

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1973

MÜNCHEN 1974

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Holomorphe Vervollständigung metrisierbarer lokalkonvexer Räume

Von Martin Schottenloher in München

Vorgelegt von Karl Stein am 2. März 1973

**Einleitung:** Nach einem Beispiel von Noverraz [6] gibt es lokalkonvexe Räume  $E$  über  $\mathbf{C}$  mit der Eigenschaft, daß sich nicht jede analytische Funktion  $f: E \rightarrow \mathbf{C}$  auf die Vervollständigung  $\hat{E}$  von  $E$  analytisch fortsetzen läßt. Stattdessen kann man jedoch einen eindeutig bestimmten maximalen Untervektorraum  $E_\theta$  von  $\hat{E}$  finden, derart, daß jede analytische Funktion  $f: E \rightarrow \mathbf{C}$  eine analytische Fortsetzung nach  $E_\theta$  besitzt (vgl. Dineen [2]).  $E_\theta$  heißt die *holomorphe Vervollständigung* (oder *holomorph-vollständige Hülle*) von  $E$ , und  $E$  heißt *holomorph-vollständig*, falls  $E = E_\theta$  gilt. Ein Beispiel von Hirschowitz [4, S. 413] zeigt, daß nicht jeder normierte Raum holomorph-vollständig ist.

In dieser Note werden einige Eigenschaften der holomorphen Vervollständigung metrisierbarer Räume mit Hilfe von Methoden aus [8] bewiesen. Insbesondere wird für metrisierbare lokalkonvexe Räume  $E$  und  $F$  gezeigt, daß jede analytische Abbildung  $f: E \rightarrow F$  eine analytische Fortsetzung  $f_\theta: E_\theta \rightarrow F_\theta$  besitzt. Diese Aussage verallgemeinert Resultate von Hirschowitz [5, S. 284] und Dineen [3]. Außerdem wird  $E_\theta \times F_\theta = (E \times F)_\theta$  für den metrisierbaren Fall bewiesen.

1. In diesem Abschnitt sollen zunächst einige Definitionen und bereits bekannte Ergebnisse über die holomorphe Vervollständigung bereitgestellt werden.

$E$  und  $F$  seien lokalkonvexe Hausdorffräume über dem Körper  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen, und  $\text{cs}(E)$  sei die Menge der stetigen Seminormen von  $E$  nach  $\mathbf{R}$ . Eine Abbildung  $P: E \rightarrow F$  heißt *homogenes Polynom  $n$ -ten ( $n \in \mathbf{N}$ ) Grades*, wenn es eine  $n$ -lineare Abbildung  $\tilde{P}: E^n \rightarrow F$  so gibt, daß  $P = \tilde{P} \cdot \Delta_n$  für die Diagonalbildung  $\Delta_n: E \ni a \mapsto (a, a, \dots, a) \in E^n$  gilt. *Polynome  $n$ -ten Grades* sind die konstanten Abbildungen von  $E$  nach  $F$ .

Mit  $\mathbf{P}^n(E, F)$  wird der Raum der homogenen Polynome  $n$ -ten Grades bezeichnet. Statt  $P(a)$  für  $P \in \mathbf{P}^n(E, F)$  und  $a \in E$  wird auch  $P \cdot a$  geschrieben. Ohne Mühe läßt sich zeigen:

**1.1. Lemma:**  $1^\circ$  Ein Polynom  $P \in \mathbf{P}^n(E, F)$  ist genau dann stetig, wenn  $P$  in  $0 \in E$  stetig ist, und das ist gleichbedeutend mit der folgenden Aussage: Für alle  $\beta \in \text{cs}(F)$  existiert ein  $\alpha \in \text{cs}(E)$  mit  $\|P\|^{\alpha, \beta} := \sup \{\beta \circ P(a) \mid a \in E \text{ und } \alpha(a) \leq 1\} < \infty$ .

$2^\circ$  Jedes stetige Polynom  $P \in \mathbf{P}^n(E, F)$  besitzt eine stetige Fortsetzung  $\hat{P} \in \mathbf{P}^n(\hat{E}, \hat{F})$ .

