, daß man die durch Polynome mathematisch dargestellte Netzfläche über den eigentlichen Definitionsbereich hinaus fortsetzt und so ein gleichmaschiges Netz berechnet, welches das endgültige Netz vollständig einschließt. Die Erfahrung hat allerdings gezeigt, daß die nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate angepaßten Polynome nur für schmale Randzonen eine brauchbare Extrapolation gestatten. Diese Schwierigkeit läßt sich umgehen, indem man am besten alle Seile von der letzten Masche aus, in der die gleichmäßigen Abstände vorgeschrieben sind, harmonisch fortsetzt. Praktisch bewährt hat sich dafür das Verfahren, die Projektion der Seile auf die Grundrißebene oder eine Tangentialebene der Netzfläche geradlinig weiterzuführen.

Wenn bereits ein im Innern gleichmaschiges Netz vorliegt, welches die gesamte tatsächliche Netzfläche einschließt, so ist es eine relativ einfache Aufgabe, anschließend in der Grundrißebene die Schnittpunkte der nunmehr festgelegten Netzstäbe mit den durch Gln. (55) dargestellten Randseilen zu ermitteln, womit die Erzeugung eines Ausgangsnetzes abgeschlossen ist.

5. Die praktische Durchführung einer Netzwerksberechnung

5. a) Eingebedaten für die Berechnung eines Netzwerks nach der Matrizenverschiebungsmethode

Nachdem bereits in den Kapiteln 2 und 3 die theoretischen Grundlagen für die Untersuchung eines Netzwerks nach der Matrizenverschiebungsmethode dargestellt wurden, sollen in diesem abschließenden Kapitel die wichtigsten Fragen der praktischen Durchführung einer solchen Berechnung behandelt werden. Zum Aufbau der Matrizen für die Steifigkeit und die Ungleichgewichtskräfte benötigen wir für jeden Stab die folgenden Daten:

1. Koordinaten der beiden Knotenpunkte des Stabs $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$,
2. Nummern der Freiheitsgrade beider Knotenpunkte (i, j) ,
3. Stabspannung (P_N) ,
4. Ungedehnte Länge (l_0) ,
5. Elastizitätsmodul und Querschnittsfläche (EA) .

Wenn nach der im vorausgegangenen Abschnitt behandelten Methode ein Netz auf eine mathematische definierte Fläche gelegt worden ist, so erhält man dabei zunächst nur die Koordinaten der Knotenpunkte, die jedoch noch nicht den einzelnen Stäben zugeordnet sind. Diese Zuordnung kann leicht automatisch durchgeführt werden, wenn man die Netz- bzw. Randseile fortlaufend durchnumeriert und dann die Knotenpunkte durch eine Kennzahl bezeichnet, welche aus den Nummern der sich kreuzenden Seile zusammengesetzt ist. Solche Kennzahlen können gleichzeitig erzeugt werden, während man die Koordinaten der Knoten berechnet. Sobald man die Koordination nach einzelnen Stäben geordnet hat, ist es auch einfach, das Netz durch ein me-

chanisches Zeichengerät automatisch aufzeichnen zu lassen, was eine sehr wertvolle Kontrolle nicht nur der Zuordnung sondern auch der Seilführung im Netz bedeutet. Im ISD sind alle Programme und Geräte vorhanden, um die Netze im Ausgangszustand oder auch unter Vorspannung bzw. Belastung rasch und mit hoher Genauigkeit automatisch aufzuzeichnen. Abb. 5 zeigt als Anwendungsbeispiel die Grundrißprojektion eines typischen Feldes der Sporthalle für die olympischen Spiele in München, die unter Verwendung der genannten Programme angefertigt wurde.

Die Freiheitsgrade werden zunächst für die einzelnen Knoten fortlaufend durchnummeriert. Während die Koordinaten der elementweisen Knotenpunkte ausgesucht werden, können dann zugleich auch die zu den Elementknoten gehörigen Freiheitsgrade ermittelt werden.

