BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1972

MÜNCHEN 1973

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Komission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Einfache Untermoduln von Kogeneratoren

Von Friedrich Kasch und Bodo Pareigis in München

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 70. Geburtstag gewidmet

Einleitung

In der neueren Entwicklung der Theorie der Moduln spielt die folgende Fragestellung eine wichtige Rolle: Sei $M = {}_{\Gamma}M_R$ ein Γ-R-Bimodul und sei $\Gamma = \mathrm{End}(M_R)$; welche Beziehungen bestehen dann zwischen der Struktur von M_R, Γ und ${}_{\Gamma}M$? Diese Frage spielt z. B. eine zentrale Rolle im Morita-Theorem und wird in vielen Untersuchungen über Kogeneratoren und injektive Moduln mehr oder weniger explizit angesprochen.

Bei den Untersuchungen von Kogeneratoren und injektiven Moduln geht es insbesondere um folgenden Zusammenhang: Sei für $m \in M$ der R-Modul mR einfach, was läßt sich dann über Γm aussagen? Oder: Sei für $m \in M$ der Γ-Modul Γm einfach, was läßt sich dann über mR aussagen? Sind insbesondere die Moduln Γm im ersten Fall bzw. mR im zweiten Fall einfach? Analoge Fragen können gestellt werden, wenn von $\gamma \in \Gamma$ ausgegangen wird und $\Gamma\gamma$ bzw. $\gamma(M)$ (betrachtet als R-Rechtsmodul) als einfach vorausgesetzt werden. Die soweit angedeutete Fragestellung, die in der Literatur in Spezialfällen (meist nur als Hilfsmittel) behandelt wurde ([2], [3], [4]), soll hier systematisch dargestellt werden.

Um verschiedene Fälle einheitlich zu gewinnen, ist es zweckmäßig, gewisse neue Begriffe einzuführen. Wir verallgemeinern dazu die Voraussetzung des Γ-R-Bimoduls ${}_{\Gamma}M_R$ zu einem Modul B, auf dem von links ein Modul A und von rechts ein Modul C operieren. Werte bei Anwendung dieser Operatorenbereiche auf B werden in einem weiteren Modul Z angenommen, d. h. wir haben die Situation ${}_{U}A \underset{T}{\otimes} B \underset{S}{\otimes} C_R \longrightarrow {}_{U}Z_R$ mit beliebigen Ringen R, S, T, U. Damit wird nicht nur der Fall $\Gamma \otimes M \otimes R \longrightarrow M$, sondern zum Beispiel auch $\Gamma \otimes \Gamma \otimes M \longrightarrow M$ erfaßt. Gewisse technische Schwierigkeiten entstehen in der allgemeineren Situation dadurch, daß in den Moduln A und C keine Elemente enthalten sein müssen, die als Einsoperatoren auf B wirken, und weiterhin dadurch, daß in A und C keine Produkte definiert sind, die es erlauben von inversen Operatoren in A bzw. C zu sprechen. Daher müssen die Definitionen von injektiven Moduln und von Kogeneratoren in geeigneter Weise verallgemeinert werden.

Dem vor allem an den Spezialfällen interessierten Leser wird empfohlen, sich nach dieser Einleitung zunächst die Sätze 4.1. bis 4.4. anzusehen. Dort werden für einen injektiven Kogenerator M die eingangs formulierten Fragen so beantwortet: Für $m \in M$ ist Γm genau dann einfach, wenn mR einfach ist, und für $\gamma \in \Gamma$ ist $\Gamma\gamma$ genau dann einfach, wenn $\gamma(M)$ einfach ist. Allgemeiner zeigen wir für einen Kogenerator M und $m \in M$, daß Γm genau dann einfach ist, wenn mR einfach ist und in einem injektiven Untermodul von M_R enthalten ist, und daß aus mR einfach folgt, daß der Sockel von Γm einfach und ein großer Untermodul von Γm ist.

§ 1. Grundbegriffe

In dieser Arbeit seien alle Ringe assoziativ mit Einselement und alle Moduln unitär. Wir werden im folgenden häufig von der folgenden Situation (*) ausgehen:

(*) Es seien R, S, T, U Ringe und ${}_UA_T$, ${}_TB_S$, ${}_SC_R$, ${}_UX_S$, ${}_TY_R$, ${}_UZ_R$ Bimoduln; weiter seien Bimodulhomomorphismen

${}_UA \underset{T}{\otimes} B_S \longrightarrow {}_UX_S$, ${}_TB \underset{S}{\otimes} C_R \longrightarrow {}_TY_R$, ${}_UX \underset{S}{\otimes} C_R \longrightarrow {}_UZ_R$ und

${}_UA \underset{T}{\otimes} Y_R \longrightarrow {}_UZ_R$ so gegeben, daß das dadurch induzierte Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \underset{T}{\otimes} B \underset{S}{\otimes} C & \longrightarrow & X \underset{S}{\otimes} C \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \underset{T}{\otimes} Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

kommutativ ist.

Für $a \in A$, $b \in B$ bezeichne $ab \in X$ das Bild des Elements $a \otimes b \in A \underset{T}{\otimes} B$ bei $A \underset{T}{\otimes} B \longrightarrow X$. Für einen U-Untermodul $A' \subseteq A$ und $b \in B$ bezeichne A'b den U-Untermodul $\{ab \mid a \in A'\}$ von X. Entsprechend werde für einen S-Untermodul $B' \subseteq B$ ein U-S-Bimodul $A'B'$ definiert durch $A'B' = \{\sum ab \mid a \in A', b \in B'\}$. Analoge Definitionen werden wir in bezug auf die drei anderen Homomorphismen und die induzierten Homomorphismen in der Situation (*) verwenden.

Wir benötigen im folgenden die Bedingungen

(i): der durch $X \underset{S}{\otimes} C \longrightarrow Z$ induzierte Homomorphismus

$$X \longrightarrow Hom_R\,(C, Z) \text{ ist injektiv,}$$

(ii): der durch $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$ induzierte Homomorphismus

$$Y \longrightarrow Hom_U\,(A, Z) \text{ ist injektiv.}$$

1.1. Lemma: *Sei* (*) *gegeben, und sei* $b \in B$. *Dann gelten:*

a) *Aus* (i) *und* $Ab \neq O$ *folgt* $bC \neq O$.
b) *Aus* (ii) *und* $bC \neq O$ *folgt* $Ab \neq O$.

Beweis: Aus Symmetriegründen genügt es, $a)$ zu zeigen. Da $Ab \subseteq X$ ein von Null verschiedenes Element ab enthält, ist $abC \neq O$ wegen (i). Daher muß $bC \neq O$ gelten.

Im nächsten Absatz erinnern wir an einige bekannte Tatsachen.

Definition: Seien A und M R-Rechtsmoduln. A heißt *M-injektiv*, wenn für jede exakte Folge $O \longrightarrow N \longrightarrow M$ und jedes $f \in \mathrm{Hom}_R\,(N, A)$ ein $g \in \mathrm{Hom}_R\,(M, A)$ so existiert, daß

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

1.2. Lemma: *Sei A M-injektiv. Dann ist A M'/M''-injektiv für alle Untermoduln $M'' \subseteq M' \subseteq M$.*

Beweis ist bekannt, soll aber der Vollständigkeit halber angegeben werden. Sei $O \longrightarrow N \xrightarrow{t} M'/M''$ exakt und sei $f \in \mathrm{Hom}_R(N, A)$ gegeben. Sei N' das Urbild von $t(N)$ bei $M' \longrightarrow M'/M''$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M'' \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & M' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl, bend left, "h"] & M \arrow[ddll, bend left, "k"] \\
& N \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f"'] & M'/M'' \arrow[dl, "g"'] & \\
& A & &
\end{tikzcd}$$

wobei s durch

$$s(n') = n \text{ für } n \in N \text{ mit } t(n) = n' + M''$$

definiert wird und ein Epimorphismus ist. Nach Voraussetzung existiert ein k mit $k|N' = fs$. Ist h die Einschränkung von k auf M', dann gilt wegen $s(M'') = O$ auch $h(M'') = O$, also kann h über M'/M'' durch ein g faktorisiert werden. Dafür gilt dann $f(n) = f(s(n')) = h(n') = g(n' + M'') = gt(n)$, also $f = gt$.

1.3. Lemma: *Ist A selbstinjektiv, d. h. A-injektiv, so gibt es zu jedem Untermodul B von A einen direkten Summanden von A, in dem B groß ist.*

Beweis ist ebenfalls bekannt (z. B. [1]), soll aber auch der Vollständigkeit halber angegeben werden. Sei $B' \subseteq A$ maximal bezgl. $B \cap B' = O$ und sei B'' maximal bezgl. $B \subseteq B'' \subseteq A$ und $B'' \cap B' = O$. Behauptung: B ist groß in B'' und $A = B'' \oplus B'$. Aus der Maximalität von B' in $B \cap B' = O$ folgt sofort, daß B in B'' groß ist. Um $A = B'' + B'$ zu zeigen, betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B'' \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\iota"'] & A/B' \arrow[dl, "g"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

wobei ι die Inklusion und $\nu: A \longrightarrow A/B'$ der natürliche Epimorphismus seien. Nach 1.2 ist A A/B'-injektiv, also existiert ein g mit $\iota = g\nu\iota$. Wegen der Maximalität von B' in $B \cap B' = O$ ist $Bi(\nu\iota)$ groß in A/B'. Folglich ist g ein Monomorphismus. Daher ist B'' groß in $Bi(g)$. Daraus folgt $Bi(g) \cap B' = O$. Wegen der Maximalität von B'' erhält man dann $B'' = Bi(g)$. Daher ist $g\nu$ eine Projektion von A auf B'' mit $Ke(g\nu) = B'$, woraus $A = B'' \oplus B'$ folgt.

Wir kommen nun zu einem neuen Injektivitätsbegriff, der für die einheitliche Herleitung unserer Resultate wesentlich ist. Dabei seien im folgenden alle Moduln Bimoduln im Sinne von (*) und alle Homomorphismen seien entsprechende Bimodulhomomorphismen.

Definition: 1.) Ein Untermodul E_R von Z_R heißt bezüglich $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$ *(rechts-) injektiv*, wenn zu jedem Untermodul Y'_R von Y_R und zu jedem $f \in \mathrm{Hom}_R(Y', E)$ ein $g \in \mathrm{Hom}_R(Y, E)$ und ein $a \in A$ so existieren, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "a"] \arrow[dl, "g"'] \\ E \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, wobei a: $Y \longrightarrow Z$ definiert ist durch $a(y) = ay$.

2.) Sei Z'_R ein Untermodul von Z_R. Ein Modul E_R mit $Z'_R \subseteq E_R \subseteq Z_R$, der injektiv bezüglich $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$ ist und für den Z' groß in E ist, heißt eine *injektive Hülle* von Z' in Z bezüglich $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$.

Bemerkungen: 1.) Ist E bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$ injektiv, so ist E Y-injektiv.

2.) Sind $A = \mathrm{Hom}_R(Y, Z)$ und $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$ die Auswertungsabbildung, so sind für $E \subseteq Z$ die Begriffe „Y-injektiv" und „injektiv bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$" äquivalent.

