BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1973

MÜNCHEN 1974

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Der Jacobi'sche Kettenalgorithmus in einem kubischen Zahlenkörper. II

Von Oskar Perron in München

Vorgelegt am 2. Februar 1973

Les livres sont comme les enfants:
Conçus avec volupté,
Menés à terme avec fatigue,
Enfantés avec douleur.

Diese Sentenz hab' ich vor vielen Jahren irgendwo einmal gelesen. Von wem sie stammt, hab' ich vergessen oder nie gewußt. Wer kann es mir sagen? Aber die Wahrheit des Wortes hab' ich bei meinen Büchern und oft auch bei kleineren Druckerzeugnissen deutlich verspürt.

Übersicht

§ 1. Einleitung

Wer diese Arbeit lesen und verstehen will, muß den ersten Teil (siehe Literatur) dauernd zur Hand haben. Er wird stets mit I zitiert, die Numerierung der Formeln wird hier fortgesetzt. Auf Seite 48 von I sagte ich, daß und wodurch mein Glaube an die Periodizität stark erschüttert wurde. Ich habe mich weiter bemüht und versucht, aus Formeln, die das Matrixprodukt (19) auf dem Faltblatt von I bei Seite 32 an die Hand gibt, neue Relationen zwischen den Größen U^ν, V^ν, Φ^ν, Ψ^ν, Ω^ν zu finden. Ohne Erfolg, und heute bin ich überzeugt, daß es keine solche Relation gibt, die nicht eine rationale Kombination der Formeln (69), (70), (71) wäre. Beweisen kann ich das allerdings nicht und, wenn ich es könnte, würde die allgemeine Periodizität nur unwahrscheinlicher werden. Aber ich habe dann auch versucht, ohne eine Relation weiter zu kommen, und habe einiges erreicht.

§ 2. Einführung der Größen K^ν (ν = Zahl der Striche)

In I Seite 28 ist bewiesen, daß die Frage nach der Periodizität identisch ist mit der Frage, ob die Menge der unendlich vielen ganzen Zahlen S^ν, P_i^ν, Q_i^ν, R_i^ν beschränkt ist. Das läuft ungefähr darauf hinaus, ob die U^ν, V^ν, Φ^ν, Ψ^ν beschränkt sind. Mit dem Ziel, darauf eine Antwort zu finden, führe ich für die Koeffizienten der Formeln (69), (70), (71) die Abkürzungen ein:

$$\frac{3B+2A\omega}{B+A\omega} = \alpha, \quad \frac{3B+A\omega}{B+A\omega} = \beta, \quad \frac{B}{B+A\omega} = \gamma. \tag{72}$$

Die Formeln (69) und (70) lauten dann

$$V^\nu - U^\nu - \alpha(\Psi^\nu - \Phi^\nu) - \beta\,\Omega^\nu = 0, \tag{69}$$

$$\alpha(\Phi^\nu)^2 - \beta\Phi^\nu\Omega^\nu + \gamma(\Omega^\nu)^2 - U^\nu\,\Phi^\nu - U^\nu\Psi^\nu = 0. \tag{70}$$

Zieht man jetzt Formel (70) von der mit Φ^ν multiplizierten Formel (69) ab, so kommt nach Gliederumstellung:

$$U^\nu\Psi^\nu + V^\nu\Phi^\nu - \alpha\,\Phi^\nu\Psi^\nu = \gamma(\Omega^\nu)^2. \tag{73}$$

Setzt man jetzt

$$U^\nu - \alpha\Phi^\nu + \frac{\beta}{2}\,\Omega^\nu = K^\nu, \tag{74}$$

so ist nach (69) auch

$$V^\nu - \alpha\Psi^\nu - \frac{\beta}{2}\,\Omega^\nu = K^\nu. \tag{75}$$

Nach dieser Definition können die K^ν ohne weiteres am Spiel der Strichvermehrung teilnehmen.

Aus (74) und (75) folgt

$$(76)\quad \begin{aligned}(K^\nu)^2 - \left(\frac{\beta}{2}\,\Omega^\nu\right)^2 &= (U^\nu - \alpha\Phi^\nu)(V^\nu - \alpha\Psi^\nu)\\ &= U^\nu V^\nu - \alpha(U^\nu\Psi^\nu + V^\nu\Phi^\nu - \alpha\Phi^\nu\Psi^\nu)\\ &= U^\nu V^\nu - \alpha\gamma(\Omega^\nu)^2 \qquad \text{nach (73).}\end{aligned}$$

Nach der Definition von U^ν, V^ν in I, (68) ist $U^\nu V^\nu = S^\nu S^{\nu+1}\,\xi_2^{\nu+1}$, so daß wir schließlich bekommen:

$$(77)\qquad (K^\nu)^2 = S^\nu S^{\nu+1}\,\xi_2^{\nu+1} - \delta(\Omega^\nu)^2 \text{ mit } \delta = \alpha\gamma - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2.$$

Für $\delta > 0$ ist die quadratische Form $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ definit, was nach I, Seite 48, 49 bedeutet, daß die konjugierten Körper imaginär sind. Für $\delta < 0$ sind sie reell, und $\delta = 0$ ist unmöglich, weil dann die kubische Gleichung für ω eine Doppelwurzel hätte und wir gar keinen kubischen Körper hätten.