Die Stabspannungen, ungedehnten Längen und elastischen Daten können für alle Stäbe mit Ausnahme der Randstäbe automatisch bestimmt werden. Dazu benützen wir die schon am Ende des Abschnitts 4b erwähnte Darstellung der Horizontalkraft und der EA -Werte als Funktion der Seilnummer. Die ungedehnten Längen müssen nur für die Anschlußstäbe an die Randseile und die Randstäbe berechnet werden. Für die Anschlußstäbe erhalten wir l_0 einfach aus der tatsächlichen Länge l der Stäbe und den auf dieselbe Weise wie im Innern errechneten Werten von H und EA .

Um die für die Steifigkeitsmatrix der Randstäbe benötigten Werte P_N , l_0 , EA zu erhalten, verwenden wir eine Spezialversion des allgemeinen Netzwerkprogrammes, welche es erlaubt, die Gleichgewichtslage eines einzelnen Randseils unter der Einwirkung bekannter Kräfte zu bestimmen. Als Ausgangsgeometrie dient jene, welche bei der Erzeugung des Netzes auf der mathematisch dargestellten Fläche gewonnen wurde. Zusätzlich wird nur Elastizitätsmodul und Querschnittsfläche des Randseils eingegeben. Als Belastung des Randseils werden die Kräfte in den zugehörigen Anschlußstäben aufgebracht. Wir finden dann die Kräfte in den Randstäben und können somit deren ungedehnte Längen berechnen. Die Bestimmung der Gleichgewichtslage des Randseils ist auch eine gute Kontrolle dafür, ob die z. B. aus dem Modell übernommene Form des Randseils mit den später am Randseil angreifenden Kräften verträglich ist. Falls notwendig,

kann nun auch die Parameterdarstellung der Projektion des Randseils auf die Grundrißebene (siehe Gln. (55)) verbessert werden.

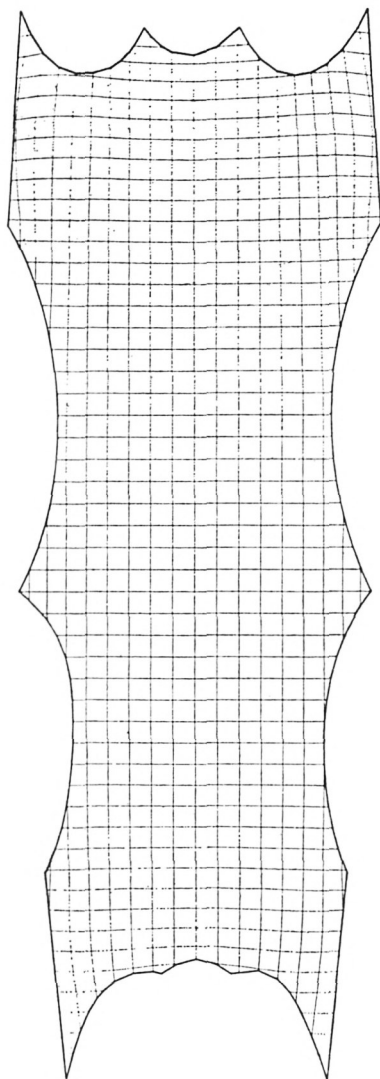


Abb.5 Maschinell aufgezeichnetes Netzwerk
(Einzelteil der Sporthalle München)

Wir wollen an dieser Stelle auch noch eine alternative Technik zur Bestimmung der Randseile angeben, die leider aus zeitlichen Gründen für die Olympiädächer nicht mehr eingesetzt werden konnte. Wenn ein über die Randseile hinausreichendes gleichmaschiges Netz vorliegt, in dem die Stabkräfte bekannt sind, so kann man bei nur einer einzigen vorgegebenen Stabkraft zwischen zwei Punkten ein Seilpolygon eindeutig berechnen, welches zumindest innerhalb einer passend gewählten Projektionsebene die Gleichgewichtsbedingungen exakt erfüllt. Diese Methode erscheint uns wesentlich aussichtsreicher, als die Verwendung der Geometrie von im Modell eingebauten biege- und torsionssteifen Randseilen.