1.4. Lemma: *Sei $E_R \subseteq Z_R$ injektiv bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$. Sei F_R direkter Summand von E_R. Dann ist F injektiv bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$.*

Beweis: Sei $p: E \longrightarrow F$ die Projektion auf den direkten Summanden F von E und i: $F \longrightarrow E$ die zugehörige Injektion. Sei $f \in \operatorname{Hom}_R (Y', F)$ gegeben.

Wegen der Injektivität von E erhalten wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[rr] \arrow[d, "f"'] & & Y \arrow[r, "1_Y"] \arrow[ddl, "g"'] \arrow[dd, "a"] & Y \arrow[dddd, "a'"] \\
F \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "1_F"'] & & & \\
 & E \arrow[r] \arrow[dl, "p"] & Z & \\
F \arrow[d, "i"'] & & & \\
E \arrow[rrr] & & & Z
\end{tikzcd}$$

woraus man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, "pg"'] \arrow[d, "a'"] \\
F \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

erhält.

1.5. Lemma: *Sei $E_R \subseteq Z_R$ injektiv bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$ und sei E_R epimorphes Bild von Y_R. Dann hat jeder Untermodul D_R von E_R eine injektive Hülle bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$.*

Beweis: Nach Bemerkung 1) ist E Y-injektiv. Da E epimorphes Bild von Y ist, ist nach 1.2 E selbstinjektiv. Nach 1.3 und 1.4 folgt die Behauptung.

1.6. Folgerung: *Sei $E_R \subseteq Z_R$ injektiv bzgl. $U \underset{U}{\otimes} Z \longrightarrow Z$. Dann hat jeder Untermodul $D_R \subsetneqq E_R$ eine injektive Hülle bzgl. $U \underset{U}{\otimes} Z \longrightarrow Z$ in Z.*

Beweis: Wegen der Injektivität von E existiert ein $u \in U$, so daß

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "1_E"'] & Z \arrow[dl, "u"] \\ E & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Also ist $E = uZ$.

Für den Homomorphismus $A \otimes Y \longrightarrow Z$ und Teilmengen $A' \subseteq A$ bzw. $Y' \subseteq Y$ definieren wir Annullatoren

$r_Y(A')\colon = \{y \in Y \mid ay = O$ für alle $a \in A'\}$ und
$l_A(Y')\colon = \{a \in A \mid ay = O$ für alle $y \in Y'\}$. Insbesondere seien
$r_Y(a)\colon = r_Y(\{a\})$ und $l_A(y)\colon = l_A(\{y\})$.

1.7. Lemma: *Sei $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$ gegeben. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

a) *für alle Untermoduln $Y'_R \subseteq Y_R$ gilt*

$$Y'_R = \bigcap \{r_Y(a) \mid a \in A,\ Y' \subseteq r_Y(a)\},$$

b) *für alle Untermoduln $Y'_R \subsetneqq Y''_R \subseteq Y_R$ existiert ein $a \in A$ mit $aY' = O$* und *$aY'' \neq O$,*

c) *für alle Untermoduln $Y'_R \subsetneqq Y''_R \subseteq Y_R$ mit Y' maximal* in *Y'' existiert ein $a \in A$ mit $aY' = O$ und $aY'' \neq O$,*

d) *für alle Untermoduln $Y'_R \subseteq Y_R$ gilt $r_Y(l_A(Y')) = Y'$.*

Beweis: b) $\Rightarrow$ a): Sei $Y''_R\colon = \bigcap \{r_Y(a) \mid a \in A,\ Y' \subseteq r_Y(a)\}$ und $Y'_R \subsetneqq Y''_R \subseteq Y_R$. Dann existiert $a \in A$ mit $aY' = O$ und $aY'' \neq O$, also ist $Y' \subseteq r_Y(a)$ und $Y'' \nsubseteq r_Y(a)$ im Widerspruch zur Definition von Y''. Also ist $Y' = Y''$.

c) $\Rightarrow$ b): Sei $y \in Y''$, $y \notin Y'$. Dann ist $(Y' + yR)/Y' \neq O$ und endlich erzeugt, besitzt also einen maximalen Untermodul, dessen Urbild Y^+ in $Y^{++} := Y' + yR$ wieder maximal ist. Also existiert $a \in A$ mit $aY^+ = O$ und $aY^{++} \neq O$. Daher ist $aY' \subseteq aY^+ = O$ und $O \neq aY^{++} \subseteq aY''$.

d) $\Rightarrow$ c): Sei $Y' \subsetneqq Y'' \subseteq Y$ mit Y' maximal in Y'' gegeben. Dann ist $r_Y l_A(Y') \subsetneqq r_Y l_A(Y'')$, also $l_A(Y') \supsetneqq l_A(Y'')$. Daher existiert ein $a \in A$ mit $aY' = O$ und $aY'' \neq O$.

a) $\Rightarrow$ d): Es ist $r_Y l_A(Y') \supseteq Y'$. Sei $y \in r_Y l_A(Y')$ und $y \notin Y'$. Dann existiert ein $a \in A$ mit $ay \neq O$ und $aY' = O$, weil y nicht in allen Moduln $r_Y(a')$ mit $Y' \subseteq r_Y(a')$ liegen kann. Aber $a \in l_A(Y')$ und $y \in r_Y l_A(Y')$ impliziert $ay = O$. Wegen dieses Widerspruchs muß $Y' = r_Y l_A(Y')$ gelten.

Definition: 1.) Der Modul Z_R heißt (*Rechts-*) *Skalar-Modul* bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$, wenn eine der vier äquivalenten Bedingungen von Lemma 1.7 erfüllt ist.

2.) Der Modul Z_R heißt (*Rechts-*) *Kogenerator* bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$, wenn für alle Untermoduln $Y'_R \subsetneqq Y''_R \subseteq Y_R$ mit Y' maximal in Y'' ein $a \in A$ und ein Untermodul $E_R \subseteq Z_R$, der (rechts-) injektiv bzgl. $U \underset{U}{\otimes} Z \longrightarrow Z$ ist, existieren, so daß $aY' = O$ und $aY'' \neq O$ und $aY'' \subseteq E$ gelten.

Ein Kogenerator bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$ ist also auch immer ein Skalar-Modul bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$.

1.8. Folgerung: *In der Situation* (*) *sei* Y *ein Skalar-Modul bzgl.* $B \underset{S}{\otimes} C \longrightarrow Y$ *und es gelte Bedingung* (*ii*). *Dann ist* Z *ein Skalar-Modul bzgl.* $X \underset{S}{\otimes} C \longrightarrow Z$.

Beweis: Seien Untermoduln $C'_R \subsetneqq C''_R \subseteq C_R$ gegeben. Dann existiert ein $b \in B$ mit $bC' = O$ und $bC'' \neq O$. Wegen (*ii*) existieren $a \in A$, $bc'' \in bC''$ mit abc'' $\neq O$. Also ist $abC'' \neq O$, $abC' = O$ und $ab \in X$.

1.9. Satz: Z_R *ist genau dann Kogenerator bzgl.* $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$, *wenn für alle Untermoduln* $Y'_R \subsetneqq Y''_R \subseteq Y$ *ein* $a \in A$ *und ein Untermodul* $E_R \subseteq Z_R$ *existieren, so daß* $aY' = O$, $aY'' \neq O$, $aY'' \subseteq E$ *und* E *eine injektive Hülle von* aY'' in Z *bzgl.* $U \underset{U}{\otimes} Z \longrightarrow Z$ *sind.*

Beweis: Wie im Beweis von Lemma 1.7 sei $Y' \subseteq Y^+ \subsetneqq Y^{++} \subseteq Y''$ mit Y^+ maximal in Y^{++}. Sei $O \neq aY^{++} \subseteq E \subseteq Z$ und $aY^+ = O$, wobei E injektiv bzgl. $U \otimes_U Z \to Z$ ist. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y^{++} \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "a"] & \\
aY^{++} \arrow[r] \arrow[d] & aY \arrow[r] & Z \arrow[d, "u"] \arrow[dll, "g"'] \\
E \arrow[rr] & & Z
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ, weil g und u wegen der Injektivität von E bzgl. $U \otimes_U Z \to Z$ existieren. Sei $a' = ua$. Dann ist $a'y = ay$ für alle $y \in Y^{++}$, also ist $a'Y' = O$, $a'Y'' \neq O$ und $a'Y'' = uaY'' \subseteq E$. Nach 1.6 besitzt also $a'Y''$ eine injektive Hülle in Z bzgl. $U \otimes_U Z \to U$.

§ 2. Einfache Untermoduln von Kogeneratoren

2.1. Lemma: *In der Situation (*) gelte (i) und sei Z Kogenerator bzgl. $A \otimes_T Y \to Z$. Sei ${}_U Uab$ einfach. Dann ist abC_R einfach, also $r_{bC}(a)_R \subsetneqq bC_R$ maximaler Untermodul.*

Beweis: Wegen $Uab \neq O$ und (i) gilt $UabC \neq O$, also $abC \neq O$. Daher ist $r_{bC}(a) \subsetneqq bC$. Sei $r_{bC}(a) \subseteq D \subsetneqq bC$. Dann existiert ein $a' \in A$ mit $a'D = O$, $a'bC \neq O$ und $a'bC \subseteq E \subseteq Z$, wobei E injektiv bzgl. $U \otimes_U Z \to Z$ ist. Wegen $a'r_{bC}(a) = O$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "b"] & bC \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "a'"'] & abC \arrow[rr] \arrow[d] & & Z \arrow[dl] \arrow[d, "u"] \\
& & a'bC \arrow[r] & E \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

also ist wegen (i) $a'b = uab \in Uab$. Da Uab einfach ist, existiert ein u' mit $u'a'b = ab$.

Sei $bc = d \in D \subseteq bC$. Wegen $a'D = O$ ist dann

$$O = u'a'd = u'a'bc = abc = ad, \text{ also } d \in r_{bC}(a).$$

Damit ist $D = r_{bC}(a)$, d. h. $r_{bC}(a)$ ist maximaler Untermodul von bC und folglich ist abC einfach.

In der Situation (*) werden wir für die folgenden Sätze häufig die beiden Bedingungen voraussetzen:

(a) Für jeden Untermodul bC von Y und jeden maximalen Untermodul D von bC existiert ein $a \in A$ mit $aD = O$, $abC \neq O$ und $abC_R \subseteq E_R \subseteq Z_R$, wobei E injektiv bzgl. $U \underset{U}{\otimes} Z \longrightarrow Z$ ist.

(b) Ist Uab einfach, so ist abC einfach.

Diese Bedingungen sind insbesondere erfüllt, wenn in der Situation (*) die Bedingung (i) gilt und Z Kogenerator bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$ ist. (a) gilt nämlich per Definition des Kogenerators und (b) gilt wegen 2.1.

2.2. Folgerung: *In der Situation* (*) *gelte* (b). *Sei* $_UQ \subseteq {_UAb}$ *ein einfacher Untermodul. Dann ist* $br_C(Q)_R \subsetneqq bC_R$ *ein maximaler Untermodul.*

Beweis: Es ist $Q = Uab$. Wegen (b) ist dann $r_{bC}(a) \subsetneqq bC$ ein maximaler Untermodul. Da offensichtlich $r_{bC}(a) = br_C(Uab)$ gilt, folgt die Behauptung.