Ich habe mich vergeblich bemüht, die Beschränktheit der K^ν nachzuweisen. Wenn das gelänge, so wäre damit bereits die Periodizität bewiesen. Denn aus (77) würde wegen der Beschränktheit der Ω^ν sofort die Beschränktheit der S^ν und ξ_2^ν und dann auch der U^ν und V^ν folgen. Aus (74) und (75) würde sich weiter die Beschränktheit der Φ^ν und Ψ^ν, also auch der Q_1^ν und Q_2^ν ergeben. Schließlich würden die ersten beiden Formeln der Tabellen (66) und (67) in I auch die Beschränktheit der R_1^ν, R_2^ν und der P_1^ν, P_2^ν liefern. Damit wäre die Menge der unendlich vielen ganzen Zahlen S^ν, P_i^ν, Q_i^ν, R_i^ν beschränkt, was nach I, Seite 28 Periodizität bedeutet.

Für die K^ν gibt es aber die bemerkenswerte Rekursionsformel

$$(78)\qquad K^{\nu+1} + \frac{\varrho_1^{\nu+2}}{\xi_2^{\nu+1}}\,K^\nu = -\left(b_1^{\nu+1} + \frac{1}{\varrho_1^{\nu+1}}\right) S^{\nu+1}.$$

Beweis: Nach (74) mit 1 Strich mehr und (75) ist

$$\begin{aligned}K^{\nu+1} + \frac{\varrho_1^{\nu+2}}{\xi_2^{\nu+1}}\,K^\nu = U^{\nu+1} - \alpha\Phi^{\nu+1} + \frac{\beta}{2}\,\Omega^{\nu+1} + \\ + \frac{\varrho_1^{\nu+2}}{\xi_2^{\nu+1}}\left(V^\nu - \alpha\Psi^\nu - \frac{\beta}{2}\,\Omega^\nu\right).\end{aligned}$$

Nun ist nach den Definitionen I (68)

$$U^{\nu+1} = \frac{S^{\nu+1}}{\xi_2^{\nu+2}},\ V^\nu = S^{\nu+1}(\xi_2^{\nu+1})^2,\ \Phi^{\nu+1} = Q_1^{\nu+1}\omega,\ \Psi^\nu = \xi_2^{\nu+1} Q_2^{\nu+1}\omega,$$

ferner nach I (68) und (63)

$$(79) \qquad \Omega^{\nu+1} = \frac{\vartheta^{\nu+1}\omega C}{\xi_2^{\nu+1}} = \frac{\vartheta^\nu \varrho_1^{\nu+2}}{\xi_2^\nu} \frac{\omega C}{\xi_2^{\nu+1}} = \frac{\varrho_1^{\nu+2}}{\xi_2^{\nu+1}} \Omega^\nu,$$

so daß sich die Glieder mit dem Faktor $\frac{\beta}{2}$ wegheben, und es folgt:

$$K^{\nu+1} + \frac{\varrho_1^{\nu+2}}{\xi_2^{\nu+1}} K^\nu = S^{\nu+1}\left(\frac{1}{\xi_2^{\nu+2}} + \xi_2^{\nu+1}\varrho_1^{\nu+2}\right) - \alpha(Q_1^{\nu+1}\omega + \varrho_1^{\nu+2} Q_2^{\nu+1}\omega).$$

Für die letzte Klammer entnimmt man aus der vierten Formel der Tabelle I (67) den Wert

$$\frac{S^{\nu+1}\omega^2\xi_2^{\nu+1}\xi_2^\nu}{\vartheta^\nu(3\omega^2 - A)} = \frac{S^{\nu+1}\omega^3\xi_2^{\nu+1}\xi_2^\nu}{\vartheta^\nu(3\omega^3 - A\omega)} = \frac{S^{\nu+1}\xi_2^{\nu+1}\xi_2^\nu}{\vartheta^\nu} \frac{B + A\omega}{3B - 2A\omega} =$$
$$= \frac{S^{\nu+1}\xi_2^{\nu+1}\xi_2^\nu}{\vartheta^\nu \alpha}.$$

Somit kommt schließlich

$$K^{\nu+1} + \frac{\varrho_1^{\nu+2}}{\xi_2^{\nu+1}} K^\nu = S^{\nu+1}\left(\frac{1}{\xi_2^{\nu+2}} + \xi_2^{\nu+1}\varrho_1^{\nu+2} - \frac{\xi_2^{\nu+1}\xi_2^\nu}{\vartheta^\nu}\right).$$

Der Faktor von $S^{\nu+1}$ läßt sich vereinfachen. Trivialer Weise ist nämlich

$$\frac{1}{\xi_2^{\nu+2}} = \xi_1^{\nu+1} - b_1^{\nu+1},$$

und außerdem ist nach I (58)[1] und (62)

$$\varrho_1^{\nu+2} = b_2^\nu + \frac{b_1^\nu}{\varrho_1^{\nu+1}} + \frac{1}{\varrho_2^\nu},\quad \frac{1}{\vartheta^\nu} = 1 + \frac{\xi_1^\nu}{\xi_2^\nu\varrho_1^{\nu+1}} + \frac{1}{\xi_2^\nu\varrho_2^\nu}.$$