5. b) Maßnahmen zum Erzwingen eines vorgesehenen Spannungszustandes des Netzwerks

Die Spannungen in einem Netzwerk ändern sich bei geringfügiger Änderung der Seillängen so stark, daß man auch bei einer nach der Methode des Kapitels 4 erzeugten Ausgangsgeometrie nicht erwarten darf, im iterativ berechneten Zustand des Gleichgewichts den zur Sicherung der Tragfähigkeit notwendigen Spannungszustand ohne zusätzliche Maßnahmen zu erreichen. Aus diesem Grunde sehen wir in jedem Seil mit Ausnahme der Randseile mindestens einen Stab vor, dessen ungedehnte Länge nach jeder Iteration neu berechnet wird und zwar so, daß die Spannkraft einen vorgeschriebenen Wert erhält. Selbstverständlich wird man dazu Stäbe wählen, die an ein Randseil anschließen, um nicht die Gleichmaschigkeit des Netzes im Innern zu zerstören. Bei den betreffenden Stäben muß man dann allerdings mit großen Längenänderungen rechnen. Um trotzdem eine rasche Konvergenz der Iteration zu erreichen, ist es notwendig, die elastische Steifigkeit k_E der Stäbe mit vorgeschriebener Kraft gleich Null zu setzen. In der Gesamtsteifigkeit \mathbf{k} wird also in diesem Fall nur die geometrische Steifigkeit \mathbf{k}_G berücksichtigt. In der Praxis hat sich erwiesen, daß die hier angegebene Methodik die Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration nicht beeinträchtigt, dafür aber sehr viel bessere Spannungszustände ergibt.

Wenn in der Anfangsgeometrie im Randbereich große Störungen des Gleichgewichts vorhanden sind, können trotz der bereits

beschriebenen Vorkehrungen besonders in der Randzone große Abweichungen der erreichten Spannungen von den vorgesehenen auftreten. Das rührt daher, daß die im Innern harmonisch verlaufenden Netzseile zum Rande hin stark abknicken, wenn sich ein Randseil erheblich verschoben hat. Um auch diese Fehler zu korrigieren, benützen wir ein durch wenige Daten gesteuertes Programm, welches die Anschlußpunkte der Netzseile auf den Randseilen in einer solchen Weise verschiebt, daß ein gleichförmiger Verlauf der Netzseile bis zum Rande hin gewährleistet ist. Nach einer solchen Korrektur muß natürlich noch einmal eine neue Gleichgewichtslage des Netzes ermittelt werden, wofür aber in der Regel wenige Iterationen ausreichend sind.

5. c) Maßnahmen zur Beschleunigung der Konvergenz

Die an und für sich gute Konvergenz bei der iterativen Berechnung des Gleichgewichtszustandes läßt sich durch einige hier zu beschreibende Kunstgriffe noch merklich verbessern. Bei der normalen Iteration fällt es auf, daß die Gleichgewichtslage in den Randbereichen langsamer als im Innern des Netzes erreicht wird. Das hat seinen Grund in der gegenüber den Netzseilen sehr viel höheren Steifigkeit der Randseile, welche in den einzelnen Iterationsschritten nur sehr kleine Deformationen zulassen. Diese Schwierigkeit kann umgangen werden, indem man während der Iteration den Randseilen nur eine verminderte Steifigkeit gibt, die ungefähr in der Größenordnung der stärksten Netzseile liegt. Diese Netzseile sind immer noch so steif, daß keine großen Deformationen der Randseile zu befürchten sind. Nach unserer Erfahrung kann auf diese Weise die Anzahl der Iterationen erheblich verkleinert werden und die Endergebnisse werden praktisch nicht beeinflußt. Es ist nur notwendig, nach Abschluß der Iteration die ungedehnten Längen der Randseile zu korrigieren. Bezeichnen wir mit \bar{l}_0 die ungedehnte Länge eines Randstabs, für den in der Iteration der reduzierte Wert \overline{EA} eingesetzt war, so erhalten wir die tatsächliche ungedehnte Länge zu