2.3. Satz: *In der Situation* (*) *gelte* (i), (a) *und* (b). *Sei* $_UQ \subseteq {_UAb}$ *ein einfacher Untermodul. Dann ist* $Q = Soc(l_X r_C(Q))$ *und* Q *ist großer Untermodul von* $l_X r_C(Q)$.

Beweis: Nach 2.2 ist $br_C(Q) \subsetneqq bC$ ein maximaler Untermodul, also ist $r_C(Q) \subsetneqq C$ ein maximaler Untermodul, denn $r_C(Q)$ ist das Urbild von $br_C(Q)$ bei der Multiplikation mit b. Für $O \neq x \in l_X r_C(Q)$ ist $xC \neq O$ wegen (i). Da $xr_C(Q) = O$, ist xC einfach und $r_C(x) = r_C(Q)$. Sei $a \in A$ mit $abC \neq O$, $abr_C(Q) = O$ und $abC \subseteq E \subseteq Z$ gegeben, wobei E injektiv bzgl. $U \underset{U}{\otimes} Z \longrightarrow Z$ ist. Wegen $O \neq ab \in l_X r_C(Q)$ ist abC einfach und $r_C(ab) = r_C(Q)$.

Daher sind abC und xC isomorph, und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "ab"'] & xC \arrow[rr] \arrow[d, phantom, "\cong"] & & Z \arrow[dl] \arrow[d, "u"] \\
 & abC \arrow[r] & E \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

d. h. es existiert für jedes $0 \neq x \in l_X r_C(Q)$ ein $u \in U$ mit $ux = ab$ (wegen (*i*)). Also ist $Uab \neq 0$ und Uab groß in $l_X r_C(Q)$.

Ist $0 \neq q \in Q \subseteq l_X r_C(Q)$ gegeben, so ist $uq = ab$ für ein geeignetes $u \in U$, also $Uuq = Uab \subseteq Q$. Da Q einfach ist, ist $Uab = Q$. Folglich gilt $Q = \mathrm{Soc}(l_X r_C(Q))$.

2.4. Lemma: *In der Situation* (*) *gelte* (*i*). *Sei* $D_R \subsetneqq bC_R$ *ein maximaler Untermodul. Existiere ein* $a \in l_A(D)$ *mit* $0 \neq abC_R \subseteq E_R \subseteq Z_R$, *wobei* E *injektiv bzgl.* $U \underset{U}{\otimes} Z \to Z$ *ist. Dann ist* ${}_U Uab = {}_U \mathrm{Soc}(l_A(D)b)$ *einfacher und großer Untermodul von* ${}_U l_A(D)b$.

Beweis: Sei $a' \in l_A(D)$ mit $a'b \neq 0$ gegeben. Zu zeigen ist: Es existiert ein $u \in U$ mit $ua'b = ab$. Im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r] & bC \arrow[r, "a'"] \arrow[dr, "a"'] & a'bC \arrow[rr] \arrow[d, phantom, "\cong"] & & Z \arrow[dl] \arrow[d, "u"] \\
 & & abC \arrow[r] & E \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

existiert der Isomorphismus $a'bC \cong abC$, weil $a'bC \cong bC/D \cong abC$ gilt. Es ist also $ua'bc = abc$ für alle $bc \in bC$. Wegen (*i*) gilt daher $ua'b = ab$.

2.5. Folgerung: *In der Situation* (*) *gelte* (*i*) *und* (*a*). *Sei* $D_R \subsetneqq bC_R$ *ein maximaler Untermodul. Dann ist* ${}_U\mathrm{Soc}(l_A(D)b)$ *einfach und groß in* $l_A(D)b$.

Beweis: Wegen (*a*) existiert ein $a \in A$ mit $aD = 0$, $abC \neq 0$ und $abC \subseteq E \subseteq Z$, wobei E injektiv bzgl. $U \underset{U}{\otimes} Z \to Z$ ist. Damit kann 2.4. angewendet werden.

2.6. Satz: *In der Situation (*) gelte (i), (a) und (b). Dann sind die Zuordnungen*

1.) *jedem maximalen Untermodul* $D_R \subsetneqq bC_R$ *wird der einfache Untermodul* ${}_U Soc(l_A(D)b) \subseteq {}_U Ab$ *zugeordnet*

2.) *jedem einfachen Untermodul* ${}_U Q \subseteq {}_U Ab$ *wird der maximale Untermodul* $br_C(Q) \subsetneqq bC$ *zugeordnet*

invers zueinander.

Beweis: Nach 2.2. und 2.5. sind die Zuordnungen wohldefiniert. Wir behaupten, daß $Q \subseteq Soc(l_A(br_C(Q))b)$ gilt. Sei nämlich $q = ab \in Q \subseteq AB$, dann ist $abr_C(Q) = qr_C(Q) = O$, also ist $ab = q \in l_A(br_C(Q))b$. Da Q einfach ist, liegt es sogar im Sockel. Weiter ist $br_C(Q)$ maximal in bC (2.2.), also $\mathrm{Soc}(l_A(br_C(Q))b)$ einfach (2.5.). Damit gilt $Q = Soc(l_A(br_C(Q))b)$. Umgekehrt ist $Soc(l_A(D)b) \subseteq l_A(D)b$, also $br_C(l_A(D)b) \subseteq br_C(Soc(l_A(D)b))$. Weiter ist $D \subseteq br_C(l_A(D)b) \subseteq br_C(Soc(l_A(D)b)) \subseteq bC$.
Da D und auch $br_C(Soc(l_A(D)b))$ maximale Untermoduln von bC sind, ist $D = br_C(Soc(l_A(D)b))$.

2.7. Satz: *In der Situation (*) gelte (i) und sei Z Kogenerator bzgl.* $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$. *Sei* $D_R \subseteq bC_R$ *ein Untermodul.*

Äquivalent sind:

a) *D ist maximaler Untermodul von bC und es gibt zu jedem* $a \in l_A(D)$ *einen Modul* E_R *mit* $abC \subseteq E \subseteq Z$, *der injektiv bzgl.* $U \underset{U}{\otimes} Z \longrightarrow Z$ *ist.*

b) $l_A(D)b$ *ist einfach.*

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Da $D \subsetneqq bC$, existiert ein $a \in A$ mit $aD = O$, $abC \neq O$ und $abC \subseteq E \subseteq Z$, wobei E injektiv bzgl. $U \underset{U}{\otimes} Z \longrightarrow Z$ ist. Nach 2.4. ist Uab einfach und groß in $l_A(D)b$. Aber für alle $a' \in l_A(D)$ mit $a'b \neq O$, d. h. mit $a'bC \neq O$ wegen (i), ist ebenso $Ua'b$ einfach und groß in $l_A(D)b$. Damit ist $l_A(D)b$ einfach.
b) $\Rightarrow$ a): Ist $abC = O$, so ist abC injektiv bzgl. $U \underset{U}{\otimes} Z \longrightarrow Z$. Ist $O \neq ab \in l_A(D)b$, so ist Uab einfach, also abC einfach nach 2.1. Weiter ist $aD = O$, also ist D in einem maximalen Untermodul von bC enthalten.

Damit existiert $a' \in A$ mit $a'D = O$, $a'bC \neq O$ und $a'bC$ liegt in einer injektiven Hülle E bzgl. $U \underset{U}{\otimes} Z \to Z$.

Wegen $a'b \neq O$ ist also $Ua'b = l_A(D)b$. Sei $c \in r_C(l_A(D)b)$. Dann ist $O = Ua'bc = l_A(D)bc$, also $bc \in r_Y l_A(D) = D$.

Damit ist $br_C(l_A(D)b) \subseteq D \subsetneqq bC$. Da aber nach 2.2. $br_C(l_A(D)b)$ maximaler Untermodul von bC ist, ist D maximal in bC. Sei jetzt wieder $O \neq ab \in l_A(D)b$. Da auch $O \neq a'b \in l_A(D)b$ ist, existiert ein $u \in U$ mit $ua'b = ab$. Nun sind abC und $a'bC$ einfach und isomorph wegen $aD = O$ und $a'D = O$. Da $a'bC$ groß in E ist, ist $abC = ua'bC$ groß in $uE \cong E$.

Weiter ist uE_R injektiv bzgl. $U \underset{U}{\otimes} Z \to Z$. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"'] & & & Z \arrow[dll] \arrow[dl, "u'"'] \arrow[dd, "uu'"] \\
& E \arrow[r] \arrow[dl, dash, "\cong"] & Z \arrow[dr, "u"] & \\
uE \arrow[rrr] & & & Z
\end{tikzcd}$$

folgt nämlich, daß zu f die Multiplikation mit uu' gehört.

2.8. Folgerung: *In der Situation (*) gelte (i) und sei Z Kogenerator bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \to Z$. Sei Ab einfach. Dann ist bC einfach, und es gibt zu jedem $a \in A$ einen Modul E_R mit $abC \subseteq E \subseteq Z$, der injektive Hülle von abC bzgl. $U \underset{U}{\otimes} Z \to Z$ ist.*

Beweis: Man setze $D = O$ in 2.7. und verwende 1.6.

2.9. Satz: *In der Situation (*) gelte (i), (a) und (b). Dann sind äquivalent:*

1.) $\mathrm{Soc}({}_U Ab) \neq O$

2.) $r_C(b)_R$ *ist in einem maximalen Untermodul von* C_R *enthalten.*

Beweis: $\mathrm{Soc}({}_U Ab)$ ist genau dann von Null verschieden, wenn es einen einfachen Modul in Ab gibt, genau dann, wenn es einen maximalen Untermodul in bC gibt (2.6), genau dann, wenn $r_C(b)$ in einen maximalen Untermodul von C enthalten ist.

2.10. Satz: *In der Situation* (*) *gelte* (i), (a) *und* (b). *Dann sind äquivalent*:

1.) $\mathrm{Soc}({}_U Ab)$ *ist groß in* ${}_U Ab$.

2.) *Jeder echte Untermodul* D *von* bC_R, *für den es ein* $a \in l_A(D)$ *gibt mit* $abC \neq O$, *ist in einem maximalen Untermodul von* bC *enthalten.*

3.) *Für alle* $a \in A$ *mit* $ab \neq O$ *ist* $r_{bC}(a)_R$ *in einem maximalen Untermodul von* bC_R *enthalten.*

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 3): Sei $ab \neq O$. Dann existiert ein $u \in U$ mit $O \neq uab \in \mathrm{Soc}(Ab)$, also ist $Uuab$ halbeinfach. Damit existiert ein $u' \in U$, so daß $Uu'uab$ einfach ist. Wegen (b) ist dann $r_{bC}(u'ua)$ maximaler Untermodul von bC. Offenbar gilt $r_{bC}(a) \subseteq r_{bC}(u'ua)$.

3) $\Rightarrow$ 1): Sei $O \neq ab \in Ab$. Gesucht wird ein $u \in U$ mit $O \neq uab \in \mathrm{Soc}(Ab)$. Sei $r_{bC}(a) \subseteq D \subsetneqq bC$, wobei D maximaler Untermodul von bC ist. Dann existiert ein $a' \in A$ mit $a'D = O$, $a'bC \neq O$ und $a'bC \subseteq E \subseteq Z$, wobei E injektiv bzgl. $U \underset{U}{\otimes} Z \longrightarrow Z$ ist.