Der fragliche Faktor von $S^{\nu+1}$ ist also gleich

$$\xi_1^{\nu+1} - b_1^{\nu+1} + \xi_2^{\nu+1}b_2^\nu + \frac{\xi_2^{\nu+1}b_1^\nu}{\varrho_1^{\nu+1}} + \frac{\xi_2^{\nu+1}}{\varrho_2^\nu} - \xi_2^{\nu+1}\xi_2^\nu - \frac{\xi_2^{\nu+1}\xi_1^\nu}{\varrho_1^{\nu+1}} - \frac{\xi_2^{\nu+1}}{\varrho_2^\nu}$$
$$= -b_1^{\nu+1} + \xi_2^{\nu+1}\left(\frac{\xi_1^{\nu+1}}{\xi_2^{\nu+1}} + b_2^\nu + \frac{b_1^\nu}{\varrho_1^{\nu+1}} - \xi_2^\nu - \frac{\xi_1^\nu}{\varrho_1^{\nu+1}}\right)$$
$$= -b_1^{\nu+1} + \xi_2^{\nu+1}\frac{b_1^\nu - \xi_1^\nu}{\varrho_1^{\nu+1}} = -\left(b_1^{\nu+1} + \frac{1}{\varrho_1^{\nu+1}}\right).$$

[1] In I (58) ist ein in meinen verschickten Sonderdrucken bereits korrigierter Druckfehler. Links muß statt $\varrho_2^{\nu+2}$ stehen $\varrho_1^{\nu+2}$.

Damit ist die Formel (78) bewiesen.

Aus (78) folgt, daß von zwei aufeinander folgenden K^ν und $K^{\nu+1}$ wenigstens eines das entgegengesetzte Vorzeichen von $S^{\nu+1}$ haben muß. Das ist besonders bemerkenswert im Fall $\delta > 0$, also wenn die konjugierten Körper imaginär sind. Dann sind nämlich die zu $\xi_2^{\nu+1}$ konjugierten Zahlen konjugiert-komplex. Die Norm von $\xi_2^{\nu+1}$ ist also wie $\xi_2^{\nu+1}$ selbst positiv. Nach I (34) ist aber

$$\mathrm{Nm}\, \xi_2^{\nu+1} = \frac{S^\nu}{S^{\nu+1}}.$$

Daher haben alle S^ν gleiches Vorzeichen, sind also, wenn man S ohne Strich freiwillig und willkürlich positiv gewählt hat, sämtlich positiv, und für die K^ν ergibt sich in unserem Fall, daß von zwei aufeinander folgenden K^ν und $K^{\nu+1}$ wenigstens eines negativ ist.

§ 3. Die Hyperboloide

Nach (77) ist $S^\nu S^{\nu+1}\xi_2^{\nu+1} - \delta(\Omega^\nu)^2$ das Quadrat der reellen Zahl K^ν, also nie negativ. Wir setzen daher

$$K^\nu = \varepsilon^\nu \sqrt{S^\nu S^{\nu+1}\xi_2^{\nu+1} - \delta(\Omega^\nu)^2}, \tag{80}$$

wobei wir die Quadratwurzel positiv nehmen und mit ε^ν ($= \pm 1$) das Vorzeichen von K^ν meinen. Sollte einmal $K^\nu = 0$ sein, so setzen wir $\varepsilon^\nu = +1$. Im übrigen vermag ich über das Vorzeichen von K^ν leider aus keiner der beiden Definitionen (74), (75) etwas Sicheres zu entnehmen.

Nach Formel (78) ist jetzt

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\nu+1}\sqrt{S^{\nu+1}S^{\nu+2}\xi_2^{\nu+2} - \delta(\Omega^{\nu+1})^2} + \frac{\varrho_1^{\nu+2}}{\xi_2^{\nu+1}}\,\varepsilon^\nu\sqrt{S^\nu S^{\nu+1}\xi_2^{\nu+1} - \delta(\Omega^\nu)^2}\\ = -\left(b_1^{\nu+1} + \frac{1}{\varrho_1^{\nu+1}}\right) S^{\nu+1}.\end{aligned} \tag{81}$$

Bringen wir die zweite Wurzel von links nach rechts und quadrieren, so kommt, wenn wir noch die Abkürzungen

$$S^{\nu+2}\xi_2^{\nu+2} = X^\nu,\quad S^{\nu+1}\left(b_1^{\nu+1} + \frac{1}{\varrho_1^{\nu+1}}\right)^2 = Y^\nu,\quad S^\nu\frac{(\varrho_1^{\nu+2})^2}{\xi_2^{\nu+1}} = Z^\nu \tag{82}$$

einführen:

$$\begin{aligned}S^{\nu+1}X^\nu - \delta(\Omega^{\nu+1})^2 = S^{\nu+1}Y^\nu\\ + 2\left(b_1^{\nu+1} + \frac{1}{\varrho_1^{\nu+1}}\right) S^{\nu+1}\frac{\varrho_1^{\nu+2}}{\xi_2^{\nu+1}}\,\varepsilon^\nu\sqrt{S^\nu S^{\nu+1}\xi_2^{\nu+1} - \delta(\Omega^\nu)^2}\\ + \frac{(\varrho_1^{\nu+2})^2}{\xi_2^{\nu+1}} S^\nu S^{\nu+1} - \delta\left(\frac{\varrho_1^{\nu+2}}{\xi_2^{\nu+1}}\Omega^\nu\right)^2.\end{aligned}$$

