BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1973

MÜNCHEN 1974

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Verallgemeinerung eines Satzes von F. RIESZ

Von **V. Mammitzsch** und **H. Richter** in München

Vorgelegt am 2. 2. 1973

In [4] findet sich folgender

Satz von Riesz: Bei $p > 1$ sind für beschränkte reelle Funktionen $F(x)$ auf R^1 die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) Für beliebige $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$ gilt

$$\sum_{i=1}^{m} |F(x_i) - F(x_{i-1})|^p / (x_i - x_{i-1})^{p-1} \leq 1.$$

(b) $F(x) = \int\limits_{-\infty} f(y)\, dy + \text{const.}$, wo $f(y)$ eine Bairesche Funktion ist mit $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^p\, dy \leq 1$.

Diesen Satz kann man maßtheoretisch folgendermaßen deuten: Gegeben ist der Maßraum $(X_0, \mathfrak{K}_0, P_0)$ mit $X_0 = R^1$, $\mathfrak{K}_0 =$ Gesamtheit der Borelschen Mengen des R^1, P_0 ist das Lebesgue-Maß; die Setzung $Q_0(K) := \int\limits_K f(y)\, dy$ für jedes K aus $\mathfrak{K}_0$ liefert ein beschränktes allgemeines Maß auf $\mathfrak{K}_0$. Dabei ist P_0 atomlos. Wir gehen von dieser Interpretation aus und untersuchen, inwieweit der Satz übertragbar ist, wenn wir statt $(X_0, \mathfrak{K}_0, P_0)$ einen beliebigen Maßraum $(X, \mathfrak{K}, P)$ mit σ-finitem P und anstelle von Q_0 ein allgemeines Maß Q auf $\mathfrak{K}$ mit Werten in einem Banachraum B zulassen, dessen Norm mit $\|\,.\,\|$ bezeichnet werde. Hierbei wollen wir uns der Einfachheit halber auf normierte Maße P beschränken, was keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Entsprechend der Beschränktheit von Q_0 werden wir jetzt verlangen, daß

$$|Q|(K) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} \|Q(K_i)\| : K_i \in \mathfrak{K} \text{ disjunkt}, \right.$$
$$\left. K = \bigcup_{1}^{m} K_i;\, m \in N \right\}$$

endlich ist für alle $K \in \mathfrak{K}$. (Bekanntlich ist $|Q|$ ein Maß auf $\mathfrak{K}$.) Außerdem soll B die Bochner-Taylor-Bedingung $(\boldsymbol{D})$ erfüllen (vgl. [1], S. 915); d. h. jede Abbildung des Einheitsintervalls nach B mit endlicher $\operatorname{Var} F := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} \|F(x_i) - F(x_{i-1})\| : 0 < x_0 < \ldots < x_m = 1;\ m \in N \right\}$ besitzt Lebesgue- fast überall eine (starke) Ableitung. Eine Charakterisierung sowie Beispiele derartiger Banachräume findet sich in [2]; insbesondere genügt jeder reflexive Banachraum, also auch der R^1 (versehen mit der euklidischen Norm) dieser Bedingung.

Satz 1: Seien $(X, \mathfrak{K}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsfeld mit atomfreiem P und B ein Banachraum mit der Eigenschaft $(\boldsymbol{D})$, sowie $p > 1$ und $c > 0$ reelle Konstante, dann sind für (allgemeine) Maße Q auf $\mathfrak{K}$ mit Werten in B und $|Q|(X) < \infty$ die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) Für beliebige disjunkte $X_1, \ldots, X_m$ aus $\mathfrak{K}$ mit $P(X_i) > 0$ ist

$$\sum_{i=1}^{m} \|Q(X_i)\|^p / P(X_i)^{p-1} \leq c.$$

(b) $Q(K) = \int_K f(x)\, dP$ für alle $K \in \mathfrak{K}$, wo $f\colon X \to B$ P-integrabel ist mit $\int_X \|f(x)\|^p\, dP \leq c$.

Beweis: I. Aus (a) folgt (b).

1. Sei $P(K) = 0$ für ein $K \in \mathfrak{K}$, dann gibt es wegen der Atomlosigkeit von P zu jedem $\varepsilon > 0$ ein zu K disjunktes K_1 aus $\mathfrak{K}$ mit $0 < P(K_1) < \varepsilon$. Die Anwendung von (a) auf K_1 und $K \cup K_1$ liefert

$$\|Q(K_1)\| \leq c^{1/p} \cdot \varepsilon^{(p-1)/p} \quad \text{und} \quad \|Q(K) + Q(K_1)\| \leq c^{1/p} \cdot \varepsilon^{(p-1)/p},$$

woraus $\|Q(K)\| \leq 2 c^{1/p} \cdot \varepsilon^{(p-1)/p}$ folgt. Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, was $Q(K) = 0$ liefert. Q ist also totalstetig bezüglich P; wegen der Eigenschaft $(\boldsymbol{D})$ ist das gleichwertig mit $dQ = f\, dP$ für passendes P-integrables f (vgl. [2]).