Wegen $a' r_{bC}(a) = O$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "b"] & bC \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "a'"'] & abC \arrow[rr] \arrow[d] & & Z \arrow[dl] \arrow[d, "u"] \\
& & a'bC \arrow[r] & E \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

also ist wegen (i) $a'b = uab$. Wegen 2.4. ist $Ua'b$ einfach, also ist $uab = a'b \in \mathrm{Soc}(Ab)$.

2) $\Rightarrow$ 3): Ist trivial.

3) $\Rightarrow$ 2): Sei $D \subsetneqq bC$ ein Untermodul. Dann existiert ein $a \in A$ mit $aD = O$, $abC \neq O$. Also ist $D \subseteq r_{bC}(a)$, und $r_{bC}(a)$ ist in einem maximalen Untermodul von bC enthalten.

2.11. Folgerung: *In der Situation* (*) *gelte* (i) *und sei* Z *Kogenerator bzgl.* $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$. *Dann sind äquivalent*:

1.) $\mathrm{Soc}({}_U Ab)$ *ist einfacher, großer Untermodul von* Ab.

2.) bC *besitzt einen größten echten Untermodul.*

Beweis: Nach 2.6. ist $\mathrm{Soc}(Ab)$ genau dann einfach, wenn bC genau einen maximalen Untermodul D besitzt. Der Rest der Äquivalenz folgt aus 2.10.

2.12. Satz: *In der Situation* (*) *gelte* (*i*), (*a*) *und* (*b*).

Dann gilt

$$Rad(bC_R) = br_C(\mathrm{Soc}(_UA)).$$

Beweis: Sei D ein maximaler Untermodul von bC, dann gilt nach 2.6: $D = br_C(\mathrm{Soc}(l_A(D)b))$ und jeder einfache Untermodul von Ab ist von der Form $\mathrm{Soc}(l_A(D)b)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} br_C(Soc(_UAb)) &= br_C\Big(\sum_{D \text{ max. in } bC} Soc(l_A(D)b)\Big) \\ &= b \bigcap_D r_C(\mathrm{Soc}(l_A(D)b)) \\ &= \bigcap_D br_C(\mathrm{Soc}(l_A(D)b)) = \bigcap_D D = \mathrm{Rad}(bC_R), \end{aligned}$$

wobei nur noch die Gleichung $\bigcap_D D = b \bigcap_D r_C(\mathrm{Soc}(l_A(D)b))$ zu beweisen ist. Daß die rechte Seite in der linken enthalten ist, folgt aus 2.6. Sei jetzt $bc \in D$, dann gilt $l_A(D)bc = O$, folglich Soc $(l_A(D)b)c = O$, also $c \in r_C(\mathrm{Soc}(l_A(D)b))$, woraus die Inklusion von links nach rechts folgt.

Wir bemerken noch, daß im Spezialfall

$$A = B = C = X = Y = Z = U = T = S = R$$

unsere Bedingung (*a*) die Bedingung (*a*) aus Kato [3] impliziert. Im selben Spezialfall sei Rab einfach. Die Aussage, daß abR einfach ist, ist dann äquivalent mit der folgenden Aussage. Für alle $r \in R$ mit $abr \neq O$ und für alle $r' \in R$ existiert ein $r'' \in R$ mit $abrr'' = abr'$. Falls $abr \neq O$ ist, ist $Rabr \cong Rab$, weil Rab einfach ist. Wir bezeichnen diesen Isomorphismus mit r^{-1}. Die Aussage, daß abR einfach ist, ist dann äquivalent zu: Für alle Homomorphismen der Form $r^{-1}r'\colon Rabr \longrightarrow R$ existiert ein $r'' \in \mathrm{Hom}_R(_RR, {_RR})$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Rabr \arrow[r] \arrow[d, "r^{-1}r'"'] & R \arrow[dl, "r''"] \\ R & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Diese Bedingung ist ein Folgerung der Bedingung, daß

$$O \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/Rabr, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Rabr, R) \longrightarrow O$$

exakt ist. Diese wiederum wird von $Ext^1_R(R/Rabr, R) = O$ impliziert. Die Forderung $Ext^1_R(R/U, R) = O$ für alle einfachen Linksideale U in R [3] impliziert also in dem betrachteten Spezialfall unsere Bedingung (b).

§ 3. Induzierte Homomorphismen zwischen Untermoduln

Um die folgenden Überlegungen leichter verständlich zu machen, soll der einfache Grundgedanke zunächst im Spezialfall auseinandergesetzt werden.

Seien $M = M_R$, $\Gamma = \mathrm{End}(M_R)$ und $M = {}_\Gamma M_R$. Dann heiße M_R Skalarmodul, wenn für jeden Untermodul $U \subseteq M_R$

$$r_M l_\Gamma(U) = U$$

gilt. Offenbar ist jeder Kogenerator ein Skalarmodul.

Seien jetzt M_R Skalarmodul und $x, y \in M$.

Sei ferner

$$f\colon \Gamma x \longrightarrow \Gamma y$$

ein Γ-Homomorphismus mit $f(x) = \tau y$, $\tau \in \Gamma$.
Da M_R Skalarmodul ist, folgt

$$f(x) = \tau y \in xR.$$

Ist nämlich $\gamma x = O$, so ist auch $\gamma f(x) = O$.

Aus $l_\Gamma(xR) \subseteq l_\Gamma(f(x)R)$ folgt dann $f(x)R = r_M l_\Gamma(f(x)R) \subseteq r_M l_\Gamma(xR) = xR$

Definiert man

$$\hat{f}: yR \longrightarrow xR$$

durch

$$yr \mapsto \tau y r,$$

so ergibt sich ein R-Homomorphismus, für den gilt

$$f \neq O \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f} \neq O, \tag{1}$$

$$\mathrm{Mono}\, f \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Epi}\, \hat{f}, \tag{2}$$

$$\mathrm{Epi}\, f \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Mono}\, \hat{f}. \tag{3}$$

Als Folgerung erhält man daraus

$$(4) \qquad \Gamma x \cong \Gamma y \quad \Rightarrow \quad xR \cong yR.$$

In 3.1.–3.10 werden diese Überlegungen verallgemeinert. Die weiteren Untersuchungen dieses Paragraphen beschäftigen sich mit Verallgemeinerungen der Frage: Seien $x, y \in M$, xR einfach und $xR \cong yR$, gilt dann Γx einfach und $\Gamma x \cong \Gamma y$? Spezialfälle davon finden sich in der Literatur ([2], [3], [4]).

3.1. Lemma: *In der Situation* (*) *sei* $g\colon {}_UQ \to {}_UAb$ *ein* U-*Homomorphismus. Dann induziert* g *genau einen* R-*Homomorphismus* $\tilde{g}\colon bC \to \operatorname{Hom}_U(Q, Z)$ *mit* $\tilde{g}(bc)(q) = g(q)c$.

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß $\tilde{g}$ wohldefiniert ist, und dies folgt aus $g(q) \in Ab$.

(**) Seien nun weitere Ringe S', T',
Bimoduln ${}_UA'_{T'}$, ${}_{T'}B'_{S'}$, ${}_{S'}C'_R$, ${}_UX'_{S'}$, ${}_{T'}Y'_R$ und
Bimodulhomomorphismen ${}_UA' \otimes_{T'} B'_{S'} \to {}_UX'_{S'}$,
${}_{T'}B' \otimes_{S'} C'_R \to {}_{T'}Y'_R$, ${}_UA' \otimes_{T'} Y'_R \to {}_UZ_R$ und
${}_UX' \otimes_{S'} C'_R \to {}_UZ_R$ gegeben, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} {}_UA' \otimes_{T'} B' \otimes_{S'} C'_R & \longrightarrow & {}_UX' \otimes_{S'} C'_R \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_UA' \otimes_{T'} Y'_R & \longrightarrow & {}_UZ_R \end{array}$$

kommutativ ist.

3.2. Folgerung: *Seien die Situationen* (*) *und* (**) *gegeben. Sei* $f\colon A'b' \to Ab$ *mit* $b' \in B'$ *und* $b \in B$ *ein* U-*Homomorphismus. Dann induziert* f *genau einen* R-*Homomorphismus* $\bar{f}\colon bC \to \operatorname{Hom}_U(A', Z)$ *mit* $\bar{f}(bc)(a') = f(a'b')c$.

Beweis: Sei $g\colon A' \xrightarrow{b'} A'b' \xrightarrow{f} Ab$. Dann sei $\bar{f} = \tilde{g}$ im Sinne von 3.1.

3.3. Satz: *In den Situationen* (*) *und* (**) *gelte* (*ii*) *für* (**) *und sei* $f\colon A'b' \to Ab$ *ein* U-*Homomorphismus. Sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

1) *Z ist Skalar-Modul bzgl.* $A' \otimes \mathrm{Hom}_U(A', Z') \longrightarrow Z$ *wobei* ${}_UABC_R + {}_UA'B'C'_R \subseteq {}_UZ'_R \subseteq {}_UZ_R$ *gilt, und es gelte* (i) für (**).

2) *Für alle $c \in C$ ist Abc in einem U-Untermodul ${}_UE$ von ${}_UZ$ enthalten, der links-injektiv bzgl.* $X' \underset{S'}{\otimes} C' \longrightarrow Z$ *ist.*

Dann existiert genau ein R-Homomorphismus $\hat{f} : bC \longrightarrow b'C'$ mit $a'\hat{f}(bc) = f(a'b')c$ für alle $a' \in A'$, $c \in C$.

Beweis: Wegen (ii) für (**) gilt $b'C' \subseteq \mathrm{Hom}_U(A', Z)$. Es genügt also zu zeigen: Bild$(\tilde{f}) \subseteq b'C'$, wobei wir $b'C'$ vermöge des Monomorphismus $Y' \longrightarrow \mathrm{Hom}_U(A', Z)$ mit seinem Bild in $\mathrm{Hom}_U(A', Z)$ identifizieren. $\hat{f} : bC \longrightarrow b'C'$ definieren wir dann als Einschränkung des Ziels von $\tilde{f} : bC \longrightarrow \mathrm{Hom}_U(A', Z)$ auf $b'C'$, was immer dann möglich ist, wenn Bild$(\tilde{f}) \subseteq b'C'$ gilt.

1.) Ist $a'b'C' = O$, so ist wegen (i) für (**) $a'b' = O$. Damit ist dann $f(a'b') = O$ und $f(a'b')C = O$. Das bedeutet $l_{A'}(b'C') \subseteq l_{A'}(f(-b')C)$, wobei $f(A'b')C \subseteq ABC \subseteq Z'$ und $A'b'C' \subseteq Z'$. Da Z Skalar-Modul ist, folgt

$$b'C' = r_{\mathrm{Hom}_U(A', Z')}\, l_{A'}(b'C') \supseteq r_{\mathrm{Hom}_U(A', Z')}\, l_{A'}(f(-b')C') = \\ = f(-b')C', \text{ also ist } \mathrm{Bild}(\tilde{f}) = f(-b')C \subseteq b'C'.$$

2.) In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "b'"] & A'b' \arrow[rr] \arrow[d, "f"] & & X' \arrow[ddl] \arrow[dd, "c'"] \\
& Ab \arrow[d, "c"] & & \\
& Abc \arrow[r] & E \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

folgt die Existenz von c' aus der Injektivität von E. Also existiert für alle $c \in C$ ein $c' \in C$ mit $f(-b')c = -b'c' \in b'C' \subseteq \mathrm{Hom}_U(A', Z)$.