Die letzten Glieder links und rechts sind nach (79) einander gleich und können weggelassen werden. Alle anderen haben den Faktor $S^{\nu+1}$ gemein. Läßt man ihn weg, so kommt nach leichter Gliederumstellung

(83)
$$X^\nu - Y^\nu - Z^\nu = 2\left(b_1^{\nu+1} + \frac{1}{\varrho_1^{\nu+1}}\right) \frac{\varrho_1^{\nu+2}}{\xi_2^{\nu+1}} \varepsilon^\nu \sqrt{S^\nu S^{\nu+1} \xi_2^{\nu+1} - \delta(\Omega^\nu)^2}.$$

Bringen wir in (81) statt der zweiten die erste Quadratwurzel von links nach rechts und quadrieren dann, so führt eine ganz analoge Rechnung zu der Formel

(84)
$$Z^\nu - Y^\nu - X^\nu = 2\left(b_1^{\nu+1} + \frac{1}{\varrho_1^{\nu+1}}\right) \varepsilon^{\nu+1} \sqrt{S^{\nu+1} S^{\nu+2} \xi^{\nu+2} - \delta(\Omega^{\nu+1})^2}.$$

Bringt man in (83) und (84) die Faktoren vor der Wurzel unter die Wurzel, so sehen die Formeln so aus:

(83a) $$X^\nu - Y^\nu - Z^\nu = 2\,\varepsilon^\nu \sqrt{Y^\nu Z^\nu - \delta(M^\nu)^2},$$

(84a) $$Z^\nu - Y^\nu - X^\nu = 2\,\varepsilon^{\nu+1} \sqrt{Y^\nu X^\nu - \delta(M^\nu)^2},$$

wobei

(85) $$M^\nu = \left(b_1^{\nu+1} + \frac{1}{\varrho_1^{\nu+1}}\right) \Omega^{\nu+1} = \left(b_1^{\nu+1} + \frac{1}{\varrho_1^{\nu+1}}\right) \frac{\vartheta^{\nu+1} \omega C}{\xi_2^{\nu+1}}.$$

Offenbar ist M^ν beschränkt. Denn es ist $\vartheta^{\nu+1} < 1$, C eine Invariante und $b_1^{\nu+1} + \frac{1}{\varrho_1^{\nu+1}} < \xi_1^{\nu+1} + 1 < 2\,\xi_2^{\nu+1}$.

Die Formeln (83a) und (84a) ergeben beide durch Quadrieren

(86) $$(X^\nu)^2 + (Y^\nu)^2 + (Z^\nu)^2 - 2X^\nu Y^\nu - 2X^\nu Z^\nu - 2Y^\nu Z^\nu = -4\,\delta(M^\nu)^2$$

und hieraus folgt noch eine zu (83a) und (84a) analoge dritte Formel

(87) $$Y^\nu - X^\nu - Z^\nu = \pm 2 \sqrt{X^\nu Z^\nu - \delta(M^\nu)^2},$$

wobei das Vorzeichen $\pm$ leider ebenso unbekannt ist wie ε^ν und $\varepsilon^{\nu+1}$.

Die Formeln (83a) bis (87) lassen sich geometrisch interpretieren. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem x, y, z stellt die Gleichung

(88) $$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=-4\delta(M^\nu)^2$$

ein Hyperboloid dar mit dem Asymptotenkegel

(89) $$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=0.$$

Man kann es in der dreifachen Gestalt schreiben:

(90) $$\begin{aligned}(x-y-z)^2 &= 4yz-4\delta(M^\nu)^2,\\ (y-x-z)^2 &= 4xz-4\delta(M^\nu)^2,\\ (z-y-x)^2 &= 4xy-4\delta(M^\nu)^2.\end{aligned}$$

Wenn man die x, y, z vertauscht, also insbesondere, wenn man das Hyperboloid um 120 Grad um die Gerade $x=y=z$ dreht, geht es in sich selbst über; also ist es ein Rotationshyperboloid mit der genannten Geraden als Achse.

Für $\delta>0$ folgt aus (90), daß xy, xz, yz positiv sind, also haben x, y, z stets gleiches Vorzeichen. Das Hyperboloid ist zweischalig; die eine Schale liegt ganz im Achtelraum $x>0$, $y>0$, $z>0$, die andere im Achtelraum $x<0$, $y<0$, $z<0$. Nach den Gleichungen (83a) bis (87) wird das Zahlentripel X^ν, Y^ν, Z^ν, weil für $\delta>0$ die S^ν und folglich auch die in (82) definierten X^ν, Y^ν, Z^ν, positiv sind, durch einen Punkt der erstgenannten Schale repräsentiert. Für $\delta<0$ ist das Hyperboloid einschalig, das Zahlentripel X^ν, Y^ν, Z^ν wird aber immer noch durch einen Punkt auf ihm repräsentiert.