Für eine offene Menge  $U \subset E$  und  $\alpha \in \text{cs}(E)$  ist die  $\alpha$ -Randdistanz  $d_U^\alpha(x)$  eines Punktes  $x \in U$  definiert durch

$d_U^\alpha(x) := \sup \{r \mid r \in \mathbf{R} \text{ und } x + a \in U \text{ für alle } a \in E, \alpha(a) < r\}$ .  $d_U^\alpha: U \rightarrow \mathbf{R}$  ist stetig, denn für  $y \in U$ ,  $\alpha(x - y) < d_x^\alpha(x)$  gilt:  $|d_U^\alpha(x) - d_U^\alpha(y)| \leq \alpha(x - y)$ .

**1.2. Definition:** Sei  $U \subset E$  offen. Eine Abbildung  $f: U \rightarrow F$  heißt *analytisch* (oder *holomorph*) in  $U$ , wenn es zu jedem  $x \in U$  eine Folge  $(d^n f(x))$  stetiger homogener Polynome  $d^n f(x) \in \mathbf{P}^n(E, F)$  so gibt, daß für alle  $\beta \in \text{cs}(F)$  ein  $\alpha \in \text{cs}(E)$  existiert mit

$d_U^\alpha(x) > 1$  und  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\alpha(a) < 1} \beta(f(x + a) - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} d^n f(x) \cdot a) = 0$ .

Jede analytische Abbildung  $f: U \rightarrow F$  ist stetig. Genauer gilt: Eine Abbildung  $f: U \rightarrow F$  ist genau dann analytisch, wenn  $f$  stetig ist, und wenn alle Restriktionen  $f|_{E_1 \cap U}: E_1 \cap U \rightarrow F$  für endlichdimensionale affine Teilräume  $E_1 \subset E$  analytisch sind [1].

Sei  $f: U \rightarrow F$  analytisch und seien  $x \in U, a \in E \setminus \{0\}$  mit  $x + \lambda a \in U$  für alle  $\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| \leq 1$ . Dann gilt aufgrund der klassischen Cauchyschen Integralformel:

$$\frac{1}{n!} d^n f(x) \cdot a = \int_0^1 f(x + e^{2\pi i t} a) e^{-2\pi i n t} dt.$$

Für alle  $a \in E$  und  $n \in \mathbf{N}$  ist daher  $d_a^n f: U \ni x \mapsto d^n f(x) \cdot a \in F$  analytisch. Ferner gibt es zu jedem  $x \in U$  und  $\beta \in \text{cs}(F)$  ein  $\alpha \in \text{cs}(E)$  und ein  $r > 0$  mit  $\sum_{n \geq 0} \left\| \frac{1}{n!} d^n f(x) \right\|^{\alpha, \beta} r^n < \infty$ .

Im Falle  $F = \mathbf{C}$  ist der  $\alpha$ -Konvergenzradius  $\varrho_f^\alpha(x)$  von  $f$  im Punkte  $x \in U$  ( $\alpha \in \text{cs}(E)$ ) definiert durch:

$$\varrho_f^\alpha(x) := \sup \left\{ r \mid r \in \mathbf{R} \text{ und } \sum_{n \geq 0} \left\| \frac{1}{n!} d^n f(x) \right\|^\alpha r^n < \infty \right\},$$

wobei jetzt  $\left\| \frac{1}{n!} d^n f(x) \right\|^\alpha := \sup \left\{ \left\| \frac{1}{n!} d^n f(x) \cdot a \right\| \mid \alpha(a) \leq 1 \right\}$ .

**1.3. Lemma:** Sei  $f: U \rightarrow \mathbf{C}$  analytisch. Dann gilt:

1° Für alle  $x \in U$  gibt es  $\alpha \in \text{cs}(E)$  mit  $\varrho_f^\alpha(x) > 0$ .

2° Es ist  $\varrho_f^\alpha(y) \geq \varrho_f^\alpha(x) - \alpha(x - y)$  für alle  $y \in E$  mit  $\alpha(x - y) \leq \min \{ \varrho_f^\alpha(x), d_V^\alpha(x) \}$  und daher  $|\varrho_f^\alpha(x) - \varrho_f^\alpha(y)| \leq \alpha(x - y)$ .

Insbesondere ist  $\varrho_f^\alpha: U \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  gleichmäßig stetig in der von  $E$  induzierten uniformen Struktur.

*Beweis:* 1° folgt unmittelbar aus dem Vorangehenden. 2° läßt sich wie im normierten Fall beweisen [8].

