BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1970

MÜNCHEN 1971

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die Darstellbarkeit gewisser Überlagerungen eines Faserbündels als Faserbündel

Von Konrad Königsberger in München

$E = E(X, Y, p, G)$ sei ein Faserbündel über X mit Faser Y, Projektion p und Strukturgruppe G. X und Y seien zusammenhängend, lokal zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Dann hat auch E diese Zusammenhangs-Eigenschaften und zu jeder Untergruppe Π in $\pi_1(E)$ gibt es eine Überlagerung E^{Π} von E, deren Fundamentalgruppe zu Π isomorph ist. Wir beweisen, daß unter gewissen Voraussetzungen E^{Π} in natürlicher Weise als Faserbündel mit Strukturgruppe auf einer geeigneten Überlagerung von X aufgefaßt werden kann. Einfache Beispiele zeigen, daß diese Aussage nicht uneingeschränkt richtig ist. Für die universelle Überlagerung $\hat{E}$ von E ergibt sich die Darstellbarkeit als Faserbündel mit zusammenhängender Strukturgruppe über der universellen Überlagerung $\hat{X}$ von X.

Das Problem ist im wesentlichen das folgende: Soll in E die Faser Y durch eine Überlagerung $\tilde{Y}$ ersetzt werden, so ist auch die auf Y operierende Strukturgruppe G durch eine Überlagerungsgruppe $\tilde{G}$ zu ersetzen und entsprechend ein definierender Cozyklus mit Werten in G durch einen Cozyklus mit Werten in $\tilde{G}$. Im allgemeinen tritt dabei ein Hindernis in der Cohomologie der Dimension 2 auf (bei C^*-Bündeln ist es die Chernsche Klasse). Das Lemma in Abschnitt 1 bringt eine hinreichende Bedingung für das Verschwinden dieses Hindernisses.

Die folgenden Betrachtungen haben sinngemäß auch im differenzierbaren und komplex-analytischen Fall Gültigkeit.

1. In diesem Abschnitt werden nur Faserbündel mit zusammenhängender Strukturgruppe G und einfach zusammenhängender Basis X betrachtet.

Gegeben sei eine Untergruppe Π in $\pi_1(Y)$, die den Kern des Homomorphismus $\pi_1(Y) \to \pi_1(E)$ umfaßt. Mit Y^{Π} bezeichnen wir eine Überlagerung von Y, deren Fundamentalgruppe von dem induzierten Homomorphismus $\pi_1(Y^\Pi) \to \pi_1(Y)$ auf Π abgebildet wird. Wir bestimmen zunächst die „kleinste" Überlagerungsgruppe von G, die auf der Überlagerung Y^Π operiert.

Es sei $\gamma : G \to Y$ diejenige Abbildung, die für g in G durch $g \to g \cdot y_0$ definiert ist; dabei sei y_0 der Basispunkt für die Homotopiegruppen von Y. $\gamma_{\#}: \pi_1(G) \to \pi_1(Y)$ sei der induzierte Homomorphismus der Fundamentalgruppen. Wir setzen $\Gamma = \gamma_{\#}^{-1}(\Pi)$ und bezeichnen mit G^Γ die Überlagerungsgruppe von G, deren Fundamentalgruppe die Untergruppe Γ in $\pi_1(G)$ ist. Γ hat genau die Eigenschaft, die notwendig und hinreichend dafür ist, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G^\Gamma \arrow[r, dashed] \arrow[d] & Y^\Pi \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\gamma"'] & Y \end{tikzcd}$$

durch eine Abbildung $\tilde{\gamma} : G^\Gamma \to Y^\Pi$ zu einem kommutativen Quadrat vervollständigt werden kann („lifting theorem"; siehe [3]). Ferner kann man leicht zeigen (wieder mit Hilfe des lifting-Theorems), daß G^Γ in natürlicher Weise auf Y^Π operiert.

Es sei nun $c = (c_{ij})$ ein Cozyklus, der das Faserbündel E bzgl. einer Überdeckung (U_i) von X beschreibt; die c_{ij} sind dabei Funktionen mit Werten in G. Wir zeigen, daß ein geeignet gewählter Cozyklus c zu einem Cozyklus mit Werten in G^Γ geliftet werden kann. Ist q die Projektion $G^\Gamma \to G$ und q^* die induzierte Abbildung $H^1(X, \underset{\sim}{G}^\Gamma) \to H^1(X, \underset{\sim}{G})$ der Cohomologiemengen[1], so gilt für die Cohomologieklasse [c] von c (unter der eingangs genannten Voraussetzung bzgl. Π):

Lemma : $[c]$ liegt im Bild von q^*.