Damit gilt Bild$(f) \subseteq b'C'$.

3.4. Folgerung: *In der Situation* (*) *gelte* (i) *und sei* $f: Ab \longrightarrow Ab'$ *mit* $b, b' \in B$ *ein U-Homomorphismus. Es ist* $f = O$ *genau dann, wenn* $\tilde{f} = O$ *ist.*

Beweis: Es ist $f = O$ genau dann, wenn für alle $a \in A$ gilt $f(ab)C = O$ wegen (i). Das gilt genau dann, wenn für alle $c \in C$ gilt $f(-b)c = O$, genau dann, wenn für alle $c \in C$ gilt $\tilde{f}(b'c) = O$. Das schließlich ist äquivalent zu $\tilde{f} = O$.

3.5. Satz: *In der Situation* (*) *gelte* (i) *und* (ii). *Sei* $f: Ab \longrightarrow Ab'$ mit $b, b' \in B$ *ein U-Homomorphismus. Sei Z Skalar-Modul bzgl.* $A \otimes \mathrm{Hom}_U(A, ABC) \longrightarrow Z$. *Dann ist f genau dann ein Monomorphismus, wenn* $\hat{f}: b'C \longrightarrow bC$ *ein Epimorphismus ist.*

Beweis: f ist Monomorphismus genau dann, wenn aus $f(ab)C = O$ folgt $abC = O$, genau dann, wenn $l_A(f(-b)C) \subseteq l_A(bC)$. Wegen der Skalar-Modul-Eigenschaft von Z ist das äquivalent zu $f(-b)C = r_{\mathrm{Hom}(A, ABC)} l_A(f(-b)C) \supseteq r_{\mathrm{Hom}(A, ABC)} l_A(bC) = bC$, was genau dann gilt, wenn $f(-b)C = bC$. Es ist ja $f(-b)C \subseteq bC$ wegen Satz 3.3. Letzteres ist äquivalent zu $\hat{f}(b'C) = bC$, was bedeutet, daß $\hat{f}$ ein Epimorphismus ist.
Die Bedingung im Satz, daß Z ein Skalar-Modul bzgl. $A \otimes \mathrm{Hom}_U(A, ABC) \longrightarrow Z$, kann auch ersetzt werden durch die Bedingung, daß Z Skalar-Modul bzgl. $A \otimes Y \longrightarrow Z$ ist und daß $\mathrm{Bild}(\tilde{f}) \subseteq bC$ gilt. Im Beweis ist dann $\mathrm{Hom}_U(A, ABC)$ durch Y zu ersetzen.

3.6. Satz: *In der Situation* (*) *gelte* (ii). Ist $f: Ab \longrightarrow Ab'$ *ein Epimorphismus, so ist* $\tilde{f}: b'C \longrightarrow \mathrm{Hom}_U(A, Z)$ *ein Monomorphismus.*

Beweis: Sei f ein Epimorphismus und $\tilde{f}(b'c) = O$. Dann ist $f(Ab)c = O$, also $Ab'c = O$, weil f Epimorphismus ist. Wegen (ii) ist dann $b'c = O$. Damit ist gezeigt, daß $\tilde{f}$ ein Monomorphismus ist.

Wir betrachten jetzt eine Kategorie $\boldsymbol{B}$, deren Objekte die Elemente b von B sind, und deren Morphismen in $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(b, b')$ die U-Homomorphismen $f: Ab \longrightarrow Ab'$ mit $\mathrm{Bild}(\tilde{f}) \subseteq bC$ sind. Wir setzen dazu in der Situation (*) die Bedingung (ii) voraus. Die Verknüpfung sei die Hintereinanderausführung von Homomorphismen. Weiter betrachten wir eine Kategorie $\boldsymbol{BC}$ mit den Objekten bC für alle $b \in B$ und den Morphismen $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{BC}}(bC, b'C) = \mathrm{Hom}_R(bC, b'C)$.

3.7. Satz: *In der Situation* (*) *gelte* (*ii*). *Dann ist* $\boldsymbol{B}$ *eine präadditive Kategorie und die Zuordnung, die jedem Objekt* b *aus* $\boldsymbol{B}$ *das Objekt* bC *aus* $\boldsymbol{BC}$ *und jedem Morphismus* $f\colon b \longrightarrow b'$ *in* $\boldsymbol{B}$ *den Morphismus* $\hat{f}\colon b'C \longrightarrow bC$ *zuordnet, ein additiver, kontravarianter Funktor; falls* (*i*) *für* (*) *gilt, ist dieser Funktor treu.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $\boldsymbol{B}$ eine Kategorie ist. Sei $\mathrm{id}\colon Ab \longrightarrow Ab$ gegeben. Dann ist $a\,\widetilde{id}(bc) = id(ab)c = abc$ für alle $a \in A$, also ist $\widetilde{id}(bc) = bc$ wegen (*ii*), d. h. $\mathrm{Bild}(\widetilde{id}) \subseteq bC$ und $\widetilde{id} = id_{bC} = \widehat{id}$. Seien $f \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(b, b')$ und $g \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(b', b'')$ gegeben. Dann ist $a\widetilde{gf}(b''c) = gf(ab)c = g(a'b')c = a'\hat{g}(b''c) = a'b'c' = f(ab)c' = a\hat{f}(b'c') = a\hat{f}\hat{g}(b''c)$, wenn $f(ab) = a'b'$ und $\hat{g}(b''c) = b'c'$ sind. Dann ist $\hat{f}\hat{g} = \widetilde{gf} \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(b, b'')$.
Außerdem gilt $\hat{f}\hat{g} = \widehat{gf}$. Damit ist $\boldsymbol{B}$ eine Kategorie, und gleichzeitig ist gezeigt, daß $\wedge$ ein kontravarianter Funktor ist. Dieser Funktor ist treu wegen Folgerung 3.4, falls (*i*) gilt. Es bleibt die Additivität zu zeigen. Seien $f, g \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(b, b')$. Für alle $a \in A$, $c \in C$ gilt $a\big(\widetilde{f-g}\big)(b'c) = (f-g)(ab)c = a(\tilde{f}-\tilde{g})(b'c)$, also $\widetilde{f-g}(b'c) = (\tilde{f}-\tilde{g})(b'c)$. Da $\mathrm{Bild}(\tilde{f}) \subseteq bC$, $\mathrm{Bild}(\tilde{g}) \subseteq bC$ gilt, ist auch $\mathrm{Bild}(\tilde{f}-\tilde{g}) = \mathrm{Bild}\big(\widetilde{f-g}\big) \subseteq bC$. Damit ist $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(b, b')$ Untergruppe von $\mathrm{Hom}_U(Ab, Ab')$. Außerdem gilt $\widehat{f+g} = \hat{f}+\hat{g}$, d. h. der Funktor ist additiv.

3.8. Folgerung: *In der Situation* (*) *gelte* (*ii*). *Sei* $f\colon Ab \longrightarrow Ab'$ *ein* U*-Isomorphismus und sei* $\mathrm{Bild}(\tilde{f}) \subseteq bC$ *und* $\mathrm{Bild}\big(\widetilde{f^{-1}}\big) \subseteq b'C$. *Dann ist* $bC \cong b'C$.

Beweis: Es sind f und f^{-1} in $\boldsymbol{B}$, also sind $\hat{f}$ und $\widehat{f^{-1}}$ invers zueinander.

3.9. Folgerung: *In der Situation* (*) *gelte* (*i*) *und* (*ii*). *Sei* $f\colon Ab \longrightarrow Ab'$ *mit* $\mathrm{Bild}(\tilde{f}) \subseteq bC$ *gegeben. Dann ist* $\hat{\tilde{f}}$ *definiert, und es gilt* $f = \hat{\hat{\tilde{f}}}$.

Beweis: Wegen der Symmetrie der ganzen Situation (*) mit (i) und (ii) bezeichnen wir den durch $g: b'C \longrightarrow bC$ induzierten Homorphismus von Ab in $\mathrm{Hom}_R(C, Z)$ ebenfalls mit $\tilde{g}$ und $\hat{g}$: $Ab \longrightarrow Ab'$ sei die Einschränkung von $\tilde{g}$ in bezug auf das Bild, falls $\mathrm{Bild}(\tilde{g}) \subseteq Ab'$.

Für alle $a \in A$ und $c \in C$ gilt nun $\hat{\hat{f}}(ab)c = a\hat{f}(b'c) = f(ab)c$, also $\hat{\hat{f}}(ab) = f(ab)$. Da $\mathrm{Bild}(\hat{\hat{f}}) \subseteq Ab'$, ist $\hat{\hat{f}}$ definiert und $f = \hat{\hat{f}}$.

Wir haben damit unter anderem gesehen, daß eine Bijektion zwischen den $f: Ab \longrightarrow Ab'$ mit $\mathrm{Bild}(\bar{f}) \subseteq bC$ und den $g: b'C \longrightarrow bC$ mit $\mathrm{Bild}(\tilde{g}) \subseteq Ab'$ existiert, falls in der Situation (*) (i) und (ii) gelten.

3.10. Folgerung: *In der Situation (*) gelte (i) und (ii). Sei $f \in \mathrm{Hom}_B(b, b')$. Ist $\hat{f}$ surjektiv, so ist f injektiv.*

Beweis: Ist $\hat{f}$ surjektiv, so ist nach Satz 3.6 $\hat{\hat{f}}$ injektiv und nach Folgerung 3.9 $\hat{\hat{f}} = f$. Man vergleiche hierzu auch Satz 3.5, wo die Voraussetzungen stärker sind.

3.11. Lemma: *In der Situation (*) gelte (i). Sei $f: b'C \longrightarrow abC$ ein R-Homomorphismus. Existiere für jedes $u \in U$ ein Modul E_R mit $uabC_R \subseteq E_R \subseteq Z_R$, wobei E_R injektiv bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \longrightarrow Z$ ist. Dann existiert genau ein U-Homomorphismus $\hat{f}: Uab \longrightarrow Ab'$ mit $\hat{f}(uab)c = uf(b'c)$ für alle $u \in U$ und $c \in C$.*

Beweis: Die Situation (*) in Satz 3.3 sei spezialisiert zu

$$\begin{tikzcd}
A \otimes BC \otimes R \arrow[r] \arrow[d] & Z \otimes R \arrow[d] \\
A \otimes Y \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

und die Situation (**) sei durch (*) ersetzt. Gelte (ii) für eine also auch beide Situationen. Sei $f: Ab' \longrightarrow Abc$ ein U-Homomorphismus. Existiere für jedes $r \in R$ ein Modul ${}_UE$ mit ${}_UAbcr \subseteq {}_UE \subseteq {}_UZ$, wobei ${}_UE$ links-injektiv bzgl. $X \otimes C \longrightarrow Z$ ist. Nach Satz 3.3 existiert dann ein R-Homomorphismus $\hat{f}: bcR \longrightarrow b'C$ mit $a\hat{f}(bcr) = f(ab')r$. Durch Vertauschen der Seiten erhält man nun die Aussage des Lemmas.

