BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1972

MÜNCHEN 1973

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Komission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Einbettung des relativen Wolffhardt-Raumes

Von **Klaus-Werner Wiegmann** in München

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 4. Februar 1972

Es sei X ein fester komplexer Raum, reduziert oder nicht, $\boldsymbol{O}_X$ die Strukturgarbe von X. Eine *Unterstruktur* auf X ist eine Garbe $\tilde{\boldsymbol{O}} \subset \boldsymbol{O}_X$ von Unteralgebren, so daß auch $(|X|, \tilde{\boldsymbol{O}})$ ein komplexer Raum ist. $\operatorname{Supp}(\boldsymbol{O}_X/\tilde{\boldsymbol{O}})$ heißt der *Träger* von $\tilde{\boldsymbol{O}}$, das ist eine analytische Menge in $(|X|, \tilde{\boldsymbol{O}})$, weil $\boldsymbol{O}_X$ eine kohärente $\tilde{\boldsymbol{O}}$-Modulgarbe ist. Die einfachsten Unterstrukturen auf X sind solche mit einpunktigen Trägern. Ist etwa $x \in X$ und $\mathfrak{m}(x) \subset \boldsymbol{O}_X$ die volle Idealgarbe der analytischen Menge $\{x\} \subset X$, so erhält man für jedes $r \in \mathbf{N}$ eine Unterstruktur $\mathbf{C} + \mathfrak{m}(x)^r \subset \boldsymbol{O}_X$ mit Träger $\{x\}$; denn ist der Halm $\mathfrak{m}(x)_x = f_1 \cdot \boldsymbol{O}_{X,x} + \ldots + f_k \cdot \boldsymbol{O}_{X,x}$, so definieren in einer Umgebung U von x die Funktionskeime $f_{i_1} \ldots f_{i_\varrho}$ $(i_1, \ldots, i_\varrho \in \{1, \ldots, k\}, \varrho \in \{r, \ldots, 2r-1\})$ einen Isomorphismus des geometrischen Raumes $(U, \mathbf{C} + \mathfrak{m}(x)^r | U)$ auf einen abgeschlossenen Unterraum eines Polyzylinders im $\mathbf{C}^n$, $n := \sum_{\varrho=r}^{2r-1} \binom{k+\varrho-1}{\varrho}$.

Andererseits folgt aus dem Hilbertschen Nullstellensatz, daß zu jeder Unterstruktur $\tilde{\boldsymbol{O}}$ auf X mit $\operatorname{Supp}(\boldsymbol{O}_X/\tilde{\boldsymbol{O}}) = \{x\}$ ein $r \in \mathbf{N}$ existiert, so daß $\mathbf{C} + \mathfrak{m}(x)^r \subset \tilde{\boldsymbol{O}} \subset \boldsymbol{O}_X$ gilt; denn $\boldsymbol{a} := \boldsymbol{Ann}_{\tilde{\boldsymbol{O}}}(\boldsymbol{O}_X/\tilde{\boldsymbol{O}}) \subset \boldsymbol{O}_X$ ist eine kohärente Idealgarbe mit $\{x\}$ als Nullstellenmenge; außerdem hat man $\boldsymbol{a} \subset \tilde{\boldsymbol{O}}$. Deshalb definiert $\tilde{\boldsymbol{O}}$ einen endlich-dimensionalen komplexen Vektorraum $\tilde{\boldsymbol{O}}_x/\mathbf{C} + \mathfrak{m}(x)^r_x \subset \boldsymbol{O}_{X,x}/\mathbf{C} + \mathfrak{m}(x)^r_x$. Es gibt sogar eine bijektive Beziehung zwischen den Unterstrukturen $\tilde{\boldsymbol{O}}$ von $\boldsymbol{O}_X$ mit $\operatorname{Supp}(\boldsymbol{O}_X/\tilde{\boldsymbol{O}}) = \{x\}$ sowie $\dim_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{O}_{X,x}/\tilde{\boldsymbol{O}}_x) = k$ und den k-codimensionalen Unteralgebren von $E^{(2k)} := \boldsymbol{O}_{X,x}/\mathbf{C} + \mathfrak{m}(x)^{2k}$, d. h. man erhält eine analytische Menge in der Graßmann-Mannigfaltigkeit $\operatorname{Grass}_k(E^{(2k)})$ aller k-codimensionalen Untervektorräume von $E^{(2k)}$. Diese Tatsachen hat Wolffhardt [8] benutzt, um für reduziertes X die Menge aller Unterstrukturen mit festem Träger $\{x\}$ zu einem universellen komplexen Raum W zu machen. Die Zusammenhangskomponenten dieses Raumes sind die angegebenen reduzierten Unterräume solcher Graßmann-Mannigfaltigkeiten $\mathrm{Grass}_k(E^{(2k)})$, also projektiv-algebraisch.