§ 4. Scheitel des zweischaligen und Kehlkreis des einschaligen Hyperboloids

Der Scheitel der uns interessierenden Hyperboloidschale liegt auf der Achse $x=y=z$ und ergibt sich nach (88) aus der Gleichung $-3x^2=-4\delta(M^\nu)^2$, also ist

(91) $$x=y=z=\sqrt{\frac{4\delta}{3}}\,|M^\nu|.$$

Wegen der Beschränktheit von M^ν enthält daher unsere von ν abhängige Hyperboloidschale auch Punkte innerhalb einer von ν unabhängigen Umgebung des Nullpunkts. Wenn das nicht so wäre (im selben Asymptotenkegel liegen ja auch Hyperboloide mit beliebig weit entferntem Scheitel), dann gäbe es für Periodizität keine Chance mehr.

Der Kehlkreis des für $\delta < 0$ einschaligen Hyperboloids liegt in der durch den Nullpunkt gehenden Lotebene zur Rotationsachse. Um ihn zu finden, machen wir die offensichtlich orthogonale Transformation

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} &= \mathfrak{x}, \\
\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \qquad\quad &= \mathfrak{y}, \\
\frac{x}{\sqrt{6}} + \frac{y}{\sqrt{6}} - \frac{2z}{\sqrt{6}} &= \mathfrak{z}.
\end{aligned} \tag{92}
$$

Auf der Rotationsachse ist $\mathfrak{y} = 0$, $\mathfrak{z} = 0$. Also ist es die $\mathfrak{x}$-Achse. Die Umkehrformeln von (92) und die Gleichung des Hyperboloids in den neuen Koordinaten brauchen wir nicht, wenn uns nur der in der $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$-Ebene gelegene Kehlkreis interessiert. Auf diesem ist $y = -x - z$, also

$$\mathfrak{y} = \frac{2x + z}{\sqrt{2}}, \quad \mathfrak{z} = \frac{-3z}{\sqrt{6}},$$

$$\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = \frac{(2x + z)^2}{2} + \frac{9z^2}{6} = 2x^2 + 2xz + 2z^2.$$

Setzen wir $\delta = -\delta'$ (< 0), so ist

$$
\begin{aligned}
4\delta'(M^\nu)^2 = (y - x - z)^2 - 4xz = (-2x - 2z)^2 - 4xz = \\
= 4x^2 + 4xz + 4z^2.
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich

$$\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 2\delta'(M^\nu)^2 \tag{93}$$

als Gleichung des Kehlkreises in seiner Ebene. Sein Radius ist $\sqrt{2\delta'}\,|M^\nu|$. Wegen der Beschränktheit von M^ν bleibt er unter einer für alle ν gleichen Schranke. Wenn das nicht so wäre (es gibt ja um denselben Asymptotenkegel auch Hyperboloide mit beliebig großem Kehlkreisradius), dann gäbe es auch im Fall, daß die konjugierten Körper reell sind, für Periodizität keine Chance mehr.

§ 5. Was läßt sich aus den Hyperboloiden folgern?

Die Frage nach der Periodizität läuft nun auf die Frage hinaus, ob die X^ν, Y^ν, Z^ν beschränkt sind. Da dieses Zahlentripel durch einen Punkt des Hyperboloids repräsentiert wird und da dieses sich ins Unendliche erstreckt, kann man nicht auf Beschränktheit schließen. Für $\delta < 0$ (reelle konjugierte Körper) habe ich noch nichts gefunden, was über das in § 4 Gesagte hinausgeht. Für $\delta > 0$ (imaginäre konjugierte Körper) ist mir einiges gelungen. Da sind ja die X^ν, Y^ν, Z^ν positiv. Ich will ihre Namen vorübergehend so vertauschen, daß $X^\nu \geqq Y^\nu \geqq Z^\nu$ ist. Nach (83a), (84a) und (87) ist dann

$$
(94)\qquad
\begin{aligned}
X^\nu - Y^\nu - Z^\nu &= \pm 2\sqrt{Y^\nu Z^\nu - \delta(M^\nu)^2},\\
Y^\nu - Z^\nu - X^\nu &= -2\sqrt{Z^\nu X^\nu - \delta(M^\nu)^2},\\
Z^\nu - X^\nu - Y^\nu &= -2\sqrt{X^\nu Y^\nu - \delta(M^\nu)^2}.
\end{aligned}
$$

Denn hier ist die Summe von zwei linken Seiten negativ, also ist bei höchstens einer der drei Wurzeln das Pluszeichen möglich, und das kann nur bei der größten der drei linken Seiten sein, und das ist bei der getroffenen Anordnung die erste.