Obwohl eine analytische Funktion auf  $E$  sich im allgemeinen nicht auf ganz  $\hat{E}$  analytisch fortsetzen läßt, wie in der Einleitung erwähnt wurde, kann man zeigen:

**1.4. Satz:** [2]: Zu jeder analytischen Funktion  $f: E \rightarrow \mathbf{C}$  gibt es ein  $E$  enthaltendes Gebiet  $\Omega_f \subset \hat{E}$ , das Existenzgebiet einer analytischen Funktion  $\check{f}: \Omega_f \rightarrow \mathbf{C}$  mit  $\check{f}|_E = f$  ist.

*Beweis:*  $\Omega_f$  wird folgendermaßen konstruiert: Die nach 1.3.2° gleichmäßig stetige Funktion  $\varrho_f^\alpha: E \rightarrow [0, \infty]$  hat eine eindeutig bestimmte gleichmäßig stetige Fortsetzung  $\hat{\varrho}_f^\alpha: \hat{E} \rightarrow [0, \infty]$ . Es sei  $\Omega_f := \{y \in \hat{E} \mid \text{Es gibt } \alpha \in \text{cs}(E) \text{ mit } \hat{\varrho}_f^\alpha(y) > 0\}$ .  $\Omega_f$  ist offen als Vereinigung von offenen Mengen und zusammenhängend, da sich jeder Punkt  $y \in \Omega_f$  mit einem Punkt der zusammenhängenden Menge  $E \subset \Omega_f$  verbinden läßt. Für jedes  $x \in E$  hat  $d^n f(x)$  nach 1.1.2° eine stetige Fortsetzung  $\check{d}^n f(x)$  auf  $\hat{E}$ .

Nach Definition von  $\varrho_f^\alpha$  konvergiert  $\check{f}(x + a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \check{d}^n f(x) \cdot a$  gleichmäßig für  $\alpha(a) < \varrho_f^\alpha(x)$ ,  $a \in \hat{E}$ , und definiert daher eine analytische Funktion  $\check{f}: \Omega_f \rightarrow \mathbf{C}$ .  $\Omega_f$  ist Existenzgebiet von  $\check{f}$ , da  $\hat{\varrho}_f^\alpha = \varrho_f^\alpha = 0$  außerhalb  $\Omega_f$  für alle  $\alpha \in \text{cs}(E) \cong \text{cs}(\hat{E})$  gilt.

Im folgenden sei  $H(U, F)$  der Vektorraum der analytischen Abbildungen von  $U$  nach  $F$  versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz. Statt  $H(U, \mathbf{C})$  wird auch  $H(U)$  geschrieben ( $U$  und  $F$  wie in 1.2).

**1.5. Satz [2]:**  $E_\theta := \bigcap \{\Omega_f \mid f \in H(E)\}$  ist ein Vektorraum mit den folgenden Eigenschaften:

1°  $E \subset E_\theta$  und zu jeder Funktion  $f \in H(E)$  existiert eine Funktion  $g \in H(E_\theta)$  mit  $g|_E = f$ .

2° Sei  $E_1$  ein Untervektorraum von  $\hat{E}$  mit  $E \subset E_1$  und der Eigenschaft: Zu jedem  $f \in H(E)$  gibt es  $h \in H(E_1)$  mit  $h|_E = f$ . Dann gilt  $E_1 \subset E_\theta$ .

*Beweis:* Für  $a \in E$  sei  $f_a: E \ni x \mapsto f(x - a) \in \mathbf{C}$ . Dann gilt offenbar  $\Omega_{f_a} = a + \Omega_f$ . Für  $b \in E_\theta$  ist  $a \in b + a + \Omega_f = b + \Omega_{f_a}$ , also gilt  $E \subset b + \Omega_f$  für alle  $f \in H(E)$ . Daher ist  $f_b: E \ni x \mapsto \check{f}(x - b) \in \mathbf{C}$  wohldefiniert und analytisch, und es folgt:  $E_\theta = \bigcap \{\Omega_f \mid f \in H(E)\} = \bigcap \{\Omega_{f_b} \mid f \in H(E)\} = b + \bigcap \{\Omega_f \mid f \in H(E)\} = b + E_\theta$ . Deshalb ist  $E_\theta + E_\theta = E_\theta$  und analog  $\lambda E_\theta = E_\theta$  für  $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ .

1° gilt nur mit  $g := \check{f}|_{E_\theta}$  (vgl. 1.4) und 2° ergibt sich aus  $E_1 \subset \Omega_f$  für alle  $f \in H(E)$ .

2. Zur weiteren Beschreibung von Eigenschaften der holomorphen Vervollständigung eines lokalkonvexen Raumes benötigen wir die Begriffe der regulären Klasse und der zulässigen Überdeckung [8].