3.12. Folgerung: *In der Situation (*) gelte (i). Sei $f: b'C \longrightarrow bC$ ein R-Homomorphismus. Sei bC einfach, und existiere $a' \in A$*

und Moduln E_R *und* E'_R *mit* $a'bC \neq 0$, $a'bC_R \subseteq E_R \subseteq Z_R$ *und* $a'bC_R \subseteq E'_R \subseteq Z_R$, *wobei* E_R *injektiv bzgl.* $U \otimes Z \to Z$ *und* E'_R *injektive Hülle bzgl.* $A \otimes Y \to Z$ *ist. Dann gibt es genau einen* U*-Homomorphismus* $\check{f} : \mathrm{Soc}(Ab) \to \mathrm{Soc}(Ab')$ *mit* $\check{f}(ab)c = af(b'c)$ *für alle* $ab \in \mathrm{Soc}(Ab)$ *und alle* $c \in C$.

Beweis: Mit bC ist auch $a'bC$ einfach. Nach Lemma 2.4 ist daher $Ua'b = \mathrm{Soc}(Ab)$ einfach. Wir haben einen Homomorphismus $g: b'C \to a'bC$. Ähnlich wie im Beweis von Satz 2.7 zeigt man, daß für alle $u \in U$ mit $ua'bC \neq O$ gilt $ua'bC \subseteq uE' \subseteq Z$, wobei $a'bC$ in E' groß ist, also auch $ua'bC$ in uE' groß ist und wobei uE' injektiv bzgl. $A \otimes Y \to Z$ ist. Nach Folgerung 3.11 existiert $\hat{f}$: $Ua'b \to Ab'$ mit $\hat{f}(ua'b)c = ug(b'c) = uaf(b'c)$, also $\hat{f}(ab)c = af(b'c)$ mit $ab \in Ua'b = \mathrm{Soc}(Ab)$. Da $\mathrm{Bild}(\hat{f}) \subseteq \mathrm{Soc}(Ab')$ folgt die Behauptung der Folgerung mit $\hat{f} = \check{f}$.

3.13. Folgerung: *In der Situation* (*) *gelte* (*i*). *Sei* $bC \cong b'C$ *und sei* bC *einfach. Existiere* $a' \in A$ *und Moduln* E_R *und* E'_R *mit* $a'bC \neq O$, $a'bC_R \subseteq E_R \subseteq Z_R$ *und* $a'bC_R \subseteq E'_R \subseteq Z_R$, *wobei* E_R *injektiv bzgl.* $U \otimes Z \to Z$ *und* E'_R *injektive Hülle bzgl.* $A \otimes Y \to Z$ *ist. Existiere weiterhin* $a'' \in A$ *und ein Modul* E''_R *mit* $a''b'C \neq O$ *und* $a''b'C \subseteq E''_R \subseteq Z_R$, *wobei* E''_R *injektiv bzgl.* $U \otimes Z \to Z$ *ist. Dann sind* $\mathrm{Soc}(Ab) \cong \mathrm{Soc}(Ab')$ *und* $\mathrm{Soc}(Ab)$ *einfach.*

Beweis: Wegen 2.4 sind $\mathrm{Soc}(Ab)$ und $\mathrm{Soc}(Ab')$ einfach. Es genügt zu zeigen, daß $\check{f} \neq O$ ist. Aber $\check{f}$ ist die Einschränkung von $\bar{f}: Ab \to \mathrm{Hom}_R(C, Z)$, was nach Satz 3.6 ein Monomorphismus ist. Damit ist auch $\check{f}$ ein Monomorphismus.

3.14. Satz: *In der Situation* (*) *gelte* (*i*) *und* (*ii*). *Sei* Z *Kogenerator bzgl.* $A \otimes Y \to Z$. *Seien* bC *und* $b'C$ *einfach und existieren* $a \in A$ *und* E_R, *wobei* $O \neq abC \subseteq E_R \subseteq Z_R$ *und* E_R *injektive Hülle von* abC *bezüglich* $A \otimes Y \to Z$ *ist. Dann gilt:*

$$bC \cong b'C \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Soc}(Ab) \cong \mathrm{Soc}(Ab').$$

Beweis: Sei $bC \cong b'C$. Wie leicht zu sehen, gibt es $u \in U$ mit $uabC = a'bC$ und uE ist injektive Hülle von $uabC = a'bC$ bezüglich $A \otimes Y \to Z$. Damit sind die Voraussetzungen von 3.13 erfüllt und es folgt $\mathrm{Soc}(Ab) \cong \mathrm{Soc}(Ab')$. Sei nun umgekehrt $\mathrm{Soc}(Ab) \cong \mathrm{Soc}(Ab')$. Da bC und $b'C$ einfach sind, sind $\mathrm{Soc}(Ab) = Uab$ und $\mathrm{Soc}(Ab') = \mathrm{U}a'b'$ einfach und Uab groß in Ab bzw. $Ua'b'$ groß in Ab'. Damit ist $Uab \cong Ua'b'$. Wir nehmen nun an, daß Z Kogenerator bzgl. $U \otimes ABC \to Z$ ist. Dann ist Z auch Kogenerator bzgl. $U \underset{U}{\otimes} \mathrm{Hom}_U(U, ABC) \to Z$. Da in der Situation, die durch

$$\begin{tikzcd} U \underset{U}{\otimes} AB \underset{S}{\otimes} C \arrow[r] \arrow[d] & X \underset{S}{\otimes} C \arrow[d] \\ U \underset{U}{\otimes} ABC \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

beschrieben wird, (i) wegen $UAB = AB \subseteq \mathrm{Hom}_R(C, Z)$ und (ii) wegen $ABC \subseteq Z \cong \mathrm{Hom}_U(U, Z)$ gelten, können wir die Sätze 3.5 und 3.6. anwenden. Damit erhalten wir $abC \cong a'b'C$. Da $bC \cong abC$ und $b'C \cong a'b'C$ wegen der Einfachheit von bC und $b'C$ gelten, ist $bC \cong b'C$.

Zu zeigen ist noch, daß Z Kogenerator bzgl. $U \underset{U}{\otimes} ABC \to Z$ ist. Seien $Z'_R \subsetneqq Z''_R \subseteq ABC_R$ Untermoduln mit Z'_R maximal in Z''_R. Sei $abc \in Z''$ und $abc \notin Z'$. Dann ist $bC \xrightarrow{a} Z'' \to Z''/Z'$ surjektiv mit dem Kern D. Da Z Kogenerator bzgl. $\mathrm{A} \otimes Y \to Z$ ist, existiert ein $\mathrm{a}' \in A$ mit $a'D = O$, $a'bC \neq O$ und $a'bC_R \subseteq E_R \subseteq Z_R$, wobei E injektiv bzgl. $U \otimes Z \to Z$ ist. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] & bC \arrow[r, "a"] \arrow[d] & Z'' \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[dd, "u"] \arrow[ddll] \\ & a'bC \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d] & Z''/Z' & \\ & E & & Z \arrow[ll, dash] \end{tikzcd}$$

erhalten wir $uZ'' \cong Z''/Z' \neq O$ und $uZ' = O$ und $uZ'' = a'bC \subseteq E \subseteq Z$, wobei E injektiv bzgl. $U \underset{U}{\otimes} Z \to Z$ ist. Das bedeutet aber gerade, daß Z Kogenerator bzgl. $U \underset{U}{\otimes} ABC \to Z$ ist.

Wir wollen jetzt noch untersuchen, unter welchen Voraussetzungen ein Isomorphismus $bC \cong b'C$ nicht nur einen Isomorphismus der Sockel von Ab und Ab' induziert, sondern einen Isomorphismus der ganzen Moduln Ab und Ab'.

3.15. Lemma: *In der Situation (*) gelte (i). Sei $bC \cong b'C$, und existiert für jedes $a \in A$ ein Modul E mit $abC_R \subseteq E_R \subseteq Z_R$, wobei E injektiv bzgl. $A \underset{T}{\otimes} Y \to Z$ ist. Dann existiert ein Monomorphismus $Ab \to Ab'$.*

Beweis: Nach Satz 3.3 erhält man mit Bedingung 2 durch Vertauschung der Seiten, daß $b'C \to bC$ einen Homomorphismus $Ab \to Ab'$ induziert. Dann wende man Satz 3.6 mit vertauschten Seiten an.

3.16. Satz: *In der Situation (*) gelte (i) und (ii). Sei Z injektiv bzgl. $U \otimes Z \to Z$. Sei $bC \cong b'C$ und bC einfach. Dann ist $Ab \cong Ab'$ und Ab einfach.*

Beweis: Nach Lemma 2.4. ist $\mathrm{Soc}(Ab)$ einfach und groß in Ab. Außerdem ist aber jedes Element $ab \neq O$ in $\mathrm{Soc}(Ab)$, also ist Ab einfach. Ebenso ist Ab' einfach. Das im Beweis von Satz 3.3 verwendete Diagramm kann bei Vertauschung der Seiten ersetzt werden durch

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "b'"] & b'C \arrow[r, "a'", "\cong"'] \arrow[d, "f"', "\cong"] & a'b'C \arrow[r] & Z \arrow[d, "u"] \\ & bC \arrow[r, "a"] & abC \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

so daß $ua'b' — = af(b' —)$ gilt und damit $\mathrm{Bild}(f) \subseteq Ab'$ ist. Da f ein Epimorphismus ist, ist nach Satz 3.6 $\hat{f}: Ab \to Ab'$ ein Monomorphismus, also ein Isomorphismus.

3.17. Satz: *In der Situation (*) gelte (i). Sei $bC \cong b'C$. Existieren für jedes $a \in A$ Moduln E_R und E'_R mit $abC_R \subseteq E_R \subseteq Z_R$ und $ab'C_R \subseteq E'_R \subseteq Z_R$, wobei E und E' injektiv bzgl. $A \otimes Y \to Z$ sind. Dann ist $Ab \cong Ab'$.*

Beweis: Nach Satz 3.3 ist $\mathrm{Bild}(\tilde{f}) \subseteq Ab$ und $\mathrm{Bild}\,(\widetilde{f^{-1}}) \subseteq Ab'$, wenn $f: b'C \to bC$ der gegebene Isomorphismus ist. Nach Folgerung 3.8 ist dann $Ab \cong Ab'$.

3.18. Satz: *In der Situation (*) gelte (ii). Sei $f: Ab \to Ab'$ ein U-Homomorphismus mit $\mathrm{Bild}(\tilde{f}) \subseteq bC$. Seien ${}_UQ \subseteq {}_UAb$*

und ${}_UQ' \subseteq Ab'$ *Untermoduln, so daß* $f(Q) \subseteq Q'$ *gilt. Dann gilt* $\hat{f}\,(b' r_C(Q')) \subseteq b r_C(Q)$ *und* $\hat{f}\,(\mathrm{Soc}(b' r_C(Q'))) \subseteq \mathrm{Soc}(b r_C(Q))$.

Beweis: Sei $c' \in r_C(Q')$ und sei $\hat{f}\,(b'c') = bc$.
Für alle $q = ab \in Q$ gilt dann

$$qc = abc = a\hat{f}\,(b'c') = f(ab)c' = f(q)c' = O$$

wegen $f(Q) \subseteq Q'$. Also ist $c \in r_C(Q)$ und $bc = \hat{f}\,(b'c') \in b r_C(Q)$. Die Aussage über den Sockel ist dann eine triviale Folgerung.