$$l_0 = \bar{l}_0 \left(1 + \frac{P_N}{EA}\right) / \left(1 + \frac{P_N}{\overline{EA}}\right) \quad (60)$$

wenn EA die wirkliche Steifigkeit des Randseils ist. Diese Korrektur der Stablängen hat offensichtlich keinerlei Einfluß auf das Gleichgewicht des Systems.

Eine andere Beeinträchtigung der Konvergenzgeschwindigkeit hat die Ursache, daß häufig im Verlaufe der Iteration einzelne Netzstäbe auf Druck beansprucht werden. Aus Gl. (20) ist zu ersehen, daß für den Fall $P_N < 0$ die geometrische Steifigkeit bei jeder Starrkörperrotation des Stabs keine rückstellenden sondern in Richtung der Verschiebung wirkende Kräfte liefert, was eine wesentliche Verminderung der Netzsteifigkeit bewirkt. Bei einer größeren Anzahl von Druckstäben kann es sogar dazu kommen, daß Teilbereiche des Netzes ausknicken und daß man eine nicht mehr positiv definite Steifigkeitsmatrix findet, wodurch das Netz zu einem Perpetuum Mobile wird. In unserem Fall erscheinen infolge von Druckstäben zwar nur unvernünftig große Verschiebungen der Netzknoten, die vermieden werden können, indem man alle Druckstäbe einfach wegläßt. Vom mathematischen Standpunkt erscheint dieses Vorgehen als eine Störung des in Abschnitt 3c dargestellten Newton-Verfahrens. In der Praxis hat sich aber gezeigt, daß die allein physikalisch sinnvolle Maßnahme, auf Druck beanspruchte Stäbe zu eliminieren, einen wertvollen Beitrag zur Beschleunigung der Konvergenz leistet.

5. d) Berechnung eines vereinfachten Netzes

Die für die Untersuchung eines Netzwerkes nach der Matrizen-
theorie benötigte Rechenzeit hängt in erster Linie von der Anzahl
der Knotenpunkte ab, welche ungefähr quadratisch mit der An-
zahl der Seile wächst. Außerordentlich große Einsparungen an
teurer Rechenzeit sind also möglich, wenn man in der Rechnung
nur einen Teil derjenigen Seile berücksichtigt, die für die End-
ausführung vorgesehen sind. Beachtet man auch, daß der Zeit-
bedarf für die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit der
bei Netzwerken vorkommenden Struktur ebenfalls etwa quadra-
tisch mit der Anzahl der Unbekannten steigt, so kann man sich
leicht ausrechnen, daß der Verbrauch an teurer Computerzeit
z. B. auf ca. ein Fünfzigstel reduziert werden kann, wenn man
nur jedes vierte Seil eines Netzes berücksichtigt.

Die hier angestellten Betrachtungen zeigen deutlich, wie lohnend es ist, sich genau zu überlegen, in wieweit eine Vereinfachung des Netzes zulässig ist. Nach den bisherigen Erfahrungen scheint es durchaus vertretbar, bei größeren Netzen nur mit jedem sechsten Seil zu rechnen. Das gilt insbesondere deshalb, weil die Konsequenzen einer solchen Beschränkung des Rechenaufwandes mit hoher Genauigkeit erfaßt werden können.