Aus der zweiten Gleichung (94) folgt

$$
\begin{aligned}
Y^\nu = Z^\nu + X^\nu - 2\sqrt{Z^\nu X^\nu - \delta(M^\nu)^2} > X^\nu + Z^\nu - 2\sqrt{X^\nu Z^\nu} = \\
= (\sqrt{X^\nu} - \sqrt{Z^\nu})^2.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
(95)\qquad \sqrt{Y^\nu} > \sqrt{X^\nu} - \sqrt{Z^\nu}.
$$

Aus der dritten Gleichung (94) folgt durch die gleiche Rechnung noch einmal dasselbe. Aus der ersten Gleichung (94) folgt im Fall des Pluszeichens

$$
\begin{aligned}
X^\nu = Y^\nu + Z^\nu + 2\sqrt{Y^\nu Z^\nu - \delta(M^\nu)^2} < Y^\nu + Z^\nu + \\
+ 2\sqrt{Y^\nu}\sqrt{Z^\nu} = (\sqrt{Y^\nu} + \sqrt{Z^\nu})^2
\end{aligned}
$$

und jetzt durch Wurzelziehen zum dritten Mal dasselbe. Man hat aber weiter

$$
X^\nu = Y^\nu + Z^\nu + 2\sqrt{Y^\nu Z^\nu} - 2\left(\sqrt{Y^\nu Z^\nu} - \sqrt{Y^\nu Z^\nu - \delta(M^\nu)^2}\right).
$$

Also

$$(\sqrt{Y^\nu} + \sqrt{Z^\nu})^2 = X^\nu + 2\left(\sqrt{Y^\nu Z^\nu} - \sqrt{Y^\nu Z^\nu - \delta(M^\nu)^2}\right)$$

$$= X^\nu + 2\,\frac{\delta(M^\nu)^2}{\sqrt{Y^\nu Z^\nu} + \sqrt{Y^\nu Z^\nu - \delta(M^\nu)^2}} \leqq X^\nu + \frac{2\,\delta(M^\nu)^2}{\sqrt{Y^\nu Z^\nu}}$$

$$\leqq X^\nu + \frac{2\,\delta(M^\nu)^2}{\sqrt{\delta(M^\nu)^2}} = X^\nu + 2\sqrt{\delta(M^\nu)^2}.$$

Es ist daher

$$(\sqrt{Y^\nu} + \sqrt{Z^\nu})^2 \leqq X^\nu + 2\sqrt{\delta(M^\nu)^2}$$

und daraus folgt sofort

$$\sqrt{Y^\nu} + \sqrt{Z^\nu} \leqq \sqrt{X^\nu} + \sqrt{2\sqrt{\delta(M^\nu)^2}},$$

weil bei Annahme des Gegenteils durch Quadrieren ein Widerspruch gegen die vorausgehende Ungleichung entstünde. In Verbindung mit (95) haben wir also das bescheidene Resultat

$$0 < \sqrt{Y^\nu} + \sqrt{Z^\nu} - \sqrt{X^\nu} \leqq \sqrt{2}\,\sqrt[4]{\delta}\,\sqrt{|M^\nu|}. \tag{96}$$

Etwas mehr kommt, wenn in der ersten Formel (94) das Minuszeichen gilt. Dann können wir so schließen:

$$Z^\nu \geqq 2\sqrt{Y^\nu Z^\nu - \delta(M^\nu)^2},$$

$$(Z^\nu)^2 \geqq 4\,Y^\nu Z^\nu - 4\,\delta(M^\nu)^2,$$

$$(Z^\nu)^2 - 4\,Y^\nu Z^\nu + 4(Y^\nu)^2 \geqq 4(Y^\nu)^2 - 4\,\delta(M^\nu)^2.$$

Wenn nun etwa einmal $Y^\nu \leqq \sqrt{\delta}\,|M|^\nu$ sein sollte, so wäre das ein besonderer Glücksfall, weil dann erst recht $Z^\nu \leqq \sqrt{\delta}\,|M^\nu|$ wäre und nach (95) auch $X^\nu \leqq 2\sqrt{\delta}\,|M^\nu|$, und wir wären am Ziel. Wenn aber $Y^\nu > \sqrt{\delta}\,|M^\nu|$ ist, dann kann man in der letzten Formel die Wurzel ziehen und erhält

$$2\,Y^\nu - Z^\nu \geqq 2\sqrt{(Y^\nu)^2 - \delta(M^\nu)^2}, \text{ also}$$

$$Z^\nu \leqq 2\left(Y^\nu - \sqrt{(Y^\nu)^2 - \delta(M^\nu)^2}\right) = \frac{2\,\delta(M^\nu)^2}{Y^\nu + \sqrt{(Y^\nu)^2 - \delta(M^\nu)^2}}$$

$$\leqq \frac{2\,\delta(M^\nu)^2}{Y^\nu} \leqq \frac{2\,\delta(M^\nu)^2}{\sqrt{(\delta M^\nu)^2}},$$

also $Z^\nu \leqq 2\sqrt{\delta}\,|M^\nu|$. Diesmal ist also wenigstens die kleinste Zahl des Tripels X^ν, Y^ν, Z^ν unter einer für alle ν gleichen Schranke. Ich habe mich deshalb bemüht zu beweisen, daß in der ersten Formel (94) stets das Minuszeichen gilt, bis jetzt ohne Erfolg.