2. Zu vorgegebenem δ mit $0 < \delta \leq 1$ gibt es eine elementare Funktion $f_\delta\colon X \to B$ derart, daß $\|f_\delta(x) - f(x)\| < \delta^2$ für P-fast alle x aus X gilt. Dabei sei

$$f_\delta(x) = y_{\delta j} \in B \text{ auf } X_{\delta j} \in \mathfrak{K}\ (j \in N),$$

wo die $X_{\delta j}$ disjunkt sind mit $\bigcup_i X_{\delta j} = X$. Setzt man

$X_\delta := \{x : \|f(x)\| > 3\,\delta\}$ und $Y_{\delta j} := X_\delta \cap X_{\delta j}$ mit $\bigcup_j Y_{\delta j} = X_\delta$,

so gelten für $x \in Y_{\delta j}$ und das zugehörige $y_{\delta j}$ die Abschätzungen

$$\|y_{\delta j}\| - \delta^2 < \|f(x)\| < \|y_{\delta j}\| + \delta^2 \text{ und } 3\,\delta < \|f(x)\|,$$

was

$$\|y_{\delta j}\| > 3\,\delta - \delta^2 \geq 2\,\delta \text{ und } \|y_{\delta j}\| - \delta^2 > \delta$$

nach sich zieht. Weiter findet man

$$\begin{aligned}\|Q(Y_{\delta j})\| &= \Big\|\int_{Y_{\delta j}} f_\delta\, dP - \int_{Y_{\delta j}} (f_\delta - f)\, dP\Big\| \\ &\geq \Big\|\int_{Y_{\delta j}} f_\delta\, dP\Big\| - \int_{Y_{\delta j}} \|f - f_\delta\|\, dP \\ &\geq (\|y_{\delta j}\| - \delta^2)\, P(Y_{\delta j}).\end{aligned}$$

Umgekehrt ist

$$\int_{Y_{\delta j}} \|f\|^p\, dP \leq \int_{Y_{\delta j}} (\|y_{\delta j}\| + \delta^2)^p\, dP = (\|y_{\delta j}\| + \delta^2)^p\, P(Y_{\delta j}),$$

woraus wegen $(\|y_{\delta j}\| + \delta^2)/(\|y_{\delta j}\| - \delta^2) \leq 1 + \dfrac{2\,\delta^2}{\delta} = 1 + 2\,\delta$ im Fall $P(Y_{\delta j}) > 0$ folgt:

$$\int_{Y_{\delta j}} \|f\|^p\, dP \leq (1 + 2\,\delta)^p\, \|Q(Y_{\delta j})\|^p / P(Y_{\delta j})^{p-1}.$$

Bedeutet Σ', daß nur über Glieder mit $P(Y_{\delta j}) > 0$ summiert werden soll, so ist für alle $k \in N$

$$\begin{aligned}\sum_{j \leq k} \int_{Y_{\delta j}} \|f\|^p\, dP &\leq (1 + 2\,\delta)^p \sum_{j \leq k}{}' \|Q(Y_{\delta j})\|^p / P(Y_{\delta j})^{p-1} \\ &\leq (1 + 2\,\delta)^p \cdot c,\end{aligned}$$

also bei $k \to \infty$ unter Beachtung von $\|f\| \leq 3\,\delta$ auf $X \setminus X_\delta$

$$\int_{X_\delta} \|f\|^p\, dP + \int_{X \setminus X_\delta} \|f\|^p\, dP \leq (1 + 2\,\delta)^p \cdot c + (3\,\delta)^p$$

für alle $0 < \delta \leq 1$. Bei $\delta \to 0$ folgt daraus schließlich

$$\int_X \|f\|^p\, dP \leq c.$$

II. Aus (b) folgt (a).

Sei f gegeben mit $\int\limits_X \|f\|^p \, dP \leq c$ und $Q(K) = \int\limits_K f \, dP$ für alle $K \in \mathfrak{K}$. Seien ferner $X_1, \ldots, X_m$ disjunkt, dann gilt wegen der Hölder-Ungleichung

$$\|Q(X_i)\| \leq \int\limits_{X_i} \|f\| \cdot 1 \, dP \leq (\int\limits_{X_i} \|f\|^p \, dP)^{1/p} \cdot P(X_i)^{(p-1)/p}.$$

Mit derselben Σ'-Konvention wie in I folgt daraus

$$\sum_{i=1}^{m}{}' \|Q(X_i)\|^p / P(X_i)^{p-1} \leq \int\limits_X \|f\|^p \, dP \leq c,$$

womit alles gezeigt ist.