Wenn man nur einen Teil der Seile bei der Ermittlung des Zuschnitts berücksichtigt, so hat das zur Folge, daß man einen Polygonzug durch eine Gerade ersetzt, was einen Fehler in den Stablängen nach sich zieht. Bei einem vernünftigen Verhältnis der Maschenweite zu den Krümmungsradien der Netzfläche ist jedoch dieser Fehler so klein, daß er gegenüber dem bei der Herstellung eines Netzes unvermeidbaren Unregelmäßigkeiten nicht ins Gewicht fällt. Nach Abschluß der Zuschnittsberechnung ist es außerdem eine leichte Aufgabe, die Größe der Ungenauigkeit exakt zu ermitteln.

Bei der automatischen Erzeugung eines Netzes auf einer mathematisch definierten Fläche läßt sich sogar die endgültige Maschenweite sofort berücksichtigen. Dieses Programm benötigt nur so wenig Rechenzeit, daß man bei geringen Kosten ein sehr dichtes Netz bestimmen kann. Die Stablängen der Maschen des groben Netzes lassen sich dann aus den Knotenpunktskoordinaten des feinen Netzes gewinnen. Die veränderliche Krümmung der Netzfläche kommt dann in unterschiedlichen ungedehnten Längen der Stäbe zum Ausdruck. Mit Hilfe dieser verbesserten Erzeugung einer Ausgangsgeometrie kann praktisch jede gewünschte Genauigkeit des Zuschnitts erzielt werden.

Abschließend soll noch erwähnt werden, daß sich innerhalb der letzten Randmasche die Gleichheit der ungedehnten Stablängen bei einer nachträglichen Verfeinerung des Netzes grundsätzlich nicht herstellen läßt. Dies dürfte jedoch für die Fertigung der Netze keine besondere Schwierigkeit darstellen.

5. e) Belastungen des Netzes

Wie bereits im theoretischen Teil erwähnt, kann mit demselben Programm sowohl das Problem der Zuschnittsberechnung als auch dasjenige des Tragverhaltens untersucht werden. Auf das

Netzwerk dürfen dabei nach Größe und Richtung beliebig veränderliche Lasten aufgebracht werden. Auch der Einfluß einer gleichmäßigen oder einseitigen Temperaturerhöhung kann leicht erfaßt werden. Die Änderung der Spannkkräfte durch die Belastung läßt sich für jeden Stab exakt angeben. Mit gleicher Genauigkeit erhält man auch die Verschiebung der Knoten. Mit kleinen zusätzlichen Auswertungsprogrammen ist es auch möglich, spezielle Fragen, wie z. B. die Veränderung der Seilwinkel unter Last, rasch zu beantworten.

Obwohl uns im Rahmen dieser Veröffentlichung kein Raum für eine ausführliche Darstellung bleibt, wollen wir doch darauf hinweisen, daß es keinerlei Schwierigkeiten bereitet, bei der Untersuchung der Belastung die Schubsteifigkeit einer Dacheindeckung zu berücksichtigen.

5. f) Notwendige Ausstattung der Rechananlage

Wir wollen es zum Schluß dieser Arbeit nicht versäumen, die für die Durchführung des beschriebenen Rechenverfahrens entscheidend wichtige Frage nach der notwendigen Ausstattung der benutzten Rechananlage zu erörtern. Grundsätzlich ist durch die Möglichkeiten des Computers nur die Größe der innerhalb vernünftiger Rechenzeiten lösbaren Aufgaben begrenzt. Bei den meisten der zu bearbeitenden Netzwerke dürfte die Anzahl der Knotenpunkte zwischen ein- und dreitausend betragen. Das Zelt-dach für die Sporthalle in München hatte sogar 3588 Knotenpunkte mit insgesamt 10553 Freiheitsgraden. Die Anzahl der Stäbe war 6629. Für Probleme dieser Größe sollte eine Rechananlage mit wenigstens 64 K Kernspeicher und einer Trommel oder Platte mit ca. 5 Mill. Worten zur Verfügung stehen. Da die Ermittlung des Zuschnitts und die Untersuchung der Lastfälle keinesfalls in einem einzigen Lauf erledigt werden können, müssen auch Magnetbänder zur Speicherung der Zwischenresultate vorhanden sein.