In [7] wird für beliebiges X mit Hilfe eines Satzes über Zwischenstrukturen [5] ein Modulraum V_x aller Unterstrukturen auf X mit Träger $\{x\}$ konstruiert und gezeigt, daß für reduziertes X die Reduktion von V_x mit dem Wolffhardt-Raum übereinstimmt: $W_x = V_{x,red} \cup \{\boldsymbol{O}_X\}$. (Der trivialen Unterstruktur $\boldsymbol{O}_X$ entspricht ein isolierter und reduzierter Punkt in W_x.) Diese Konstruktion wird in [6] verallgemeinert, relativiert bzgl. $x \in X$. Nach [6, Satz 1] gibt es einen universellen komplexen Raum V mit einer surjektiven holomorphen Abbildung $q: V \to X$, so daß $|V|$ übereinstimmt mit der Menge aller Unterstrukturen $\tilde{\boldsymbol{O}} \subset \boldsymbol{O}_X$, für die gilt $\mathrm{card}\,\mathrm{Supp}(\boldsymbol{O}_X/\tilde{\boldsymbol{O}}) = 1$; für $\tilde{\boldsymbol{O}} \in |V|$ ist $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{O}_X/\tilde{\boldsymbol{O}}) = \{q(\tilde{\boldsymbol{O}})\}$. Der Faserraum V_x von $q: V \to X$ (bei festem $x \in X$) stimmt mit dem Raum aus [7] überein. Die Konstruktion in [7] und [6] gibt keine Auskunft, ob V_x wieder projektiv-algebraisch ist.

In dieser Arbeit wird nun gezeigt, daß jede Zusammenhangskomponente von V_x in eine Graßmann-Mannigfaltigkeit $\mathrm{Grass}_k(\mathbf{C}^d)$ eingebettet werden kann. Diese Abbildungen $V_x \hookrightarrow \mathrm{Grass}_k(\mathbf{C}^d)$ hängen holomorph vom Punkt $x \in X$ ab. Es gilt:

Satz. *Es gibt eine abgeschlossene Einbettung über X von V in eine direkte Summe von relativen Graßmann-Mannigfaltigkeiten G_k ($k \in \mathbf{N}$), d. h. die Fasern $G_{k,x}$ von $G_k \to X$ sind von der Gestalt* $\mathrm{Grass}_k(\mathbf{C}^d)$. *Insbesondere sind alle V_x, $x \in X$, projektiv-algebraisch. –*

Beweis des Satzes

Wie in [6] sei **An** (bzw. **An**$/X$) die Kategorie der komplexen Räume (über X), **Ens** die Kategorie der Mengen und

$\mathbf{V}: (\mathbf{An}/X)^\circ \to \mathbf{Ens}$ der Funktor, den $q: V \to X$ darstellt.

$\mathbf{V}(q_S: S \to X)$ ist die Menge aller Unterstrukturen $\boldsymbol{S}$ auf $S \times X$, für die gilt:

(α) $pr_S: S \times X \to S$ läßt sich über $(S \times X, \boldsymbol{S})$ faktorisieren.
(β) $\boldsymbol{O}_{S\times X}/\boldsymbol{S}$ ist S-platt.
(γ) $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{O}_{S\times X}/\boldsymbol{S}) = (id_S, q_S)(S) \subset S \times X$.

