

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1972

MÜNCHEN 1973

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Über die Werte der Riemannschen $\zeta$ -Funktion und verwandter Funktionen für ganzzahlige Argumente

Von Hermann Schmidt in Würzburg

Wir geben im folgenden zunächst mit Hilfe Fourierscher Reihen kurze Beweise für Integralformeln von Mikolás zur Darstellung von Werten der Funktionen  $\zeta(s)$  und  $\beta(s)$  für solche natürliche Zahlen  $s = n$ , für die eine Zurückführung auf elementare Grundgrößen der Analysis nicht bekannt ist, wie man sie für  $\zeta(2k)$  und  $\beta(2k+1)$  besitzt. Im Grunde kommen diese Formeln auf leicht direkt zu erhaltende Sonderfälle des Pringsheimschen Satzes über die konjugierte Fourierreihe hinaus.\* Ebenso wird die Leopoldtsche Auswertung der Summe Dirichletscher L-Reihen für passende natürliche Argumente (entweder alle geraden oder alle ungeraden) aus der klassischen Fourierentwicklung der gewöhnlichen Bernoullischen Polynome hergeleitet (§ 2).

In § 3 wird u. a. gezeigt, daß der  $Q$ -Modul der (durch eine Potenz von  $\pi$  dividierten)  $\eta$ -Werte für ungerades natürliches Argument zusammenfällt mit dem Modul der „Momente“ (für ein endliches Intervall) einer  $\text{ctg}$ -Funktion; dabei genügen schon die Momente ungerader Ordnung, um diesen Modul (über dem rationalen Zahlkörper) zu erzeugen. Entsprechendes gilt nach § 4 für die Werte der Funktion  $\beta(s)$ . Ungelöste Fragen der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit solcher Funktionswerte werden dadurch auf die entsprechenden für die Momente zurückgeführt.

---

\* Wie ich inzwischen bemerkt habe, finden sich (10) und verwandte Formeln sogar schon bei J. L. Raabe, Die Jacob Bernoullische Funktion, Zürich 1848, S. 46/47, freilich mit langwieriger, schwer nachprüfbarer Begründung.

## § 1. Bezeichnungen und Grundformeln

Wir setzen in üblicher Bezeichnungsweise (vgl. etwa Abramowitz-Stegun [1] 23)

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-s} \quad (\Re s > 1),$$

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \nu^{-s} \quad (\Re s > 0)$$

$$(2) \quad \lambda(s) = (1 - 2^{-s}) \zeta(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu + 1)^{-s} \quad (\Re s > 1),$$

$$\beta(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} (2\nu + 1)^{-s} \quad (\Re s > 0).$$

Man hat insbesondere

$$\eta(1) = \lg 2, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \beta(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \beta(2) = 0,91596 \dots$$

(Catalansche Konstante). Bei analytischer Fortsetzung erweisen sich  $\eta(s)$  und  $\beta(s)$  bekanntlich als ganze Funktionen; wir merken uns an, daß

$$\eta(0) = -\zeta(0) = \frac{1}{2}.$$

Weiterhin verwenden wir die Integraldarstellungen für ganze  $s = n$  oder  $n+1$

$$(3) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^n}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \frac{n!}{2^{n-1}} \zeta(n) \quad (n \geq 2); \quad \int_0^{\infty} \frac{x^n}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \frac{n!}{2^{n-1}} \eta(n) \quad (n \geq 0)$$

$$(4) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^n}{\operatorname{sh} x} dx = 2 \cdot n! \lambda(n+1) \quad (n \geq 1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{\operatorname{ch} x} dx = 2 \cdot n! \beta(n+1) \quad (n \geq 0).$$

Diese Formeln ergeben sich z. B. durch Reihenentwicklung der linken Seiten, gegebenenfalls nach einer partiellen Integration (1. Zeile); für die 2. Gruppe kann eine Integraldarstellung der

Hurwitzschen  $\zeta$ -Funktion herangezogen werden (s. etwa Titchmarsh [12] (2.17.1) oder Herm. Schmidt [11] (1)).