Bemerkung 1: Aus II geht hervor, daß (a) aus (b) ohne jede Voraussetzung bezüglich B und P folgt.

Bemerkung 2: Falls B reflexiv ist, folgt die Behauptung in I aus [3].

Bei der Betrachtung des vorstehenden Beweises fällt auf, daß die aus dem Rieszschen Satz übernommene Atomlosigkeit von P nur im Beweisteil I.1 benutzt wird. Wir wollen nun klären, inwieweit diese Voraussetzung abgeschwächt werden kann.

Satz 2: Hat das Wahrscheinlichkeitsmaß P die (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) disjunkten P-Atome $A_1, A_2, \ldots$ und ist $B \neq \{0\}$ ein Banachraum mit der Eigenschaft ($\boldsymbol{D}$), so ist die in Satz 1 ausgesprochene Äquivalenz richtig, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(α) Jedes $K \in \mathfrak{K}$ mit $K \neq \varnothing$ ist die Vereinigung einiger der A_i.

(β) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein K_ε aus $\mathfrak{K}$ mit $0 < P(K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Sind umgekehrt (α) und (β) beide verletzt, so gibt es ein Maß Q_0 mit Werten in B, welches (a), aber nicht (b) erfüllt.

Beweis: I. Hinreichen jeder der beiden Bedingungen.

Fall (α): Q auf $\mathfrak{K}$ ist festgelegt durch die Werte von $Q(A_i)$, so daß wegen $P(A_i) > 0$ trivialerweise gilt $f(x) = Q(A_i)/P(A_i)$ für alle x aus A_i ($i = 1, 2 \ldots$).

Fall (β): Im Beweisteil I.1 von Satz 1 nehme man für K_1 die Menge $K_\varepsilon \setminus K$ mit $0 < P(K_\varepsilon \setminus K) < \varepsilon$.

II. Gegenbeispiel, wenn (α) und (β) beide verletzt sind.

Da (α) nicht gilt, gibt es ein $K_0 \in \mathfrak{K}$, das nicht Vereinigung von gewissen A_i ist. Dann kann aber $K_0 \cap A_i$ nicht für alle i gleich A_i oder $\varnothing$ sein. Es gibt also ein A_j mit $\varnothing \neq K_0 \cap A_j \subsetneqq A_j$, woraus folgt

$$K' := K_0 \cap A_j \neq \varnothing \text{ und } K'' := A_j \setminus K_0 \neq \varnothing .$$

Wegen $K' \cup K'' = A_j$, $K' \cup K'' = \varnothing$ und weil A_j ein P-Atom ist, hat man $P(K') = 0$ oder $P(K'') = 0$. Also gilt:

(*) Es gibt ein $K_1 \neq \varnothing$ mit $P(K_1) = 0$.

Wegen der Verletzung von (β) findet man ein $\delta > 0$, so daß

(**) $P(K) = 0$ oder $P(K) \geq \delta$ für alle $K \in \mathfrak{K}$; $\delta > 0$.

Es sei nun $x_1 \in K_1$, $y_1 \in B$ mit $\|y_1\| = 1$, und es bezeichne $1_K(x)$ die Indikatorfunktion von K, dann ist $Q(K) := \delta^{(p-1)/p} \cdot c^{1/p} \cdot 1_K(x_1) y_1$ ein Maß auf $(X, \mathfrak{K})$ mit Werten in B und $\|Q(K)\| \leq |Q|(K) \leq \delta^{(p-1)/p} \cdot c^{1/p} < \infty$. Bei disjunkten $X_1, \ldots, X_m$ mit $P(X_i) > 0$ ist $\|Q(X_i)\| > 0$ für höchstens eines der X und damit wegen (**)

$$\sum_1^m \|Q(X_i)\|^p / P(X_i)^{p-1} \leq \delta^{p-1} c / \delta^{p-1} = c .$$

Damit ist die Bedingung (a) von Satz 1 erfüllt, aber Q ist nicht totalstetig bezüglich P wegen $P(K_1) = 0$ und $Q(K_1) \neq 0$, womit auch Satz 2 bewiesen ist.