Ist $f: T \to S$ ein Morphismus in $\mathbf{An}/X$, so ordnet
$\mathbf{V}(f): \mathbf{V}(S) \to \mathbf{V}(T)$
jedem $\boldsymbol{S} \in \mathbf{V}(S)$ die Struktur $\boldsymbol{S}_T$ auf dem Faserprodukt $T \times_S (S \times X, \boldsymbol{S})$ zu.

Ist $Z := X \times X$ und $p: Z \to X$ die Projektion auf die erste Koordinate, so ist die Diagonalabbildung $\Delta: X \to Z$ ein Schnitt von p und deshalb eine abgeschlossene Einbettung. Die zu Δ gehörende Idealgarbe $\boldsymbol{J} \subset \boldsymbol{O}_Z$ definiert für jedes $r \in \mathbf{N}$ eine Unterstruktur

$$\boldsymbol{O}_{Z^{(r)}} := p^{-1}\boldsymbol{O}_X + \boldsymbol{J}^r \subset \boldsymbol{O}_Z,$$

vgl. [6, Hilfssatz 1]. Auch die Unterfunktoren

$$\mathbf{V}^{(r)}(S \to X) := \{\boldsymbol{S} \in \mathbf{V}(S \to X) : \boldsymbol{S} \text{ ist ein } \boldsymbol{O}_{S \times_X Z^{(r)}}\text{-Modul}\}$$

sind darstellbar, und zwar durch abgeschlossene Unterräume $V^{(r)}$ von V (über X).

Die Garben $\boldsymbol{E}^{(r)} := \boldsymbol{O}_Z/\boldsymbol{O}_{Z^{(r)}}$ sind wegen $\operatorname{Supp}(\boldsymbol{E}^{(r)}) \subset \Delta(X)$ kohärente $\boldsymbol{O}_X$-Moduln. Ist $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{O}_{V \times X}$ die universelle Unterstruktur, so ist nach [2, p. 58] oder [7, Satz 1] die Funktion

$$V \to \mathbf{N},\ v \mapsto k(v) := \dim_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{O}_{X, q(v)}/\boldsymbol{V}_{\{v\}, q(v)}),$$

lokal-konstant, d. h. für $k \in \mathbf{N}$ ist

$$V_k := \{v \in V : k(v) = k\}$$

offen und abgeschlossen in V, oder $V = \coprod_{k \in \mathbf{N}} V_k$.
Mengentheoretisch gilt nach [8, p. 556] $V_{k,x} \subset V_x^{(2k)}$, also:

$$\mathrm{V}_k = \bigcup_{x \in X} V_{k,x} \subset \bigcup_{x \in X} V_x^{(2k)} = V^{(2k)},$$

d. h. V_k ist ein offener Unterraum von $V^{(2k)}$.

Der Funktor $\mathbf{Grass}_k(\boldsymbol{E}^{(r)}) : (\mathbf{An}/X)^\circ \to \mathbf{Ens}$ sei wie bei Grothendieck [3, n° 2] definiert: $\mathbf{Grass}_k(\boldsymbol{E}^{(r)})\,(S \to X) = \operatorname{Grass}(\boldsymbol{E}_S^{(r)})$ ist die Menge aller lokal-freien Quotienten-$\boldsymbol{O}_S$-Moduln von $\boldsymbol{E}_S^{(r)}$ vom Rang k. Nach [3, Prop. 2.1] ist $\mathbf{Grass}_k(\boldsymbol{E}^{(r)})$ darstellbar, etwa durch einen Raum $\operatorname{Grass}_k(\boldsymbol{E}^{(r)}) \to X$, dessen Fasern Graßmann-Mannigfaltigkeiten sind:

$$\operatorname{Grass}_k(\boldsymbol{E}^{(r)})_x = \operatorname{Grass}_k(\boldsymbol{E}_{\{x\}}^{(r)}),\ x \in X;$$

dabei ist $\boldsymbol{E}^{(r)}_{\{x\}} = \boldsymbol{O}_X/\mathbf{C} + \mathfrak{m}(x)^r$, also ein endlich-dimensionaler komplexer Vertorraum, weil $\operatorname{Supp}(\boldsymbol{E}^{(r)}_{\{x\}}) \subset \{x\}$ ist.