**2.1. Definition:** Sei  $\Omega$  ein Gebiet im lokalkonvexen Hausdorffraum  $E$ . Eine offene Überdeckung  $\mathfrak{B}$  von  $\Omega$  heißt zulässig, wenn gilt:

1° Zu jedem  $U \in \mathfrak{B}$  gibt es  $\alpha \in cs(E)$ ,  $s \in \mathbf{R}_+$  und  $V \in \mathfrak{B}$  mit  $\inf \{d_\Omega^\alpha(x) \mid x \in U\} > s$  und  $\{y \in E \mid \text{Es gibt } x \in U \text{ mit } \alpha(x - y) < s\} \subset V$ .

2°  $U \cup V \in \mathfrak{B}$  für alle  $U, V \in \mathfrak{B}$ .

Für eine zulässige Überdeckung  $\mathfrak{B}$  von  $\Omega$  sei  $A_{\mathfrak{B}} := \{f \in H(\Omega) \mid \|f\|_U < \infty \text{ für alle } U \in \mathfrak{B}\}$ , wobei  $\|f\|_U := \sup \{|f(x)| \mid x \in U\}$ .  $A_{\mathfrak{B}}$  versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen  $U \in \mathfrak{B}$  ist eine vollständige lokalkonvexe Algebra. Ferner ist  $A_{\mathfrak{B}}$  eine „reguläre Klasse“ im folgenden Sinne:

**2.2. Lemma:** Für jede zulässige Überdeckung  $\mathfrak{B}$  von  $\Omega$  gilt:

1°  $d_a^n f \in A_{\mathfrak{B}}$  für alle  $f \in A_{\mathfrak{B}}$ ,  $n \in \mathbf{N}$  und  $a \in E$ .

2° Zu jedem Punkt  $x \in \Omega$  gibt es eine Seminorm  $\alpha \in \text{cs}(E)$  mit:  $\varrho_{\mathfrak{B}}^{\alpha}(x) := \inf \{ \varrho_f^{\alpha}(x) \mid f \in A_{\mathfrak{B}} \} > 0$  (vgl. [8, 2.7]).

Sei  $\omega(\Omega)$  das gerichtete System der zulässigen und abzählbaren Überdeckungen von  $\Omega$ . ( $\mathfrak{B} < \mathfrak{B}'$  genau dann, wenn  $\mathfrak{B}'$  Verfeinerung von  $\mathfrak{B}$  ist.)  $A_{\mathfrak{B}}$  ist Fréchetalgebra, falls  $\mathfrak{B} \in \omega(\Omega)$ . Für metrisierbare Räume  $E$  ist  $H(\Omega) = \bigcup \{ A_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \in \omega(\Omega) \}$ . Ist  $f \in H(\Omega)$ , so gehört eine geeignete Verfeinerung  $\mathfrak{B}$  von  $(\{x \in \Omega \mid |f(x)| < n\} \mid n \in \mathbf{N})$  zu  $\omega(\Omega)$ , so daß  $f \in A_{\mathfrak{B}}$ . Allgemein heißt  $E$  ein  $\omega$ -Raum [2], wenn die Bedingung  $H(E) = \bigcup \{ A_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \in \omega(E) \}$  erfüllt ist. Wie in [8, 3.7] läßt sich zeigen:

**2.3. Lemma:** Sei  $\Omega$  ein Gebiet des metrisierbaren lokalkonvexen Raumes  $E$ . Dann ist  $H(\Omega)_{\mathfrak{B}} := \lim_{\mathfrak{B} \in \omega(\Omega)} \text{ind } A_{\mathfrak{B}}$  der zu  $H(\Omega)$  assoziierte bornologische Raum.

Ebenfalls überträgt sich der folgende Satz vom Typ Cartan-Thullen (vgl. [8, 4.7]):

**2.4. Satz:** Sei  $\Omega$  ein Gebiet im lokalkonvexen Hausdorffraum  $E$  und sei  $\mathfrak{B} \in \omega(\Omega)$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1° Die Funktionen aus  $A_{\mathfrak{B}}$  lassen sich nicht simultan in ein  $\Omega$  echt umfassendes Gebiet analytisch fortsetzen (auch wenn nicht-schlichte Gebiete zugelassen sind).