§ 6. Weitere Versuche

Die Hauptrekursion I Formel (40) läßt sich, wie dort bemerkt, auch als reine Rekursionsformel für $Q_1^\nu - R_1^\nu\omega$ (oder auch $Q_2^\nu - R_2^\nu\omega$) schreiben. Mit einem Strich mehr sieht sie dann so aus

$$(97)\quad \xi_2^{\nu+1}(Q_1^{\nu+1} - R_1^{\nu+1}\omega) + \frac{\xi_1^{\nu+1}}{\xi_2^{\nu+1}}(Q_1^\nu - R_1^\nu\omega) + \frac{Q_1^{\nu-1} - R_1^{\nu-1}\omega}{\xi_2^\nu\,\xi_2^{\nu+1}} = C.$$

Das legt im Hinblick auf I Formel (37) und (38) die Frage nahe, ob es nicht auch eine Rekursion der Gestalt

$$\begin{aligned}(98)\quad & \xi_2^{\nu+1}(P_1^{\nu+1} - b_1^{\nu+1}S^{\nu+1} + R_1^{\nu+1}A - Q_1^{\nu+1}\omega) + \\ & + \frac{\xi_1^{\nu+1}}{\xi_2^{\nu+1}}(P_1^\nu - b_1^\nu S^\nu + R_1^\nu A - Q_1^\nu\omega) + \\ & + \frac{(P_1^{\nu-1} - b_1^{\nu-1}S^{\nu-1} + R_1^{\nu-1}A - Q_1^{\nu-1}\omega)}{\xi_2^\nu\,\xi_2^{\nu+1}} = \end{aligned}$$

gibt, wo rechts etwas von ν Unabhängiges oder wenigstens etwas Beschränktes steht. Die Terme der ersten Klammer kann man nach der Tabelle (67) von I linear homogen durch $S^{\nu+1}$, $Q_2^{\nu+1}$ und C ausdrücken, also durch V^ν, Ψ^ν, Ω^ν, die der zweiten Klammer ebenso nach Tabelle (66) durch S^ν, Q_1^ν, C, also durch U^ν, Φ^ν, Ω^ν. Die dritte Klammer ist nach I (38) mit $\nu - 1$ Strichen mehr gleich $\xi_2^\nu(P_2^\nu + R_2^\nu A - R_2^\nu\omega^2)$, was man nach Tabelle (66) durch U^ν, Φ^ν, Ω^ν ausdrücken kann. Somit ist die linke Seite der gesuchten Rekursion (98) linear homogen durch U^ν, V^ν, Φ^ν, Ψ^ν, Ω^ν darstellbar, wozu man noch ein Multiplum von $V^\nu - U^\nu - \alpha\,(\Psi^\nu - \Phi^\nu) - \beta\,\Omega^\nu$, was ja nach I (69) gleich 0 ist, hinzufügen kann. Aber ich habe kein Multiplum gefunden, mit dem das Resultat die gewünschte Beschränktheit erkennen ließe.

Es gibt aber einen Zusammenhang mit den K^ν. Nach Tabelle I (66) mit Abkürzungen I (68) ist nämlich

$$P_1^\nu - b_1^\nu S^\nu + R_1^\nu A - Q_1^\nu \omega = U^\nu - 2\Phi^\nu + \Omega^\nu +$$

$$+ \frac{A\omega}{B + A\omega}(\Phi^\nu - \Omega^\nu) - \Phi^\nu = U^\nu - \alpha\Phi^\nu + \frac{B}{B + A\omega}\,\Omega^\nu,$$

also nach (74)

$$P_1^\nu - b_1^\nu S^\nu + R_1^\nu A - Q_1^\nu \omega = K^\nu - \frac{\beta}{2}\,\Omega^\nu + \frac{B}{B + A\omega}\,\Omega^\nu =$$

$$= K^\nu - \frac{1}{2}\,\Omega^\nu = K^\nu - \frac{1}{2}(Q_1^\nu \omega - R_1^\nu \omega^2).$$

Entsprechend auch mit 1 Strich mehr oder weniger. Unsere gesuchte Rekursion (98) wird daher so aussehen:

$$\xi_2^{\nu+1}(P_1^{\nu+1} - b_1^{\nu+1} S^{\nu+1} + R_1^{\nu+1} A - Q_1^{\nu+1}\omega) +$$

$$+ \frac{\xi_1^{\nu+1}}{\xi_2^{\nu+1}}(P_1^\nu - b_1^\nu S^\nu + R_1^\nu A - Q_1^\nu \omega) + \frac{P_1^{\nu-1} - b_1^{\nu-1} + R_1^{\nu-1} A - Q_1^{\nu-1}\omega}{\xi_2^\nu \xi_2^{\nu+1}}$$

$$= \xi_2^{\nu+1} K^{\nu+1} + \frac{\xi_1^{\nu+1}}{\xi_2^{\nu+1}} K^\nu + \frac{K^{\nu-1}}{\xi_2^\nu \xi_2^{\nu+1}} -$$

$$\frac{1}{2}\left[\xi_2^{\nu+1}(Q_1^{\nu+1}\omega - R_1^{\nu+1}\omega^2) + \frac{\xi_1^{\nu+1}}{\xi_2^{\nu+1}}(Q_1^\nu \omega - R_1^\nu \omega^2) + \frac{(Q_1^{\nu-1}\omega - R_1^{\nu-1}\omega^2)}{\xi_2^\nu \xi_2^{\nu+1}}\right].$$

Die letzte Zeile ist nach (97) gleich $-\frac{C\omega}{2}$, also eine Invariante. Aber für die vorausgehende Zeile habe ich noch nichts finden können, was ihre Beschränktheit erkennen ließe.