Wir setzen ferner entsprechend der Normierung von Nörlund ([8], 2. Kap., vgl. auch ASt 23)

$$(5) \quad \frac{t e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n \quad (|t| < 2\pi)$$

$B_n := B_n(0)$ , so daß

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = -(1 - 2^{1-n}) B_n, \quad B_{2k+1} = 0, \quad \text{sg } B_{2k} = (-1)^{k-1} (k \geq 1)$$

$$(5)' \quad \frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)}{n!} t^n \quad (|t| < \pi)$$

$E_n := 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right)$ , so daß

$$E_{2k-1} = 0, \quad \text{sg } E_{2k} = (-1)^k (k \geq 1)$$

Alsdann gelten in  $0 \leq x \leq 1$  gleichmäßig die bekannten Fourier-Entwicklungen ( $e(x) := e^{2\pi i x}$ )

$$(6) \quad \frac{B_n(x)}{n!} = - \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{e(\nu x)}{(2\nu\pi i)^n} \quad (n \geq 2)$$

$$(6)' \quad \frac{E_n(x)}{n!} = 2 \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{e\left(\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\left((2\nu+1)\pi i\right)^{n+1}} \quad (n \geq 1),$$

aus denen man für  $n = 2k$  gerade,  $x = 0$  bzw.  $x = \frac{1}{2}$  die ebenso geläufigen (übrigens auch für  $k = 0$  richtigen) Formeln erhält:

$$(7) \quad \zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} \quad \text{oder also} \quad \eta(2k) = (-1)^k \frac{B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!}$$

$$(7)' \quad \beta(2k+1) = \frac{(-1)^k E_{2k}}{2 \cdot (2k)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}, \quad k \geq 0.$$

Selbstverständlich erhält man für die betreffenden Werte von  $n$  hierdurch auch geschlossene Ausdrücke für die Integrale (3) (4) (zum letzten der dortigen Fälle vgl. für  $n = 2k$  auch MacRobert [9] S. 328, 38). Uns beschäftigen aber im folgenden gerade die

nicht in (7) (7)' auftretenden Werte von  $n$ . Sei nunmehr für  $n = 1, 2, \dots$

$$(8) \quad H_n := \eta(n)\pi^{-n} \qquad (8)' \quad B_n := \beta(n)\pi^{-n}.$$

Für ungerades bzw. gerades  $n$  bringen wir diese Größen in Zusammenhang mit den Integralen (Momenten)

$$(9) \quad \Gamma_n := \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \operatorname{ctg} \pi x \, dx = -\frac{1}{\pi 2^{n-1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\zeta(2\nu)}{2^{2\nu(2\nu+n)}}$$

$$(9)' \quad A_n := \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{\sin \pi x} \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\frac{1}{2}-x)^n}{\cos \pi x} \, dx = \frac{1}{\pi 2^{n-1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\eta(2\nu)}{2^{2\nu(2\nu+n)'}}$$

die wieder für alle natürlichen  $n$  ins Spiel kommen werden, sowie mit Linearkombinationen derselben. Für den von  $m$  beliebigen Elementen  $\gamma_j$  über dem rationalen Zahlkörper  $Q$  erzeugten Modul schreiben wir dabei  $[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m]$ .

Die angegebenen Reihenentwicklungen entspringen ohne weiteres aus den Potenzreihen für die Integranden; sie sind gut konvergent (vergleichbar mit einer geometrischen Reihe vom Quotienten  $\frac{1}{4}$ ). Entsprechende Entwicklungen hat zuerst Herr Mikolás [7] 5, S. 152–155 (mit den Polynomen  $B_{2k+1}(x)$  anstelle der Potenzen) betrachtet.

## § 2. Integraldarstellungen für $\zeta$ -Werte (Raabe, Mikolás). Geschlossen angebbare L-Werte (Leopoldt).

Wir verwerten jetzt die Fourierschen Reihen zu besonders einfachen Beweisen von Sätzen der genannten Verfasser.