2° Es gilt für alle  $x \in \Omega$  und alle  $\alpha \in \text{cs}(E)$ : Aus  $d_{\Omega}^{\alpha}(x) > 0$  folgt  $d_{\Omega}^{\alpha}(x) \geq \varrho_{\mathfrak{B}}^{\alpha}(x)$ .

3° Zu jeder Folge  $(x_n)$  aus  $\Omega$  mit  $d_{\Omega}^{\alpha}(x_n) \rightarrow 0$  für alle  $\alpha \in \text{cs}(E)$  gibt es eine Funktion  $f \in A_{\mathfrak{B}}$  mit  $\sup |f(x_n)| = \infty$ .

Von grundlegender Bedeutung ist der folgende Satz:

**2.5. Satz:** Sei  $E$  metrisierbar,  $\mathfrak{B} \in \omega(E)$  und  $E_1$  ein Unterraum von  $\hat{E}$ . Sei  $\Omega \subset E_1$  ein Gebiet mit  $E \subset \Omega$ , in das sich jedes  $f \in A_{\mathfrak{B}}$  fortsetzen läßt: Für alle  $f \in A_{\mathfrak{B}}$  existiert  $\check{f} \in H(\Omega)$  mit  $\check{f}|_E = f$ . Dann gibt es eine zulässige Überdeckung  $\mathfrak{B}' \in \omega(\Omega)$  mit  $A_{\mathfrak{B}'} = \{ \check{f} \mid f \in A_{\mathfrak{B}} \}$ , und die Restriktionsabbildung  $A_{\mathfrak{B}'} \ni g \mapsto g|_E \in A_{\mathfrak{B}}$  ist ein Isomorphismus von Frécheträumen.

*Beweis:* Sei  $x \in \Omega$ . Dann ist  $\hat{x}: A_{\mathfrak{B}} \ni f \mapsto f(x) \in \mathbf{C}$  stetig. Es gibt nämlich eine Folge  $(x_n)$  aus  $E$  mit  $x_n \rightarrow x$ , das bedeutet  $\hat{x}_n(f) \rightarrow \hat{x}(f)$  für alle  $f \in A_{\mathfrak{B}}$ . Nach dem Satz von Banach-Steinhaus [7, S. 86] ist  $\hat{x}$  stetig, da natürlich alle  $\hat{x}_n$  stetig sind. Also

existieren eine Konstante  $C \in \mathbf{R}$  und ein  $U \in \mathfrak{B}$  mit  $|\hat{x}(f)| \leq C \|f\|_U$  für alle  $f \in A_{\mathfrak{B}}$ . Diese Ungleichung gilt auch für alle Potenzen von  $f$ ; es kann deshalb  $C = 1$  gesetzt werden. Wir zeigen jetzt:

(1) Es gibt eine Umgebung  $W \subset \Omega$  von  $x$  und ein  $V \in \mathfrak{B}$ , so daß  $|\hat{y}(f)| \leq \|f\|_V$  für alle  $y \in W$  und alle  $f \in A_{\mathfrak{B}}$ .

Zu  $U$  gibt es zunächst  $\alpha, s, V$  wie in der Definition 2.1.1°. Aus 2.2.1° folgt  $|\hat{x}(d_a^n f)| \leq \|d_a^n f\|_U$  für  $a \in E$ , und aus der Cauchy-Integralformel ergibt sich  $\left\| \frac{1}{n!} d_a^n f \right\|_U \leq \|f\|_V$ , falls  $\alpha(a) \leq R$ ,  $0 < R < s$ . Also gilt  $\left\| \frac{1}{n!} d^n \check{f}(x) \right\|^\alpha \leq R^{-n} \|f\|_V$  und daher  $|\hat{y}(f)| = \left| \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} d^n \check{f}(x) \cdot (y - x) \right| \leq \|f\|_V$  für  $y \in \Omega$ ,  $\alpha(y - x) < R$ . Damit ist (1) bewiesen.