Beweis. Wir betrachten die von der exakten Sequenz

$$1 \to \pi_1(G)/\Gamma \to G^\Gamma \xrightarrow{q} G \to 1$$

induzierte Sequenz der Cohomologiemengen

[1] Ist G eine topologische Gruppe, so bezeichnen wir mit $\underset{\sim}{G}$ die Garbe der Keime stetiger Funktionen mit Werten in G. $H^1(X, \underset{\sim}{G})$ ist dann die Menge der Isomorphieklassen von G-Prinzipalbündeln auf X.

(1) $$H^1(X, \underset{\sim}{G}^\Gamma) \xrightarrow{q^*} H^1(X, \underset{\sim}{G}) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \pi_1(G)/\Gamma).$$

($H^2(X, \pi_1(G)/\Gamma)$ und δ sind definiert, weil $\pi_1(G)/\Gamma$ eine zentrale Untergruppe von G^Γ ist!) Wegen der „Exaktheit" von (1) genügt es zu zeigen, daß $\delta\,[c] = 0$.

Nach dem universellen Koeffizienten-Theorem definiert das Element $\delta\,[c] \in H^2(X, \pi_1(G)/\Gamma)$ in eindeutiger Weise einen Homomorphismus von $H_2(X)$ in $\pi_1(G)/\Gamma$; wir bezeichnen diesen Homomorphismus mit $\varkappa = \varkappa_E$. Entsprechend kann mit Hilfe der exakten Sequenz

$$1 \to \pi_1(G) \to \hat{G} \to G \to 1$$

ein Homomorphismus $\hat{\varkappa} : H_2(X) \to \pi_1(G)$ definiert werden. Bezeichnet r die Reduktion $\pi_1(G) \to \pi_1(G)/\Gamma$, so gilt

(2) $$\varkappa = r \circ \hat{\varkappa}\,.$$

Für den Homomorphismus $\hat{\varkappa}$ geben wir noch eine andere Darstellung an. Zu dem Zweck betrachten wir das zu E assoziierte Prinzipal-Faserbündel $P = P(X, G)$. Es sei

(3) $$\chi : \pi_2(X) \to \pi_1(G)$$

der verbindende Homomorphismus der Homotopiesequenz des Faserbündels P. Mit h bezeichnen wir den natürlichen Homomorphismus von $\pi_2(X)$ in $H_2(X)$. Wir behaupten nun, daß

(4) $$\chi = \hat{\varkappa} \circ h.$$

Die Gleichheit dieser beiden Homomorphismen ist bekannt für den Fall, daß X eine 2-Sphäre ist (Feldbau [2]; siehe auch [4] § 18). Für einen beliebigen einfach-zusammenhängenden Raum X ergibt sie sich durch das folgende funktorielle Argument.

Es sei $[\varphi]$ eine vorgegebene Homotopieklasse in $\pi_2(X)$, repräsentiert durch eine stetige Abbildung φ der S_2 in X. Das über X definierte Prinzipal-Bündel P induziert vermittels φ ein Prinzipalbündel P_φ über S_2. Das P_φ beschreibende Cohomologieelement $[c_\varphi]$ in $H^1(S_2, \underset{\sim}{G})$ ist das Bild von $[c]$ unter der induzierten Abbildung $H^1(X, \underset{\sim}{G}) \to H^1(S_2, \underset{\sim}{G})$. Die Cohomologieklasse

$[c_\varphi]$ definiert einen $\hat{\varkappa}$ entsprechenden Homomorphismus $\varkappa_\varphi$ von $H_2(S_2)$ in $\pi_1(G)$. Wir haben ferner das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_2(S_2) \arrow[r, "h_S"] \arrow[d, "\varphi_\#"'] & H_2(S_2) \arrow[r, "\varkappa_\varphi"] \arrow[d] & \pi_1(G) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\pi_2(X) \arrow[r, "h"'] & H_2(X) \arrow[r, "\hat{\varkappa}"'] & \pi_1(G)
\end{tikzcd}$$