3.19. Folgerung: *In der Situation* (*) *gelte* (*i*) *und* (*ii*). *Sei* Z *Kogenerator bzgl.* $A \otimes Y \longrightarrow Z$. *Seien* $D \subseteq bC$ *bzw.* $D' \subseteq b'C$ *maximale Untermoduln und* $Q \subseteq Ab$ *bzw.* $Q' \subseteq Ab'$ *die nach Satz* 2.6 *zugehörigen einfachen Untermoduln. Seien* $f\colon Ab \longrightarrow Ab'$ *und* $g\colon b'C \longrightarrow bC$ *Homomorphismen mit* $f(ab)c = ag(b'c)$ *für alle* $a \in A$, $c \in C$. *Dann gilt* $f(Q) \subseteq Q'$ *genau dann, wenn* $g(D') \subseteq D$ *gilt.*

Beweis: Für f gilt $\mathrm{Bild}(\tilde{f}) \subseteq bC$ und für g gilt $\mathrm{Bild}(\tilde{g}) \subseteq Ab'$. Also ist $g = \hat{f}$ und $f = \hat{g}$. Dann verwende man Satz 3.18.

§ 4. Anwendungen

4.1. Satz: *Sei* M_R *ein Kogenerator und sei* $\Gamma = \mathrm{End}(M_R)$. *Seien* $m, m' \in M$ *und* $m, m' \neq O$.
Dann gelten:

1.) *Äquivalent sind:*
   a) Γm *ist einfach*
   b) mR *ist einfach und* mR *ist in einem* M-*injektiven Untermodul von* M *enthalten.*
   c) mR *ist einfach und für alle* $\gamma \in \Gamma$ *ist* $\gamma(mR)$ *in einem* M-*injektiven Untermodul von* M *enthalten.*

2.) *Ist* Γm *einfach, so ist* $\Gamma m = \mathrm{Soc}(l_M\, r_R(\Gamma m))$ *und* Γm *ist groß in* $l_M\, r_R(\Gamma m)$.

3.) *Der Sockel von* Γm *ist von Null verschieden und groß in* Γm, *folglich ist der Sockel von* ${}_\Gamma M$ *von Null verschieden und groß in* ${}_\Gamma M$.

4.) *mR besitzt genau dann einen größten Untermodul, wenn* $\mathrm{Soc}(\Gamma m)$ *einfach ist.*

5.) *Folgende Zuordnungen sind invers zueinander:*

Maximaler Untermodul $D_R \subseteq mR_R \mapsto$ Einfacher Untermodul $\mathrm{Soc}(l_\Gamma(D)m) \subseteq \Gamma m$;

Einfacher Untermodul $_\Gamma Q \subseteq \Gamma m \mapsto$ Maximaler Untermodul $mr_R(Q) \subseteq mR$. Siehe Fußnote.

6.) $\mathrm{Rad}(mR) = mr_R(\mathrm{Soc}(\Gamma m))$

7.) *Zu jedem $f \in \mathrm{Hom}_\Gamma(\Gamma m, \Gamma m')$ existiert genau ein $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_R(m'R, mR)$ mit $f(\gamma m)r = \gamma\hat{f}(m'r)$ für alle $\gamma \in \Gamma$ und $r \in R$. Insbesondere existiert ein $t \in R$, so daß $f(\gamma m) = \gamma\hat{f}(m') = \gamma mt$ für alle $\gamma \in \Gamma$.*

Bei dieser Zuordnung ist f genau dann ein Monomorphismus, wenn $\hat{f}$ ein Epimorphismus ist. Ist f ein Epimorphismus, so ist $\hat{f}$ ein Monomorphismus.

8.) *$\Gamma m \cong \Gamma m'$ impliziert $mR \cong m'R$.*

9.) *Ist M_R injektiv und $mR \cong m'R$, so ist $\Gamma m \cong \Gamma m'$.*

10.) *Seien mR und $m'R$ einfach. Dann gilt $mR \cong m'R$ genau dann, wenn* $\mathrm{Soc}(\Gamma m) \cong \mathrm{Soc}(\Gamma m')$ *gilt.*

11.) *Seien Γm und $\Gamma m'$ einfach. Dann spielt $mR \cong m'R$ genau dann, wenn $\Gamma m \cong \Gamma m'$ gilt.*

Beweis: Wir gehen aus von der Situation

$$\begin{array}{ccc} {}_\Gamma\Gamma \otimes_\Gamma M \otimes_R R_R & \longrightarrow & {}_\Gamma M \otimes_R R_R \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_\Gamma\Gamma \otimes_\Gamma M_R & \longrightarrow & {}_\Gamma M_R. \end{array}$$

Es gilt (i): $M \subseteq \mathrm{Hom}_R(R_R, M_R)$

(ii): $M \subseteq \mathrm{Hom}_\Gamma({}_\Gamma\Gamma, {}_\Gamma M)$.

Jeder M-injektive Modul ist injektiv bzgl. $\Gamma \otimes M \longrightarrow M$ und umgekehrt.

Zusatz bei der Korrektur.

Es gilt ferner: Für $m, m' \in M$ existieren genau dann maximale Untermoduln $D \subseteq mR$, $D' \subseteq m'R$ mit $mR/D' \cong m'R/D'$, wenn einfache Untermoduln $Q \subseteq \Gamma m$, $Q' \subseteq \Gamma m'$ mit $Q \cong Q'$ existieren. Eine entsprechende Aussage gilt auch im allgemeinen Fall sowie in den weiteren Spezialfällen.

M ist Kogenerator bzgl. $\Gamma \otimes M \to M$. Sei nämlich $Y'' \subsetneqq Y' \subseteq M$ mit Y'' maximal in Y' gegeben, so ist

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[rr] \arrow[d] & & M \arrow[ddl] \arrow[dd, "\gamma"] \\
Y'/Y'' \arrow[d, phantom, "\cong"] & & \\
xR \arrow[r, phantom, "\subset"] & E \arrow[r, phantom, "\subset"] & M
\end{tikzcd}$$

kommutativ, da xR einfach ist und in einer injektiven Erweiterung E in M liegt, also $\gamma(Y') = xR$ gilt.

1.) folgt aus Lemma 2.4 für $D = O$, $b = m$, $a = 1 \in \Gamma$ und aus Satz 2.7 für $D = O$.

2.) folgt aus Satz 2.3.

3.) folgt aus Satz 2.9. und aus Satz 2.10, da R und auch mR genügend viele maximale Untermoduln besitzen.

4.) folgt aus Folgerung 2.11.

5.) folgt aus Satz 2.6.

6.) folgt aus Folgerung 2.12.

7.) folgt aus Satz 3.3, Satz 3.5 und Satz 3.6.

8.) folgt aus 7.)

9.) folgt aus Satz 3.3(2) und Folgerung 3.8 durch Symmetrie

10.) folgt aus Satz 3.14.

11.) folgt aus 1.) und 10.).

4.2. Satz: *Sei M_R ein Kogenerator und $\Gamma = \mathrm{End}(M_R)$. Seien $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ und $\gamma, \gamma' \neq O$. Dann gelten:*

1.) *Äquivalent sind:*

a.) *$\Gamma\gamma$ ist einfach.*

b.) *$\gamma(M)$ ist einfach und $\gamma(M)$ ist in einem M-injektiven Untermodul von M enthalten.*

c.) *$\gamma(M)$ ist einfach und für alle $\gamma'' \in \Gamma$ ist $\gamma''\gamma(M)$ in einem M-injektiven Untermodul von M enthalten.*

2.) *Ist $\Gamma\gamma$ einfach, so ist $\Gamma\gamma = \mathrm{Soc}(l_\Gamma\, r_M(\Gamma\gamma))$ und $\Gamma\gamma$ ist groß in $l_\Gamma\, r_M(\Gamma\gamma)$.*

3.) *Ist M_R endlich erzeugt, so ist der Sockel von $\Gamma\gamma$ von Null verschieden und groß in $\Gamma\gamma$. Insbesondere ist dann der Sockel von ${}_\Gamma\Gamma$ von Null verschieden und groß in Γ.*

4.) *$\gamma(M)$ besitzt genau dann einen größten echten Untermodul, wenn der Sockel von $\Gamma\gamma$ einfach und groß in $\Gamma\gamma$ ist.*

5.) *Folgende Zuordnungen sind invers zueinander:*

Maximaler Untermodul $D_R \subseteq \gamma(M) \mapsto$ Einfacher Untermodul $\operatorname{Soc}(l_\Gamma(D)\gamma) \subseteq \Gamma\gamma$.

Einfacher Untermodul ${}_\Gamma Q \subseteq \Gamma\gamma \mapsto$ Maximaler Untermodul $\gamma(r_M(Q)) \subseteq \gamma(M)$.

6.) $\operatorname{Rad}(\gamma(M)) = \gamma\big(r_M(\operatorname{Soc}(\Gamma\gamma))\big)$.
$\operatorname{Rad}(M_R) = r_M(\operatorname{Soc}({}_\Gamma\Gamma))$.

7.) *Zu jedem $f \in \operatorname{Hom}_\Gamma(\Gamma\gamma, \Gamma\gamma')$ existiert genau ein $\hat{f} \in \operatorname{Hom}_R(\gamma'(M), \gamma(M))$ mit $f(\gamma)m = \hat{f}(\gamma' m)$ für alle $m \in M$. Bei dieser Zuordnung ist f genau dann ein Monomorphismus, wenn $\hat{f}$ ein Epimorphismus ist. Ist f ein Epimorphismus, so ist $\hat{f}$ ein Monomorphismus.*

8.) $\Gamma\gamma \cong \Gamma\gamma'$ impliziert $\gamma(M) \cong \gamma'(M)$.

9.) *Ist M_R injektiv und $\gamma(M) \cong \gamma'(M)$, so ist $\Gamma\gamma \cong \Gamma\gamma'$.*

10.) *Seien $\gamma(M)$ und $\gamma'(M)$ einfach. Dann gilt $\gamma(M) \cong \gamma'(M)$* genau dann, wenn $\operatorname{Soc}(\Gamma\gamma) \cong \operatorname{Soc}(\Gamma\gamma)$ *gilt*

11.) *Seien $\Gamma\gamma$ und $\Gamma\gamma'$ einfach. Dann gilt $\gamma(M) \cong \gamma'(M)$ genau dann, wenn $\Gamma\gamma \cong \Gamma\gamma'$ gilt.*

Beweis: Wir gehen aus von der Situation

$$\begin{array}{ccc} {}_\Gamma\Gamma \underset{\Gamma}{\otimes} \Gamma \underset{\Gamma}{\otimes} M_R & \longrightarrow & {}_\Gamma\Gamma \underset{\Gamma}{\otimes} M_R \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_\Gamma\Gamma \underset{\Gamma}{\otimes} M_R & \longrightarrow & {}_\Gamma M_R . \end{array}$$

Es gilt (i): $\Gamma \subseteq \operatorname{Hom}_R(M_R, M_R)$
(ii): $M \subseteq \operatorname{Hom}_\Gamma({}_\Gamma\Gamma, {}_\Gamma M)$.