Nun sei  $(\alpha_k)_{k \in \mathbf{N}}$  eine aufsteigende Folge von stetigen Seminormen auf  $E$ , die die Topologie von  $E$  definiert. Für  $U \in \mathfrak{B}$  und  $n, k \in \mathbf{N}$  sei  $V_n^k(U)$  der offene Kern der Menge  $\{x \in \Omega \mid d_\Omega^{\alpha_k}(x) > 2^{-n} \text{ und } |\hat{y}(f)| \leq \|f\|_U \text{ für alle } y \in \Omega, \alpha_k(y - x) < 2^{-n}, \text{ und alle } f \in A_{\mathfrak{B}}\}$ . Das System  $\check{\mathfrak{B}}$  aller endlichen Vereinigungen solcher  $V_n^k(U)$  ist wegen (1) eine offene Überdeckung von  $\Omega$ . Aus der Definition der  $V_n^k(U)$  ergibt sich weiter, daß  $\check{\mathfrak{B}} \in \omega(\Omega)$  gilt. Es bleibt  $A_{\check{\mathfrak{B}}} = \{\check{f} \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\}$  zu zeigen. Dazu sei  $f \in A_{\mathfrak{B}}$  und  $V_n^k(U) \in \check{\mathfrak{B}}$ . Offenbar gilt

$$(2) \quad \|\check{f}\|_{V_n^k(U)} \leq \|f\|_U.$$

Sei umgekehrt  $g \in A_{\check{\mathfrak{B}}}$  und  $U \in \mathfrak{B}$ . Es gibt  $\alpha, s, V$  wie in 2.1.1° und es ist  $\alpha \leq \alpha_k$  und  $2^{-n} < s$  für geeignete  $n, k \in \mathbf{N}$ . Es folgt

$$(3) \quad \|g\|_E \|U \leq \|g\|_{V_n^k(U)},$$

also  $A_{\check{\mathfrak{B}}} = \{\check{f} \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\}$ . Die Restriktion  $A_{\check{\mathfrak{B}}} \rightarrow A_{\mathfrak{B}}$  ist deshalb bijektiv; daß sie offen und stetig ist, läßt sich aus (2) und (3) ablesen.

Für eine zulässige Überdeckung  $\mathfrak{B}$  von  $E$  ist  $\varrho_{\mathfrak{B}}^\alpha$  wieder gleichmäßig stetig; es gelten die entsprechenden Ungleichungen wie in 1.3.2°. Also gibt es eine stetige Fortsetzung  $\hat{\varrho}_{\mathfrak{B}}^\alpha: \hat{E} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ . Mit Hilfe des letzten Satzes läßt sich in Analogie zu 1.4 zeigen:

**2.6. Satz:** Sei  $E$  metrisierbar und  $\mathfrak{B} \in \omega(E)$ . Dann ist das Gebiet  $\Omega_{\mathfrak{B}} \subset \hat{E}$ ,  $\Omega_{\mathfrak{B}} := \{y \in \hat{E} \mid \text{Es gibt } \alpha \in \text{cs}(E) \text{ mit } \hat{\rho}_{\mathfrak{B}}^{\alpha}(y) > 0\}$ , die maximale simultane analytische Fortsetzung von  $A_{\mathfrak{B}}$ , und es gilt  $\Omega_{\mathfrak{B}} = \bigcap \{\Omega_f \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\}$ .

*Beweis:* Nach Definition von  $\Omega_{\mathfrak{B}}$  gilt  $d_{\Omega}^{\alpha}(x) \geq \rho_{\mathfrak{B}}^{\alpha}(x)$  (vgl. 1.3.2°) für  $x \in \Omega$ , und mit  $\mathfrak{B} := \check{\mathfrak{B}}$  ( $\check{\mathfrak{B}}$  wie in 2.5) folgt  $\rho_{\mathfrak{B}}^{\alpha} = \hat{\rho}_{\check{\mathfrak{B}}}^{\alpha}$ . Die erste Aussage des Satzes ergibt sich nun aus 2.4.

$\Omega_{\mathfrak{B}} \subset \bigcap \{\Omega_f \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\}$  gilt unmittelbar. Zu  $x \notin \Omega_{\mathfrak{B}}$  gibt es eine Folge  $(x_n)$  aus  $\Omega_{\mathfrak{B}}$  mit  $x_n \rightarrow x$  und daher nach 2.4 ein  $g \in A_{\mathfrak{B}}$  mit  $\sup |g(x_n)| = \infty$ . Mit  $f := g|_E \in A_{\mathfrak{B}}$  folgt  $x \notin \Omega_f$ , also  $x \notin \bigcap \{\Omega_f \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\}$ .

**2.7. Korollar:**  $E_{\Theta} = \bigcap \{\Omega_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \in \omega(E)\}$ .

**2.8. Korollar:** Die Restriktion  $r: H(E_{\Theta})_b \rightarrow H(E)_b$  ist ein Isomorphismus von lokalkonvexen Räumen.