Zum Beweis des Satzes genügt es also zu zeigen, daß für alle $k \in \mathbf{N}$ eine abgeschlossene Einbettung $V_k \to G_k := \operatorname{Grass}_k(\boldsymbol{E}^{(2k)})$ über X existiert. $\mathbf{V}_k(S \to X) := \operatorname{Hom}_{\mathbf{An}/X}(S, V_k)$ definiert einen Unterfunktor V_k von $\mathbf{Grass}_k(\boldsymbol{E}^{(2k)})$; denn:

$$\boldsymbol{E}^{(2k)}_S = \boldsymbol{O}_{S\times X}/\operatorname{Bild}(\boldsymbol{O}_{S\times_X Z^{(2k)}} \xrightarrow{\alpha_S} \boldsymbol{O}_{S\times_X Z});$$

nach Definition von $\mathbf{V}$ ist $\mathbf{V}_k(S \xrightarrow{q_S} X)$ gleich der Menge aller $\boldsymbol{S} \in \mathbf{V}(\mathrm{S} \to X)$, so daß gilt:

$$\dim_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{O}_{X, q_S(s)}/\boldsymbol{S}_{\{s\}, q_S(s)}) = k \text{ für alle } s \in S;$$

$V_k \subset V^{(2k)}$ impliziert also $\boldsymbol{S} \supset \operatorname{Bild} \alpha_S$; nach [2, p. 58] oder [7, Satz 1] folgt aus (β) und (γ), daß $\boldsymbol{O}_{S\times X}/\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}^{(2k)}_S/(\boldsymbol{S}/\operatorname{Bild} \alpha_S)$ eine lokal-freie $\boldsymbol{O}_S$-Garbe vom Rang k ist.

Es gibt also einen Monomorphismus $V_k \to G_k$ in $\mathbf{An}/X$, und diese holomorphe Abbildung ist eine abgeschlossene Einbettung. Beim Beweis wendet man ein Ergebnis von Pourcin [4, Prop. 1] an wie in [5]: Es sei $\boldsymbol{G} \in \mathbf{Grass}_k(\boldsymbol{E}^{(2k)})$ (G_k) die universelle Quotientengarbe,

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{E}^{(2k)}_{G_k}/\hat{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{O}_{G_k\times X}/\tilde{\boldsymbol{G}},$$

wobei

$$\boldsymbol{O}_{G_k\times_X Z} = \boldsymbol{O}_{G_k\times X} \supset \tilde{\boldsymbol{G}} \supset \operatorname{Bild}(\boldsymbol{O}_{G_k\times_X Z^{(2k)}} \xrightarrow{\alpha_{G_k}} \boldsymbol{O}_{G_k\times_X Z}).$$

Die Menge aller $g \in G_k$ mit $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\{g\}} \cdot \tilde{\boldsymbol{G}}_{\{g\}} \subset \tilde{\boldsymbol{G}}_{\{g\}} \subset \boldsymbol{O}_X$ ist der Träger eines universellen (abgeschlossenen) Unterraumes von G_k, der nach Definition mit V_k übereinstimmt; q. e. d. . –

Bemerkungen

a) $\operatorname{Grass}_k(\mathbf{C}^d)$ ist die Mannigfaltigkeit aller $(d-k)$-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbf{C}^d$. Nach dem Beweis des Satzes gibt es für jedes $x \in X$ abgeschlossene Einbettungen

$$V_{k,x,red} \to V_{k,x} \to \operatorname{Grass}_k(\mathbf{C}^d) \to \mathbf{P}(\mathbf{C}^N) := \operatorname{Grass}_1(\overset{k}{\wedge}\, \mathbf{C}^d)$$

mit $d := \dim_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{O}_{X,x}/\mathbf{C} + \mathfrak{m}(x)_x^{(2k)})$ und $N := \binom{d}{d-k} = \binom{d}{k}$. Auch die Inklusionen $\mathrm{Grass}_k(\mathbf{C}^d) \subset \mathbf{P}(\mathbf{C}^N)$ hängt holomorph von $x \in X$ ab. Man hat nämlich nach GROTHENDIECK [3, n° 2] eine abgeschlossene Einbettung

$$\mathrm{Grass}_k(\boldsymbol{E}^{(2k)}) \to \mathbf{P}\left(\bigwedge^k \boldsymbol{E}^{(2k)}\right) := \mathrm{Grass}_1\left(\bigwedge^k \boldsymbol{E}^{(2k)}\right)$$