Alle diese Anforderungen werden in idealer Weise von der im ISD benützten Rechananlage CDC 6600 erfüllt, welche sogar eine erheblich größere Kapazität als die oben genannte besitzt. Diese Maschine hat auch den großen Vorteil, daß die Wortlänge 60 Bits beträgt. Dadurch treten praktisch nie Schwierigkeiten infolge

schlechter Konditionierung der Steifigkeitsmatrizen auf. Zweifellos sind aber auch kleinere Computer, wie z. B. die UNIVAC 1107 Maschine für die Untersuchung von Netzwerken gut geeignet.

Zur bequemen Auswertung der Ergebnisse sollte unbedingt ein mechanischer Plotter oder ein „Digigraph“ verfügbar sein. Im ISD benutzen wir einen CIL-Plotter in Verbindung mit einer PDP 9. Die für die Steuerung des Zeichengerätes benötigten Informationen können direkt von der CDC 6600 auf kompatible Magnetbänder geschrieben werden.

Literaturverzeichnis

- 1 J. H. ARGYRIS, Energy Theorems and Structural Analysis, a. Part I General Theory, Aircraft Engineering, Bd. 26, 1954, Oktober S. 347–356, November S. 383–387, Bd. 27, 1955; Februar S. 42–58, März S. 80–94, April S. 125–134, Mai S. 145–158. Als Buch veröffentlicht, Butterworths, London, 1960.
- 2 J. H. ARGYRIS, Recent Developments of Matrix Theory of Structures, Paper presented at the 10th Meeting of the Structures and Materials Panel, AGARD, Aachen, September 1959, (nicht veröffentlicht, aber in 3 enthalten).
- 3 J. H. ARGYRIS, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis, Progress in Aeronautical Sciences, Bd. 4, London, New York, 1963.
- 4 J. H. ARGYRIS, Three-Dimensional Anisotropic and Inhomogeneous Elastic Media, Matrix Analysis for Small and Large Displacements, Ingenieur Archiv, 34. Band, 1. Heft, 1965, S. 33–55.
- 5 J. H. ARGYRIS, Three-Dimensional Anisotropic and Inhomogeneous Elastic Media Matrix Analysis for Small and Large Displacements, Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics, München, 1964.
- 6 J. H. ARGYRIS, Continua and Discontinua, Opening Address to the International Conference on Matrix Methods of Structural Mechanics, Dayton, Ohio, Wright-Patterson, U. S. A. F. Base, October 26th, 1965. Veröffentlicht in den Proceedings of the Conference by U. S. Government, S. 1–198, Januar 1967.
- 7 J. H. ARGYRIS, und D. W. SCHARPF, The Curved Tetrahedral and Triangular Elements TEC and TRIC for the Matrix Displacement Method, Part I: Small Displacements, The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, Bd. 73, Nr. 697, Januar 1969. Part II: Large Dis-

placements, *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, Bd. 73, Nr. 697, Januar 1969.

- 8 J. H. ARGYRIS, und D. W. SCHARPF, The SHEBA Family of Shell Elements for the Matrix Displacement Method. Part I: Natural Definition of Geometry and Strains, Part II: Interpolation Scheme and Stiffness Matrix, *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, Bd. 72, Nr. 694, October 1968, Part III: Large Displacements, *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, Bd. 73, Nr. 701, Mai 1969.
- 9 J. H. ARGYRIS und D. W. SCHARPF, Some General Considerations on the Natural Mode Technique, Part I: Small Displacements, *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, Bd. 73, Nr. 699, März 1969, Part II: Large Displacements, *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, Bd. 73, Nr. 700, April 1969.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1971

Band/Volume: [1970](#)

Autor(en)/Author(s): Argyris John H., Scharpf Dieter W.

Artikel/Article: [Berechnung vorgespannter Netzwerke. Die Lösung eines nicht-linearen elastischen Problems 25-58](#)