*Beweis:* Offenbar ist  $r$  stetig. Zu  $\mathfrak{B} \in \omega(E)$  gibt es nach 2.5 eine Überdeckung  $\check{\mathfrak{B}} \in \omega(E_{\Theta})$ , so daß die Restriktion  $A_{\check{\mathfrak{B}}} \rightarrow A_{\mathfrak{B}}$  topologisch ist. Also ist  $A_{\mathfrak{B}} \rightarrow A_{\check{\mathfrak{B}}} \rightarrow H(E_{\Theta})_b$  und damit nach 2.3 auch  $r^{-1}$  stetig.

**2.9. Korollar:** Für jede kompakte Menge  $\mathcal{B} \subset H(E)$  (kompakt in der Topologie der kompakten Konvergenz) ist  $r|_{r^{-1}(\mathcal{B})}: r^{-1}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$  topologisch.

*Beweis:* Das Korollar folgt unmittelbar aus 2.8 unter Berücksichtigung der Tatsache, daß  $H(E)$  für metrisierbare  $E$  ein Semi-Montelraum ist.

Zum Schluß dieses Abschnitts eine Charakterisierung der holomorph-vollständigen metrisierbaren Räume (vgl. [2]):

**2.10. Satz:** Die folgenden Aussagen sind für einen metrisierbaren lokalkonvexen Raum  $E$  äquivalent:

- 1°  $E$  ist holomorph-vollständig (i.e.  $E = E_{\Theta}$ ).
- 2° Zu jeder Cauchyfolge  $(x_n)$  aus  $E$  ohne Häufungspunkt in  $E$  gibt es eine analytische Funktion  $f: E \rightarrow \mathbf{C}$  mit  $\sup |f(x_n)| = \infty$ .
- 3° Für jede präkompakte Menge  $K \subset E$  mit  $\|f\|_K < \infty$  für alle  $f \in H(E)$  gilt:  $\hat{K} := \{x \in E \mid |f(x)| \leq \|f\|_K \text{ für alle } f \in H(E)\}$  ist kompakt in  $E$ .



*Beweis:*  $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ . Sei  $(x_n)$  eine Folge aus  $E$  mit  $x_n \rightarrow x \in \hat{E} \setminus E_\theta$ . Dann gilt  $x \notin \Omega_{\mathfrak{B}}$  für ein  $\mathfrak{B} \in \omega(E)$  (2.7). Also gibt es nach 2.5 und 2.4 eine Funktion  $f \in A_{\mathfrak{B}}$  mit  $\sup |f(x_n)| = \infty$ .

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ .  $\hat{K}$  liegt in der abgeschlossenen konvexen Hülle von  $K$  in  $E$ , die kompakt ist. Wäre  $\hat{K}$  nicht kompakt, so gäbe es eine Folge  $(x_n)$  aus  $K$  mit  $x_n \rightarrow x \notin E$ . Nach  $2^\circ$  gibt es dann eine Funktion  $f \in H(E)$  mit  $\sup |f(x_n)| = \infty \leq \|f\|_K$ . Widerspruch!

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ . Sei  $x \in E_\theta$ . Da  $E$  in  $E_\theta$  dicht liegt, gibt es eine Folge  $(x_n)$  aus  $E$  mit  $x_n \rightarrow x$ .  $K := \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$  erfüllt die Voraussetzungen in  $3^\circ$ , also ist  $\hat{K} \subset E$  kompakt, und es folgt  $x \in \hat{K} \subset E$ .

3. Es werden jetzt vektorwertige analytische Abbildungen betrachtet.

**3.1. Satz:** *Sei  $E$  metrisierbar und  $F$  folgenvollständig. Dann hat jede analytische Abbildung  $f: E \rightarrow F$  eine analytische Fortsetzung  $\check{f}: E_\theta \rightarrow F$ .*