Aus [7] (35) (46) entnimmt man

$$(10) \quad \zeta(2k+1) = \frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!} \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2k+1}(x) \operatorname{ctg} \pi x \, dx.$$

Zum Beweis schreiben wir (6) mit  $\varphi := 2\pi x$ ;  $n = 2k+1$  in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu \varphi}{(2\pi\nu)^{2k+1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2 \cdot (2k+1)!} B_{2k+1}(x) \quad k \geq 1.$$

Nun ist

$$\sin \nu \varphi \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin(\nu + \frac{1}{2})\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} - \cos \nu \varphi \quad \text{und}$$

$$\frac{\sin(\nu + \frac{1}{2})\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} = 1 + 2 \sum_{\kappa=1}^{\nu} \cos \kappa \varphi \quad (= 2\nu + 1 \text{ für } \varphi = 0),$$

also vom Betrag  $\leq 2\nu + 1$ . Nach Multiplikation mit  $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$  geht daher auf der linken Seite eine in  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  gleichmäßig konvergente Reihe hervor, deren gliedweise Integration sofort (10) liefert. Noch kürzer läßt sich der Beweis schreiben, wenn man den Pringsheimschen Satz von der konjugierten Fourier-Reihe heranzieht (vgl. etwa Rogosinski [10] S. 68 (54)) und auf die Funktion  $f(x) := B_n(x - [x])$  anwendet, wobei  $B_{2k+1}(1-x) = -B_{2k+1}(x)$  zu beachten ist.

Ähnlich gewinnt man aus (6)' für  $n = 2k - 1$  ( $k \geq 1$ ) in der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(2\nu+1)\pi x}{((2\nu+1)\pi)^{2k}} = \frac{(-1)^k}{4(2k-1)!} E_{2k-1}(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

die Gleichung

$$(10)' \quad \frac{\beta(2k)}{\pi^{2k}} = \frac{(-1)^k}{2(2k-1)!} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{E_{2k-1}(x) dx}{\cos \pi x} \quad (\text{ASt 23.2.23}).$$

Dazu nehme man zunächst  $k \geq 2$ ; man erhält

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(2\nu+1)\frac{\varphi}{2}}{(2\nu+1)^{2k} \cos \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{2k}}, \text{ da}$$

$$\frac{\cos(2\nu+1)\frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = (-1)^{\nu} (1 + 2 \sum_{\kappa=1}^{\nu} (-1)^{\kappa} \cos \kappa \varphi)$$

und vom Betrag  $\leq 2\nu + 1$  ist, so daß gliedweise Integration zulässig ist. Für  $k = 1$  ergibt sich die Behauptung bequemer aus der späteren Formel § 4 (18). Auch im jetzigen Falle führt der Pringsheimsche Satz zum Ziel, wenn auch erst nach einer kleinen Umrechnung (die Reihe (6)' stellt eine gerade Funktion der Periode 2 dar!).

Wir wenden uns jetzt zu der neuen Auswertung Dirichletscher L-Reihen für gewisse ganzzahlige Argumente durch Leopoldt [6] (12). Während dort die Funktionalgleichung der L-Funktionen vorausgesetzt wird, wollen wir einen Beweis geben, der an analytischen Hilfsmitteln im wesentlichen nur die Fourierentwicklungen (6) der klassischen Bernoullischen Polynome voraussetzt und dadurch vielleicht ein gewisses Interesse hat.

Es sei  $\chi$  ein eigentlicher Charakter zum Modul (Führer)  $f$ . Dann hat man nach L (3) oder (9) (vgl. auch Hasse [5] S. 5)

$$B_x^n(x) := f^{n-1} \sum_{\mu=1}^f \chi(\mu) B_n\left(\frac{x+\mu}{f}\right).$$

Insbesondere wird für  $f = 1$

$$B^n(x) = B_n(x+1) = (-1)^n B_n(-x), \quad B^n := B^n(0) = B_n(1) = \\ = B_n \text{ für } n \geq 2, \quad B^1 = B_1(1) = -B_1 = \frac{1}{2},$$

und ferner für  $f = 4$ ,  $\chi(\mu) = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}}$  ( $\mu \equiv 1(2)$ )

$$B_x^n(x) = -n 2^{n-2} E_{n-1}\left(\frac{x+1}{2}\right), \quad B_x^n = -n E_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Es sei nun  $f \neq 1$  und  $-1 \leq x \leq 1$ . Dann ist für  $1 \leq \mu \leq f-1$

$0 \leq \frac{x+\mu}{f} \leq 1$ , so daß für die rechts auftretenden Polynome die Entwicklung (6) eingetragen werden kann. So ergibt sich (wegen  $\chi(f) = 0$ )

$$B_x^n(x) = -n! f^{n-1} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{e\left(\frac{v x}{f}\right)}{(2\pi i v)^n} G(\chi, v), \text{ wo}$$

$$G(\chi, v) := \sum_{\mu=1}^f \chi(\mu) e\left(v \frac{\mu}{f}\right) = \bar{\chi}(v) G(\chi, 1)$$

(vgl. etwa Bessel-Hagen [3] S. 1531 (10)).