§ 7. Abschied

Alles, was ich bis jetzt über den Jacobi-Algorithmus in einem kubischen Zahlenkörper ermitteln konnte, beruht letzten Endes auf den Formeln (9) und (10) von I. Diese haben ein Analogon in der Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche für quadratische Irrationalzahlen

$$\xi = \frac{P + \sqrt{D}}{S} \quad \left(D, P, S, \frac{P^2 - D}{S} \text{ ganze Zahlen}\right).$$

Das Analogon besteht, wenn die vollständigen Quotienten mit

$$\xi^\nu = \frac{P^\nu + \sqrt{D}}{S^\nu} \quad \left(P^\nu, S^\nu, \frac{(P^\nu)^2 - D}{S^\nu} \text{ ganze Zahlen}\right)$$

bezeichnet werden, aus den beiden Formeln

$$(P - bS)P' + D = SS', \quad P - bS + P' = 0,$$

oder gleich mit ν Strichen mehr

$$\text{(I)} \qquad (P^\nu - b^\nu S^\nu)P^{\nu+1} + D = S^\nu S^{\nu+1},$$

$$\text{(II)} \qquad P^\nu - b^\nu S^\nu + P^{\nu+1} = 0.$$

Von diesen zwei Formeln ausgehend hat Lagrange, indem er auch die zu ξ und ξ^ν konjugierten Zahlen einführte und die Konvergenz des Kettenbruchs ausnutzte, gezeigt, daß unter den unendlich vielen Paaren ganzer Zahlen P^ν, S^ν nur endlich viele verschiedene sind, und damit war die Periodizität bewiesen. Im Jahr 1953 hat der Portugiese J. Vicente Gonçalves, ohne die konjugierten Zahlen und die Konvergenz des Kettenbruchs zu benutzen, gezeigt, daß aus den Formeln (I) und (II) folgt (Gonçalves [3], [4]):

$$\text{(III)} \qquad |P^{\nu+1}| < \operatorname{Max}\left(|P^\nu|, \sqrt{D}\right),$$

$$\text{(IV)} \qquad |S^{\nu+2}| < \operatorname{Max}\left(|S^\nu|, 2\sqrt{D}\right).$$

Nun folgt aus (III) sofort, daß es nur endlich viele verschiedene P^ν gibt, und dann aus (II), daß es auch nur endlich viele verschiedene S^ν sind. Aus (IV) folgt dagegen sofort, daß es nur endlich viele S^ν gibt, und dann aus (I), daß es auch nur endlich viele verschiedene P^ν sind. Damit hatte man auf einen Schlag zwei neue Periodizitätsbeweise, jeder einfacher als alle vorher bekannten.

Gonçalves hat beim Beweis seiner Ungleichungen (III) und (IV) einige Fallunterscheidungen gemacht. Als ich die Ungleichungen kennenlernte, versuchte ich, es ohne Fallunterscheidungen zu machen und das ging überrraschend gut in wenigen Zeilen (Perron [2]). Dann aber habe ich auch versucht, beim kubischen Körper aus den Formeln (9), (10) von I Analoga zu den Ungleichungen von Gonçalves zu gewinnen, die wohl aus Rekursionen hervorgehen müßten und ungefähr so aussehen könnten:

$$|P_i^{\nu+1}| < \mathrm{Max}\,(|P_i^\nu|,\ a|J|),$$
$$|S^{\nu+3}| < \mathrm{Max}\,(|S^\nu|,\ |S^{\nu+1}|,\ |S^{\nu+2}|,\ a|J|),$$

wo a eine (vielleicht sehr große) Konstante und J die Invariante ist, die auch in den oft gebrauchten Schrankensetzern C, Ω^ν, M^ν steckt. Das ist mir trotz allem, was ich inzwischen zu den Formeln (9), (10) hinzugelernt habe, nicht gelungen. Nun aber muß ich mein Problem jüngeren Kräften überlassen, die sich wohl dafür interessieren. Mich zwingt meine fortschreitende Erblindung im Verein mit dem Immer-kleiner-Werden von allem sonst vielleicht einmal hilfreichem Gedrucktem, jetzt meine Feder aus der Hand zu legen.

Literatur

[1] Perron, O.: Der Jacobi'sche Kettenalgorithmus in einem kubischen Zahlenkörper. Diese Sitzungsber. 1971, 13–49.

[2] Perron, O.: Neue Periodizizätsbeweise für die regelmäßigen und halbregelmäßigen Kettenbrüche quadratischer Irrationalzahlen. Diese Sitzungsber. 1954, 321–333.

[3] Conçalves, J. Vicente: Curso de Algebra superior, I. parte, 3. ediçao. Lisboa 1953.

[4] Gonçalves, J. Vicente: Sur les fractions continues réelles. Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa, 2. serie – A – Vol. 2 (1953, S. 297–333).

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1974

Band/Volume: 1973

Autor(en)/Author(s): Perron Oskar

Artikel/Article: Der Jacobi'sche Kettenalgorithmus in einem kubischen Zahlenkörper 9-22