Außerdem ist M Kogenerator bzgl. $\Gamma \otimes M \longrightarrow M$. Der Beweis verläuft damit ebenso wie der Beweis von Satz 4.1.

4.3. Satz: *Sei M_R ein Kogenerator und sei $\Gamma = \operatorname{End}(M_R)$. Sei P_R ein R-Modul und $T = \operatorname{End}(P_R)$. Seien $p, p' \in P$ und $p, p' \neq O$.*

Dann gelten

1.) *Äquivalent sind*

a) ${}_\Gamma\operatorname{Hom}_R(P,M)(p)$ *ist einfach.*

b) pR *ist einfach und für alle* $\sigma \in \operatorname{Hom}_R(P,M)$ *ist* $\sigma(pR)$ *in einem M-injektiven Untermodul von* M *enthalten.*

2.) *Ist* ${}_\Gamma\operatorname{Hom}_R(P,M)(p)$ *einfach, so ist* ${}_\Gamma\operatorname{Hom}_R(P,M)(p) = \operatorname{Soc}(l_M r_R(\operatorname{Hom}_R(P,M)(p)))$ *und* ${}_\Gamma\operatorname{Hom}_R(P,M)(p)$ *ist groß in* $l_M r_R(\operatorname{Hom}_R(P,M)(p))$.

3.) *Der Sockel von* ${}_\Gamma\operatorname{Hom}_R(P,M)(p)$ *ist von Null verschieden und groß in* ${}_\Gamma\operatorname{Hom}_R(P,M)(p)$.

4.) pR *besitzt genau dann einen größten echten Untermodul, wenn* $\operatorname{Soc}(\operatorname{Hom}_R(P,M)(p))$ *einfach ist.*

5.) *Folgende Zuordnungen sind invers zueinander:*
Maximaler Untermodul $D_R \subseteq pR_R \mapsto$ *Einfacher Untermodul* ${}_\Gamma\operatorname{Soc}(l_{\operatorname{Hom}(P,M)}(D)(p)) \subseteq {}_\Gamma\operatorname{Hom}_R(P,M)(p)$;
Einfacher Untermodul ${}_\Gamma Q \subseteq {}_\Gamma\operatorname{Hom}(P,M)(p) \mapsto$ *Maximaler Untermodul* $pr_R(Q)_R \subseteq pR_R$.

6.) $\operatorname{Rad}(pR_R) = \operatorname{pr}_R(\operatorname{Soc}({}_\Gamma Hom_R(P,M)(p)))$.

7.) *Sei P M-reflexiv, dann gilt:*
Zu jedem $f \in \operatorname{Hom}_\Gamma(\operatorname{Hom}_R(P,M)(p), \operatorname{Hom}_R(P,M)(p'))$ *existiert genau ein* $\hat{f} \in \operatorname{Hom}_R(p'R, pR)$ *mit* $f(\sigma(p)) = \sigma(\hat{f}(p'))$ *für alle* $\sigma \in \operatorname{Hom}_R(P,M)$. *Insbesondere existiert ein* $pr \in pR$ *mit* $f(\sigma(p)) = \sigma(pr)$ *für alle* $\sigma \in \operatorname{Hom}_R(P,M)$. *Bei dieser Zuordnung ist* f *genau dann ein Monomorphismus, wenn* $\hat{f}$ *ein Epimorphismus ist. Ist* f *ein Epimorphismus, so ist* $\hat{f}$ *ein Monomorphismus.*

8.) *Sei P M-reflexiv, dann gilt:*
${}_\Gamma\operatorname{Hom}_R(P,M)(p) \cong {}_\Gamma\operatorname{Hom}_R(P,M)(p')$ *impliziert* $pR \cong p'R$.

9.) *Ist* M_R *injektiv und* $pR \cong p'R$, *so ist* ${}_\Gamma\operatorname{Hom}_R(P,M)(p) \cong {}_\Gamma\operatorname{Hom}_R(P,M)(p')$.

10.) *Seien* pR *und* $p'R$ *einfach. Dann gilt* $pR_R \cong p'R_R$ *genau dann, wenn* ${}_\Gamma\operatorname{Soc}({}_\Gamma\operatorname{Hom}_R(P,M)(p)) \cong {}_\Gamma\operatorname{Soc}({}_\Gamma\operatorname{Hom}_R(P,M)(p'))$ *gilt.*

11.) *Seien* ${}_\Gamma\mathrm{Hom}_R(P,M)(p)$ *und* ${}_\Gamma\mathrm{Hom}_R(P,M)(p')$ *einfach. Dann gilt* $pR_R \cong p'R_R$ *genau dann, wenn* ${}_\Gamma\mathrm{Hom}_R(P,M)\,(p) \cong {}_\Gamma\mathrm{Hom}_R(P,M)(p')$ *gilt.*

Beweis: Wir gehen aus von der Situation

$$\begin{tikzcd}
{}_\Gamma\mathrm{Hom}_R(P,M) \underset{T}{\otimes} P \underset{R}{\otimes} R \arrow[r] \arrow[d] & {}_\Gamma M \underset{R}{\otimes} R_R \arrow[d] \\
{}_\Gamma\mathrm{Hom}_R(P,M) \underset{T}{\otimes} P_R \arrow[r] & {}_\Gamma M_R .
\end{tikzcd}$$

Es gelten (*i*): $M \subseteq \mathrm{Hom}_R(R,M)$

(*ii*): $P \subseteq \mathrm{Hom}_\Gamma({}_\Gamma\mathrm{Hom}_R(P,M), {}_\Gamma M)$.

Ist nämlich M Kogenerator, so ist $\bigcap_{\sigma \in \mathrm{Hom}(P,M)} \mathrm{Ker}(\sigma) = O$. Also existiert für jedes $O \neq p \in P$ ein $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(P,M)$ mit $\sigma(p) \neq O$.

Weiter ist E genau dann injektiv bzgl. $\Gamma \otimes M \longrightarrow M$, wenn E M-injektiv ist. Das gilt insbesondere, wenn E injektiv ist. Sei nun $Y'' \subsetneqq Y' \subseteq P$ mit Y'' maximal in Y' gegeben. Dann ist

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r] & Y' \arrow[rr] \arrow[d] & & P \arrow[ddl] \arrow[dd, "\sigma"] \\
& Y'/Y'' \arrow[d, phantom, "\cong"] & & \\
& mR \arrow[r, phantom, "\subset"] & E \arrow[r, phantom, "\subset"] & M
\end{tikzcd}$$

kommutativ für ein $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(P,M)$, weil M zu jedem einfachen R-Modul eine injektive Hülle E enthält. Also ist $\sigma\,(Y'') = O$ und $\sigma\,(Y') = mR$ und mR in einer injektiven Hülle in M gelegen. Daher ist M Kogenerator bzgl. $\mathrm{Hom}_R(P,M) \otimes P \longrightarrow M$. Der Beweis verläuft damit ebenso wie der Beweis von Satz 4.1.

4.4. Folgerung: *Sei* M_R *ein Kogenerator und sei* $\Gamma = \mathrm{End}(M_R)$. *Seien* $r, r' \in R$ *und* $r, r' \neq O$. *Dann gelten*

1.) *Äquivalent sind:*

a) ${}_\Gamma M r$ *ist einfach.*

b) rR_R *ist einfach und für alle* $m \in M$ *ist* mrR *in einem* M-*injektiven Untermodul von* M *enthalten.*

2.) *Ist* ${}_\Gamma Mr$ *einfach, so ist* $Mr = \mathrm{Soc}(l_M r_R(Mr))$ *und* ${}_\Gamma Mr$ *ist groß in* $l_M r_R(Mr)$.

3.) *Der Sockel von* ${}_\Gamma Mr$ *ist von Null verschieden und groß in* ${}_\Gamma Mr$.

4.) rR *besitzt genau dann einen größten echten Untermodul, wenn* $\mathrm{Soc}({}_\Gamma Mr)$ *einfach ist.*
Insbesondere gilt: a) R *ist genau dann lokal, wenn* $\mathrm{Soc}({}_\Gamma M)$ *einfach ist;*
b) *Ist* $\mathrm{Soc}({}_\Gamma M)$ *einfach, dann gilt dies für jeden R-Kogenerator.*

5.) *Folgende Zuordnungen sind invers zueinander:*
Maximaler Untermodul $D_R \subseteq rR_R \mapsto$ *Einfacher Untermodul* ${}_\Gamma\mathrm{Soc}(l_M(D)r) \subseteq {}_\Gamma Mr$;
Einfacher Untermodul ${}_\Gamma Q \subseteq {}_\Gamma Mr \mapsto$ *Maximaler Untermodul* $rr_R(Q)_R \subseteq rR_R$.

6.) $\mathrm{Rad}(r\mathrm{R}) = rr_R(\mathrm{Soc}({}_\Gamma Mr))$.

7.) *Sei* M_R *reflexiv, dann gilt:*
Zu jedem $f \in \mathrm{Hom}_\Gamma(Mr, Mr')$ *existiert genau ein* $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_R(r'R, rR)$ *mit* $f(mr) = m\hat{f}(r')$ *für alle* $m \in M$. *Insbesondere existiert ein* $t = \hat{f}(r') \in rR$ *mit* $f(mr) = mt$ *für alle* $m \in M$. *Bei dieser Zuordnung ist* f *genau dann ein Monomorphismus, wenn* $\hat{f}$ *ein Epimorphismus ist. Ist* f *ein Epimorphismus, so ist* $\hat{f}$ *ein Monomorphismus.*

8.) *Sei* M_R *reflexiv, dann gilt:*
${}_\Gamma Mr \cong {}_\Gamma Mr'$ *impliziert* $rR \cong r'R$.

9.) *Ist* M_R *injektiv und* $rR \cong r'R$, *so ist* ${}_\Gamma Mr \cong {}_\Gamma Mr'$.

10.) *Seien* rR *und* $r'R$ *einfach. Dann gilt* $rR \cong r'R$ *genau dann, wenn* $\mathrm{Soc}({}_\Gamma Mr) \cong \mathrm{Soc}({}_\Gamma Mr')$ *gilt.*

11.) *Seien* ${}_\Gamma Mr$ *und* ${}_\Gamma Mr'$ *einfach. Dann gilt* $rR \cong r'R$ *genau dann, wenn* ${}_\Gamma Mr \cong {}_\Gamma Mr'$ *gilt.*

Beweis: Man setze $P = R$ in Satz 4.3 ein.

Wir weisen schließlich noch darauf hin, daß entsprechende Aussagen auch gelten, wenn ein Morita-Kontext vorliegt und einer der beiden Moduln des Morita-Kontextes Kogenerator ist.

Literatur

[1] F. Kasch und E. Mares: Eine Kennzeichnung semi-perfekter Moduln, Nagoya Math. J. 27, 525–529 (1966).

[2] F. Kasch, H.-J. Schneider und H. J. Stolberg: On injective modules and cogenerators, Carnegie-Mellon University, Report 23, 1969.

[3] T. Kato: Some Generalisations of QF – Rings, Proc. Japan Acad. 44, 114–119 (1968).

[4] K. Sugano: A note on Azumaya's theorem, Osaka Journ. Math., 4, 157–160 (1967).