Das gibt mit  $k = \left[\frac{n}{2}\right]$  für  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $n \geq 2$

(11)

$$B_x^n(x) = (-1)^{k-1} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ i \end{matrix} \cdot 2 \cdot n! \frac{f^{n-1}}{(2\pi)^n} \frac{G(\chi, 1)}{i^{n-2k}} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(v) \cos}{v^n \sin} \right\} \frac{2\pi v x}{f}$$

je nachdem

$$\begin{cases} \chi(-1) = (-1)^n \text{ oder} \\ \chi(-1) = (-1)^{n-1} \text{ ist.} \end{cases}$$

Diese Gleichung zeigt insbesondere für  $x = 0$ , wie sich im oberen Fall die Größen  $B_x^n$  und  $L_x(n)$  gegenseitig durcheinander ausdrücken lassen. Die genaue Gleichungsform L (12) ergibt sich durch Auflösung nach  $L_x(n)$  mit Rücksicht auf

$G(\chi, 1) G(\bar{\chi}, 1) = \chi(-1) f$  (a. a. O. (11), Beweis durchgeführt bei Hasse [4] S. 257/258):

$$L_x(n) = (-1)^{n+k-1} \frac{i^{n-2k}}{2 \cdot n!} G(\chi, 1) \left(\frac{2\pi}{f}\right)^n B_x^n$$

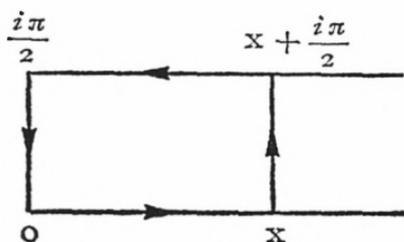
$$\left(n \geq 1, k = \left[\frac{n}{2}\right], \chi(-1) = (-1)^n\right).$$

Der zahlentheoretisch besonders wichtige Fall  $n = 1$  (vgl. Hasse [4], S. 379 (4b)) ist hier in der Tat eingeschlossen; man braucht ja nur in der Herleitung  $x$  auf das offene Intervall  $(-1, 1)$  zu beschränken (und die Summation in (6) als  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^{+N}$  zu deuten). –

Für  $f = 4$  kommt man natürlich auf (7)' zurück. Für weitere Verallgemeinerungen und geschichtliches ist auf Barner K. [2] zu verweisen.

### § 3. $\eta$ -Werte und ctg-Momente

Es sollen nun (unabhängig von § 2) die am Ende von § 1 angekündigten Zusammenhänge entwickelt werden.



Die Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf die Funktion  $z^n/\operatorname{sh}^2 z$  ( $n \geq 2$ ) und das Rechteck der Figur liefert nach Grenzübergang  $X \rightarrow \infty$

$$(12) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^n}{\operatorname{sh}^2 x} dx = i^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^n dy}{-\sin^2 y} - \int_0^{\infty} \frac{\left(x + \frac{i\pi}{2}\right)^n}{\operatorname{ch}^2 x} dx.$$

Für gerades  $n = 2k$  gibt der Vergleich der Realteile eine Relation, die vermöge (3) (7) auf

$$B_{2k} = \sum_{\lambda=0}^{2k} \binom{2k}{\lambda} B_{\lambda} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-\lambda} \text{ führt, was bekannt ist (vgl. z. B.}$$

Nörlund [8] S. 28, viertletzte Formel und (42)). Dagegen liefert der Imaginärteil etwas neues, nämlich nach (3)

$$\frac{1}{\pi^{2k}} \int_0^{\pi/2} y^{2k-1} \operatorname{ctg} y dy = \frac{1}{k^{2k}} \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu} 2^k \dots (2k-2\nu) \frac{\eta(2\nu+1)}{\pi^{2\nu+1}}$$

oder in den früher eingeführten Bezeichnungen (8) (9)

$$(13) \quad \Gamma_{2k-1} = \frac{1}{k^{2k}} \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu} (2k-2\nu)_{2\nu+1} H_{2\nu+1}.$$