Zum Abschluß sollen noch die Bedingungen bezüglich des Banachraums B auf ihre Notwendigkeit hin untersucht werden. Im Fall $B = \{0\}$ sind (a) und (b) aus Satz 1 automatisch erfüllt, ganz gleich, wie das Maß P aussieht. Um auch Aussagen über die Notwendigkeit von (***D***) machen zu können, zerlegen wir P in seinen atomlosen und strikt atomaren Anteil und finden

Satz 3: Sei $P = P_1 + P_2$, wobei P_1 atomfrei und P_2 strikt atomar, ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(X, \mathfrak{K})$ und $B \neq \{0\}$ ein Banachraum, dann gilt:

(i) Falls $P_1 \equiv 0$, so ist Satz 2 auch ohne die Voraussetzung von ($\boldsymbol{D}$) richtig.

(ii) Falls $P_1 \not\equiv 0$ und die Bedingung ($\boldsymbol{D}$) verletzt ist, gibt es ein Maß Q_0 mit Werten in B, für welches die Äquivalenzaussage von Satz 1 nicht zutrifft.

Beweis: Man beachte, daß zum Beweis von Satz 2 die Voraussetzung ($\boldsymbol{D}$) nur benutzt wird, um aus der Totalstetigkeit von Q bezüglich P auf die Existenz einer Dichte f mit $dQ = f\,dP$ zu schließen.

Nun gilt:

(i) bei strikt atomaren P mit den disjunkten P-Atomen A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ und für jedes Q mit Werten in B, welches bezüglich P totalstetig ist, liefert die Setzung $f(x) := Q(A_i)/P(A_i)$ auf A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ eine gesuchte Dichte, womit die erste Behauptung gezeigt ist.

(ii) Im Fall $P_1 \not\equiv 0$ ist gemäß [2] die Bedingung ($\boldsymbol{D}$) äquivalent mit der Existenz einer P-Dichte für jedes B-wertige, bezüglich P totalstetige Maß Q mit $|Q|(X) < \infty$. Gilt ($\boldsymbol{D}$) nicht, so gibt es also ein Maß Q_1 mit Werten in B derart, daß

(*) $Q_1(K) = 0$ für alle $K \in \mathfrak{K}$ mit $P(K) = 0$ und $|Q_1|(X) < \infty$,

wozu jedoch keine P-Dichte existiert.

Aus (*) folgt nun für das (nicht negative) Maß $|Q_1|$

$|Q_1|(K) = 0$ für alle $K \in \mathfrak{K}$ mit $P(K) = 0$ und $|Q_1|(X) < \infty$,

also nach dem Satz von Radon-Nikodym

$$d|Q_1| = f_1\,dP, \text{ wobei } f_1 \geq 0 \text{ gewählt werde.}$$

Mit Hilfe von f_1 zerlegen wir $X = \bigcup_{n \in N} Z_n$, wo $Z_n := \{x : n - 1 \leq f_1 < n\}$ disjunkt, und bilden auf $\mathfrak{K}$ die Maße

$$Q^n(K) := Q_1(Z_n \cap K) \text{ für alle } K \in \mathfrak{K},\ n \in N.$$

Es gilt $\sum_{n \in N} Q^n = Q_1$ mit orthogonalen Q^n. Weil es für Q_1 keine P-Dichte gibt, existiert mindestens ein $Q^{n_0} =: Q_0$, das ebenfalls keine P-Dichte besitzt. Die Bedingung (b) aus Satz 1 ist für Q_0 somit verletzt.

Dagegen hat man für alle $K \in \mathfrak{K}$ mit $P(K) > 0$

$$\begin{aligned} \|Q_0(K)\| \leq |Q_0|(K) = |Q_1|(K \cap Z_{n_0}) = \int_{K \cap Z_{n_0}} f_1 \, dP. \\ \leq \int_{K \cap Z_{n_0}} n_0 \, dP \leq n_0 \cdot P(K), \end{aligned}$$

also mit unserer Summenkonvention

$$\sum_{i=1}^{m}{}' \|Q_0(K_i)\|^p / P(K_i)^{p-1} \leq \sum_{i=1}^{m} n_0^p \, P(K_i) \leq n_0^p =: c;$$

was zeigt, daß die Bedingung (a) von Satz 1 erfüllt ist. Damit haben wir auch die zweite Behauptung von Satz 3 nachgewiesen.

Herrn Dr. J. Batt, der uns bei der Abfassung dieser Arbeit durch kritische Bemerkungen sehr unterstützt hat, möchten wir an dieser Stelle unseren besten Dank abstatten.

Literatur:

[1] Bochner-Taylor: Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions. Ann. of Math. (2) **39**, 913–44 (1938).

[2] Chatterji, S. D.: Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces. Math. Scand. **22**, 21–41 (1968).

[3] Phillips, R. S.: On weakly compact subsets of a Banach space. Amer. J. of Math. **65**, 108–136 (1943).

[4] Riesz, F.: Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Ann. **69**, 449–497 (1910).