Ist χ_S der Homomorphismus (3) für $X = S_2$, so gilt nach dem oben zitierten Satz von FELDBAU für die Komposition der Homomorphismen der oberen Zeile des Diagramms

$$\chi_S = \varkappa_\varphi \circ h_S. \tag{5}$$

Die mit φ gegebene Bündel-Abbildung des Bündels $P_\varphi \to S_2$ in das Bündel $P \to X$ induziert das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_2(S_2) \arrow[r, "\chi_S"] \arrow[d, "\varphi_\#"'] & \pi_1(G) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\pi_2(X) \arrow[r, "\chi"'] & \pi_1(G)
\end{tikzcd}$$

Mit Hilfe dieses und des obigen kommutativen Diagramms folgt unter Verwendung von (5) für ein erzeugendes Element ε in $\pi_2(S_2)$

$$\chi \circ \varphi_\# (\varepsilon) = \hat{\varkappa} \circ h \circ \varphi_\# (\varepsilon).$$

Daraus folgt $\chi = \hat{\varkappa} \circ h$, da jedes Element in $\pi_2(X)$ die Gestalt $\varphi_\#(\varepsilon)$ hat. – Damit ist (4) bewiesen.

Wir zeigen nun, daß

$$r \circ \chi = 0. \tag{6}$$

Zu diesem Zweck betrachten wir die durch $\gamma : G \to Y$ gegebene Bündelabbildung $P(X, G) \to E(X, Y)$. Diese Bündelabbildung induziert das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_2(X) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \pi_1(G) \arrow[d, "\gamma_\#"] & \\ \pi_2(X) \arrow[r, "\Delta"'] & \pi_1(Y) \arrow[r] & \pi_1(E) \end{tikzcd}$$

Es folgt nun: $\gamma_\#$ (im χ) ist enthalten in im (Δ), dem Kern des Homomorphismus $\pi_1(Y) \to \pi_1(E)$; insbesondere ist nach Wahl von Π $\gamma_\#(\mathrm{im}\,\chi)$ enthalten in Π; und da Γ das $\gamma_\#$-Urbild von Π ist, folgt insgesamt im $\chi \subset \Gamma$. Andrerseits ist aber Γ der Kern von r. – Damit ist (6) bewiesen.

Aus (2), (4) und (6) folgt nun

$$\varkappa \circ h = r \circ \hat{\varkappa} \circ h = r \circ \chi = 0.$$

Da für einen einfach zusammenhängenden Raum X der Homomorphismus $h : \pi_2(X) \to H_2(X)$ surjektiv ist (nach einem Satz von HUREWICZ; siehe auch [3]) folgt schließlich $\varkappa = 0$. Der Homomorphismus $\varkappa$ ist definiert als der Hom-Anteil des Cohomologieelementes $\delta\,[c]$; und da wegen des einfachen Zusammenhangs von X die Ext-Untergruppe von $H^2(X, \pi_1(G)/\Gamma)$ Null ist, folgt $\delta\,[c] = 0$. – Das Lemma ist damit bewiesen.

Sei nun $(\tilde{c}_{ij})$ ein q^*-Urbild des Cozyklus (c_{ij}). Mit $(\tilde{c}_{ij})$ als Struktur-Cozyklus konstruieren wir einen Faserraum $\tilde{E}(X, Y^\Pi, G^\Gamma)$ über X mit Y^Π als typischer Faser und G^Γ als Strukturgruppe. Es ist klar, daß dann die lokalen Überlagerungsabbildungen $U_i \times Y^\Pi \to U_i \times Y$ eine mit der Faserung verträgliche Abbildung $\alpha : \tilde{E} \to E$ über X definieren.

Satz 1: *X sei einfach zusammenhängend und G sei zusammenhängend. Dann ist der Faserraum $\tilde{E}(X, Y^\Pi, G^\Gamma)$ vermittels α eine Überlagerung von $E(X, Y, G)$ mit*

(7) $$\pi_1(\tilde{E}) \cong \Pi/Kern\,(\pi_1(Y) \to \pi_1(E)).$$

Zu zeigen ist nur noch die Isomorphie (7). Wir betrachten zu diesem Zweck folgenden Abschnitt der Homotopieleiter, die zur Faserraum-Abbildung $\tilde{E} \to E$ gehört:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y^\Pi) \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] \arrow[d] & \pi_1(\tilde{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X) = 0 \\ \pi_1(Y) \arrow[r, "\sigma"'] & \pi_1(E) \arrow[r] & \pi_1(X) = 0 \end{tikzcd}$$

Wegen der Exaktheit der oberen Sequenz ist $\pi_1(\tilde{E}) \cong \pi_1(Y^\Pi)/$ Kern $(\tilde{\sigma})$. Ferner ist $\pi_1(Y^\Pi) \cong \Pi$; und da die „senkrechten" Homomorphismen injektiv sind, ist weiter Kern $(\tilde{\sigma})$ = Kern (σ). Insgesamt folgt damit (7).