Für  $k=1$  geht hier der bekannte Wert hervor

$$\Gamma_1 = \int_0^{1/2} x \operatorname{ctg} \pi x dx = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \lg \sin y dy = \frac{H_1}{2} = \frac{\lg 2}{2\pi} \text{ (vgl. (1)(8))},$$

wodurch man (nebenbei) aus (9) die Entwicklung erhält

$$\lg 2 = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \zeta(2\nu) / 2^{2\nu-1} (2\nu+1).$$

Läßt man in (13)  $k$  die natürliche Zahlenreihe durchlaufen, so kann man auch mittels einer unendlichen, aus (13) abzulesenden, zeilenfiniten und umkehrbaren Dreiecksmatrix  $G$  aus rationalen Zahlen schreiben

$$(13)^* \quad (\Gamma_{2k-1}) = G(H_{2k-1}),$$

und für jedes einzelne natürliche  $k$  gilt

$$(14) \quad [\Gamma_1, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{2k-1}] = [H_1, H_3, \dots, H_{2k-1}].$$

Dies geht insofern über (10) hinaus, als sich daraus, weil  $x^{2k}$  in der Potenzentwicklung von  $B_{2k+1}(x)$  auftritt, nur ergeben würde

$$H_{2k+1} \in [\Gamma_1, \Gamma_3 \cdots \Gamma_{2k-1}, \Gamma_{2k}, \Gamma_{2k+1}],$$

während tatsächlich hier  $\Gamma_{2k}$  eingespart werden kann.

Aus (10) und (13) folgt in der Tat

$$(14a) \quad \Gamma_{2k} \in [\Gamma_1, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{2k+1}].$$

Einen unabhängigen Beweis hierfür zusammen mit einer expliziten Darstellung erhält man nun, wenn man jetzt in (12)  $n = 2k + 1$  ungerade annimmt, und Realteile vergleicht: es wird

$$(2k+1) \int_0^{\pi/2} y^{2k} \operatorname{ctg} y dy = \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \binom{2k+1}{2\nu+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k-2\nu} \int_0^\infty \frac{x^{2\nu+1}}{\operatorname{ch}^2 x} dx +$$

$$+ (-1)^k \int_0^\infty \frac{x^{2k+1}}{\operatorname{sh}^2 x} dx \quad \text{oder also}$$

$$(15) \quad \Gamma_{2k} = \frac{1}{(2k+1) 2^{2k}} \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu (2k+1-2\nu)_{2\nu+1} H_{2\nu+1} +$$

$$+ (-1)^k \frac{(2k)! (2^{2k+1}-1)}{2^{2k} (2^{2k}-1)} H_{2k+1}.$$

Schreibt man (15) in der Gestalt

$(\Gamma_{2\lambda})_k = G'_k (H_{2\lambda-1})_{k+1}$ , wo die Indizes an den Klammern die Elementenzahl der betreffenden Spalte andeuten sollen, während  $G'_k$  eine Matrix (rationaler Zahlen) vom Typ  $(k, k+1)$  ist, so wird nach (13)\*

$$(16) \quad (\Gamma_{2\lambda})_k = G'_k G_{k+1}^{-1} (\Gamma_{2\lambda-1})_{k+1} (G_{k+1} \text{ der } (k+1)\text{-te Abschnitt von } G).$$

Die einfachsten Relationen (16) sind ( $k = 1, 2$ )

$$\Gamma_1 - 9 \Gamma_2 + 14 \Gamma_3 = 0, \quad \Gamma_1 - 70 \Gamma_3 + 225 \Gamma_4 - 186 \Gamma_5 = 0$$

oder

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 7x)(1 - 2x)x \operatorname{ctg} \pi x \, dx = 0,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + 2x - 66x^2 + 93x^3)(1 - 2x)x \operatorname{ctg} \pi x \, dx = 0.$$

Eine einfache Gewinnung mit den Mitteln der Integralrechnung im reellen wäre vielleicht erwünscht, ist mir aber bisher nicht gelungen. Es ist zu vermuten, daß  $\dim [\Gamma_1, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{2k+1}] = k + 1$ , so daß also auch  $H_1, H_3, \dots, H_{2k+1}$  über  $Q$  linear unabhängig sind; das würde insbesondere besagen, daß im Gegensatz zu den Werten  $H_{2k}$  keine zwei der Größen  $H_n$  ( $n \equiv 1 \pmod{2}$ ) ein rationales Verhältnis haben können. Doch steht ein Beweis hierfür selbst für  $k = 1$  noch aus.