über X, und die Fasern von $\mathbf{P}\left(\bigwedge^k \boldsymbol{E}^{(2k)}\right) \to X$ sind projektive Räume: $\mathbf{P}\left(\bigwedge^k \boldsymbol{E}^{(2k)}\right)_x = \mathbf{P}\left(\bigwedge^k \boldsymbol{E}^{(2k)}_{\{x\}}\right)$.

b) Jede Zusammenhangskompomente von V_x (bzw. $V_{x,red}$) ist in einem $V_{k,x}$ (bzw. $V_{k,x,red}$) enthalten. Das bereits erwähnte Ergebnis von WOLFFHARDT [8] lautet: Für reduziertes X und jede Zusammenhangskomponente $\tilde{V}_x$ von $V_{x,red}$ gibt es eine Einbettung

$$\tilde{V}_x \to \mathrm{Grass}_k(\mathbf{C}^{d'})$$

mit $k := \dim_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{O}_{X,x}/\mathbf{V}_{red,\{v\},x})$, $v \in \tilde{V}_x$, und $d' := \dim_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{O}_{X,x}/\mathfrak{m}(x)_x^{2k}) = d + 1$. Diese Aussage ist schwächer als in a); jede Projektion $\mathbf{C}^{d+1} \to \mathbf{C}^d$ induziert eine abgeschlossene Einbettung $\mathrm{Grass}_k(\mathbf{C}^d) \to \mathrm{Grass}_k(\mathbf{C}^{d+1})$, vgl. [3, n° 2]. Mit Hilfe der Methoden aus [8, p. 557] erhält man aber auch $\tilde{V}_x \subset \mathrm{Grass}_k(\mathbf{C}^d)$.

c) Wie in [6, Satz 2] kann man zeigen, daß $\mathrm{Grass}_k(\boldsymbol{E}^{(2k)}) \to X$ und $\mathbf{P}\left(\bigwedge^k \boldsymbol{E}^{(2k)}\right) \to X$ lokal-trivial sind, falls X eine Mannigfaltigkeit ist.

d) Die Darstellbarkeit des Funktors $\mathbf{Grass}_k(\boldsymbol{E}^{(r)})$ folgt auch aus dem (relativen) Theorem von DOUADY [1] (bzw. [4]). Andererseits kann man mit Hilfe von [3, Prop. 2.1] die Existenz des (relativen) Wolffhardt-Raumes wie in [7] (bzw. [6]) beweisen ohne Verwendung der Ergebnisse über Zwischenstrukturen, die mit dem (relativen) Theorem von DOUADY gezeigt werden, vgl. [5]. Man benötigt nur den Satz von POURCIN [4, Prop. 1], also „Platitude et Privilège" und keine banach-analytischen Räume.

Literatur

[1] DOUADY, A.: Le problème des modules pour les sous-espaces analytique compacts d'une espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier **16**, 1–95 (1966).

[2] – Flatness and privilege. L'Ens. Math. **14**, 47–74 (1968/70).

[3] Grothendieck, A.: Technique de construction en géométrie analytique. Exposé 12: Sém. H. Cartan **13**, E. N. S., Paris 1960/61.

[4] Pourcin, G.: Théorème de Douady au-dessus de S. Annali Scuol. Norm. Sup. Pisa **23**, 451–459 (1969).

[5] Schuster, H. W. und K.-W. Wiegmann: Ein Modulproblem für kohärente Unteralgebren. Erscheint in: Annali Scuol. Norm. Sup. (1972).

[6] – – Komplexe Unterstrukturen mit endlichen Trägern. Erscheint in: Math. Ann. (1972/73).

[7] Wiegmann, K.-W. und K. Wolffhardt: Komplexe Unterstrukturen mit einem festen Punkt als Träger. Manusc. math. 5, 385–394 (1971).

8] Wolffhardt, K.: Variation of a complex structure in a point. Amer. J. Math. 90, 553–567 (1968).