Korollar: *Ist* $\Pi = Kern(\pi_1(Y) \to \pi_1(E))$, *so ist* $\tilde{E}(X, Y^\Pi, G^\Gamma)$ *die universelle Überlagerung von* $E(X, Y, G)$.

2. Es seien nun X und G beliebig. Ist $\hat{X}$ die universelle Überlagerung von X, so induziert u : $\hat{X} \to X$ eine lokal triviale Faserung $E^* = u^{-1}(E)$ über $\hat{X}$; wir haben also das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{u^*} & E \\ {\scriptstyle p^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \hat{X} & \xrightarrow[u]{} & X \end{array}$$

u* ist wie u eine Überlagerungsabbildung. Die Strukturgruppe des Bündels $E^* \to \hat{X}$ ist wieder G. Sie kann aber auf die Zusammenhangskomponente G_e der Eins reduziert werden. Zum Beweis betrachten wir den aus einem Struktur-Cozyklus (c_{ij}) durch den Homomorphismus $G \to G/G_e$ entstehenden Cozyklus $(\bar{c}_{ij})$ mit Werten in G/G_e. Da G/G_e die diskrete Topologie trägt und $\hat{X}$ einfach zusammenhängend ist, stellt $(\bar{c}_{ij})$ einen o-cohomologen Cozyklus dar[2]. Es gibt also Konstanten $c_i \in G$ derart, daß alle

$$c^*_{ij}(x) = c_i \cdot c_{ij}(x) \cdot c_j^{-1}$$

in G_e liegen.

Wir denken uns im folgenden die Reduktion der Strukturgruppe auf G_e bereits durchgeführt.

Auf den Faserraum $E^*(\hat{X}, Y, G_e)$ ist dann Satz 1 anwendbar. Sei dazu wieder $\Pi \subset \pi_1(Y)$ eine Untergruppe, die den Kern von $\pi_1(Y) \to \pi_1(E)$ umfaßt. Da $\pi_1(E^*) \to \pi_1(E)$ injektiv ist,

[2] Es gilt (siehe [4] § 13): Die Menge der Isomorphieklassen lokal trivialer Faserräume über X mit diskreter Strukturgruppe G steht in 1-1-deutiger Beziehung zu den Elementen einer gewissen Faktorgruppe von Hom$(\pi_1(X), G)$.

stimmen der Kern von $\pi_1(Y) \to \pi_1(E^*)$ und der Kern von $\pi_1(Y) \to \pi_1(E)$ überein, so daß

$$\Pi/\mathrm{Kern}(\pi_1(Y) \to \pi_1(E)) = \Pi/\mathrm{Kern}(\pi_1(Y) \to \pi_1(E^*)).$$

Aus Satz 1 folgt damit durch Komposition von $\alpha : \tilde{E} \to E^*$ und $u^* : E^* \to E$:

Satz 2: *Der Faserraum* $\tilde{E}(\hat{X}, Y^\Pi, G_e^\Gamma)$ *ist vermittels* $u^* \circ \alpha$ *eine Überlagerung des Faserraums* $E(X, Y, G)$ *mit*

$$\pi_1(\tilde{E}) \cong \Pi/\mathit{Kern}\,(\pi_1(Y) \to \pi_1(E)).$$

$u^* \circ \alpha$ *ist ferner eine Faserraum-Abbildung über* $\hat{X} \to X$.

Literatur

[1] Eckmann, B.: Der Kohomologiering einer beliebigen Gruppe. Comment. Math. Helv. 18, 232–282 (1945).

[2] Feldbau, J.: Sur la classification des espaces fibrés. C. R. Acad. Sci. Paris, 208, 1621–1623 (1939).

[3] Hu, S. T.: Homotopy Theory. Academic Press (1959).

[4] Steenrod, N.: The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press (1951).

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1971

Band/Volume: 1970

Autor(en)/Author(s): Königsberger Konrad

Artikel/Article: Über die Darstellbarkeit gewisser Überlagerungen eines Faserbündels als Faserbündel 59-65