#### § 4. $\beta$ -Werte und cosecans-Momente

Wir wenden jetzt unter Verfahren der Integration im komplexen auf die Funktion  $z^n/\operatorname{sh} z$  an ( $n \geq 1$ ) und erhalten

$$(17) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^n \, dx}{\operatorname{sh} x} = i^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^n \, dy}{\sin y} + \frac{1}{i} \int_0^{\infty} \frac{(x + \frac{i\pi}{2})^n}{\operatorname{ch} x} \, dx.$$

Der Imaginärteil gibt bei ungeradem  $n = 2k - 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^{2k-1}}{\sin y} \, dy = \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k-2\nu} \binom{2k-1}{2\nu-1} \int_0^{\infty} \frac{x^{2\nu-1}}{\operatorname{ch} x} \, dx$$

oder also in den Bezeichnungen (8)' (9)' nach (4)

$$(18) \quad \Delta_{2k-1} = \sum_{\nu=1}^k \frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2k-2\nu-1}} (2k - 2\nu + 1)_{2\nu-1} B_{2\nu} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Für  $k = 1$  geht hier der bekannte, aber oben unbewiesen gebliebene Sonderfall  $\Delta_1 = 2 B_2$  der Formel (10)' hervor, zusammen mit der Entwicklung

$$\beta(2) = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\eta(2\nu)}{2^{2\nu}(2\nu+1)} \text{ für die Catalansche Konstante.}$$

Ferner ist entsprechend (14)

$$(19) \quad [A_1, A_3, \dots, A_{2k-1}] = [B_2, B_4, \dots, B_{2k}].$$

Bemerkenswerterweise liefert hier (10)' eine explizite Umkehrung von (18). Man hat nur rechts die Entwicklung einzusetzen

$$E_{2k-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{2k-1}{2\nu} \frac{E_{2\nu}}{2^{2\nu}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2k-1-2\nu} \quad (\text{ASt 23.1.7.})$$

und (9)' zu beachten; dann ergibt sich sofort

$$(20) \quad B_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} \sum_{\lambda=1}^k \binom{2k-1}{2\lambda-1} \frac{E_{2k-2\lambda}}{2^{2k-2\lambda+1}} A_{2\lambda-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Man rechnet aufgrund der Eigenschaften der Eulerschen Zahlen leicht nach, daß die unendliche Matrix des Systems (20) die inverse der Matrix von (18) ist. Das läßt sich nicht ohne weiteres aus dem Bestehen einer Umkehrrelation der Form (20) schließen, da ja nicht feststeht, ob die  $A_{2\lambda-1}$  ein linear unabhängiges System bilden, wie wir es ähnlich wie § 3 Ende, und mit entsprechender Folgerung für die  $B_{2\lambda}$ , vermuten.

Vergleichen wir schließlich noch in (17) für gerades  $n = 2k$  die Realteile, so entsteht

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{2k}}{\operatorname{sh} x} dx &= \\ &= (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^{2k} dy}{\sin y} + \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu} \binom{2k}{2\nu-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1-2\nu} \int_0^{\infty} \frac{x^{2\nu-1}}{\operatorname{ch} x} dx \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf (4) (8)' (9)'

$$2 \cdot (2k)! \frac{\lambda(2k+1)}{\pi^{2k+1}} = (-1)^k A_{2k} + \sum_{\nu=1}^k \binom{2k}{2\nu-1} (2\nu-1)! (-1)^{\nu} \frac{B_{2\nu}}{2^{2k-2\nu}}$$

und schließlich nach (1) (2)

$$(21) \quad \Delta_{2k} = (-1)^k (2k)! \frac{2^{2k+1}-1}{2^{2k}-1} H_{2k+1} + \\ + \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \frac{(2k-2\nu+2)2^{\nu-1}}{2^{2k-2\nu}} B_{2\nu}$$

als Gegenstück zu (15).

Die einfachsten Gleichungen sind

$$\Delta_2 = -\frac{14}{3} H_3 + 2 B_2, \quad \Delta_4 = \frac{248}{5} H_5 + B_2 - 24 B_4.$$

Hier können noch aufgrund von (20) und der Umkehrung von (13\*) die  $\eta$ - und  $\beta$ -Werte durch Integralgrößen ersetzt werden; so findet man, daß

$$(19a) \quad \Delta_{2k} \in [\Gamma_1, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{2k+1}, \Delta_1, \Delta_3, \dots, \Delta_{2k-1}]$$

d. h. daß sich auch hier die Momente gerader Ordnung durch solche ungerader Ordnung zusammensetzen lassen, nur in etwas verwickelterer Weise als bei (14a), (16).

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß die nicht besprochenen der bei der Zerlegung von (12) und (17) in Real- und Imaginärteil für gerade und ungerade  $n$  sich ergebenden acht Fälle ebenso auf bekannte Relationen zwischen Bernoullischen und Eulerschen Zahlen hinauskommen, wie es nach (12) an einem Beispiel durchgeführt ist.

Die strukturellen Hauptergebnisse der letzten Paragraphen sind in den Beziehungen (14) (14a), (19) (19a) enthalten und sollen zum Teil noch kurz in Worte gefaßt werden.

**Satz.** Die  $k+1$  ersten (gemäß (8) modifizierten)  $\eta$ -Werte für ungerades natürliches Argument lassen sich linear homogen mit rationalen Koeffizienten aus den entsprechenden ctg-Momenten ungerader Ordnung zusammensetzen (14). Dasselbe gilt für die ersten  $\beta$ -Werte gerader natürlicher Argumente und die entsprechenden cosec-Momente ungerader Ordnung (19). Im 1. Falle sind die ersten  $k$  Momente gerader Ordnung in dem Modul enthalten, der von denen ungerader Ordnung gebildet wird (14a), im 2. Falle in der Verbindung desselben mit seinem ctg-Gegenstück (19a).

## Schriftenverzeichnis

- [1] Abramowitz, M. und Stegun, I., Handbook of Mathematical Functions, New York 1965, insbes. 23, S. 803–819. Zitiert: ASt.
- [2] Barner, K., Über die Werte der Ringklassen-L-Funktionen reellquadratischer Zahlkörper an natürlichen Argumentstellen.  
J. Number Theory 1 (1969) 28–64.
- [3] Bessel-Hagen, Zahlentheorie. Pascals Repertorium der Höheren Mathematik I 3 (1929), Kap. 27.
- [4] Hasse, H., Vorlesungen über Zahlentheorie. Berlin, Springer 1950.
- [5] Hasse, H., Sulla generalizzazione di Leopoldt dei numeri di Bernoulli ecc. Rend. di Matematica Roma (1–2) 21 (1962) 9–27.
- [6] Leopoldt, H. W., Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen. Abh. Math. Sem. Hamburg 22 (1958) 131–146. Zitiert: L.
- [7] Mikolás, M., Über die Beziehungen zwischen der Gamma-Funktion und den trigonometrischen Funktionen.  
Acta Math. Acad. Scient. Hungarica 4 (1953) 143–157.
- [8] Nörlund, N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung. Berlin, Springer 1924.
- [9] MacRobert, Functions of a complex variable. 4. Aufl., London 1954.
- [10] Rogosinski, W., Fouriersche Reihen. Sammlung Göschen, Berlin 1930.
- [11] Schmidt, Hermann, Elementarer Beweis für eine asymptotische Entwicklung aus dem Gebiet der  $\zeta$ -Funktion. Math. Z. 84 (1964) 271–276.
- [12] Titchmarsh, E. C., The Theory of the Riemann Zeta-Function. Oxford, Clarendon 1951.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1973

Band/Volume: [1972](#)

Autor(en)/Author(s): Schmidt Hermann

Artikel/Article: [Über die Werte der Riemannschen zeta-Funktion und verwandter Funktionen für ganzzahlige Argumente 87-99](#)