*Beweis:* Sei zunächst  $F$  vollständig. Die Abbildung  $f^*: F'_c \rightarrow H(E): v \mapsto v \circ f$ , ist stetig, wenn mit  $F'_c$  der Dualraum  $F'$  von  $F$  mit der Topologie der kompakten Konvergenz bezeichnet wird. Für gleichstetige Mengen  $H \subset F'_c$  ist folglich  $f^*(H)$  relativkompakt und  $r^{-1}: f^*(H) \rightarrow r^{-1}(f^*(H))$  stetig nach 2.9. Jede Auswertungsabbildung  $\hat{x}: H(E_\theta) \ni g \mapsto g(x) \in \mathbf{C}$ ,  $x \in E_\theta$ , ist stetig. Zusammenfassend ist also  $\hat{x} \circ r^{-1} \circ f^*|_H: H \rightarrow \mathbf{C}$  für alle gleichstetigen Mengen  $H \subset F'$  stetig. Aus dem Vollständigkeitsatz von Grothendieck [7, S. 148] folgt:  $\hat{x} \circ r^{-1} \circ f^*: F' \rightarrow \mathbf{C}$  ist schwach stetig und bestimmt daher ein Element  $\check{f}(x)$  aus  $F$ . Offenbar ist  $\check{f}: E_\theta \ni x \mapsto \check{f}(x) \in F$  eine analytische Fortsetzung von  $f$ , der Satz ist also für vollständige Räume  $F$  bewiesen. Sei jetzt  $F$  folgenvollständig und  $i: F \rightarrow \hat{F}$  die natürliche Inklusion.  $i \circ f$  hat dann eine analytische Fortsetzung  $i \circ \check{f}: E_\theta \rightarrow \hat{F}$ , und es gilt  $i \circ \check{f}(E_\theta) \subset F$ , da  $E$  dicht in  $E_\theta$  liegt.

Für metrisierbare Bildräume  $F$  kann der Fortsetzungssatz noch folgendermaßen verschärft werden:

**3.2. Satz.** *Jede analytische Abbildung  $f: E \rightarrow F$  zwischen metrisierbaren lokalkonvexen Räumen hat eine analytische Fortsetzung  $f_\theta: E_\theta \rightarrow F_\theta$ .*

*Beweis:* Nach 3.1 gibt es eine analytische Fortsetzung  $i\delta f: E_\theta \rightarrow F$  von  $i\delta f$ , wenn  $i: F \rightarrow \hat{F}$  wieder die natürliche Inklusion bezeichnet. Sei  $x \in E_\theta$  und  $(x_n)$  eine Folge aus  $E$  mit  $x_n \rightarrow x$ . Wäre  $i\delta f(x) \notin F_\theta$ , so gäbe es nach 2.10 eine analytische Funktion  $g: F_\theta \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\sup |g \circ i \circ f(x_n)| = \infty$ , und  $g \circ i \circ f \in H(E)$  ließe sich nicht analytisch nach  $E_\theta$  fortsetzen. Widerspruch! Also ist  $i\delta f(E_\theta) \subset F_\theta$  für jede analytische Abbildung  $f: E \rightarrow F$ , woraus folgt, daß die Restriktion  $f_\theta: E_\theta \rightarrow F_\theta$  von  $i\delta f$  analytisch ist.

Eine weitere Anwendung von Satz 3.1 ergibt das folgende Resultat:

**3.3. Satz:** *Für metrisierbare lokalkonvexe Räume  $E$  und  $F$  gilt  $E_\theta \times F_\theta = (E \times F)_\theta$ .*

*Beweis:*  $(E \times F)_\theta \subset E_\theta \times F_\theta$  läßt sich zeigen, ohne daß von der Metrisierbarkeit Gebrauch gemacht werden muß: Sei  $(a, b) \notin E_\theta \times F_\theta$ , etwa  $a \notin E_\theta$ . Es gibt  $f \in H(E)$  mit  $a \notin \Omega_f$  (1.5). Die triviale Fortsetzung  $\tilde{f}: E_\theta \times \hat{F} \ni (x, y) \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$  erfüllt  $\Omega_{\tilde{f}} = \Omega_f \times \hat{F}$ , also ist  $(a, b) \notin (E \times F)_\theta$ , und  $(E \times F)_\theta \subset E_\theta \times F_\theta$  ist bewiesen. Es bleibt nach 1.5 zu zeigen, daß sich jede Funktion  $f \in H(E \times F)$  nach  $E_\theta \times F_\theta$  analytisch fortsetzen läßt. Aus der Produktformel  $H(E \times F) = H(E, H(F))$  [9] ergibt sich mit Hilfe von 3.1, daß sich  $f$  zunächst zu einer analytischen Funktion  $f_1$  auf  $E_\theta \times F$  fortsetzen läßt.  $f_1$  läßt sich dann wegen  $H(E_\theta \times F) = H(F, H(E_\theta))$  auf  $E_\theta \times F_\theta$  analytisch fortsetzen.

#### Literatur:

- [1] Bochnak, J.-Siciak, J.: Analytic functions in topological vector spaces. *Studia Math.* 39, 77-112 (1971).
- [2] Dineen, S.: Holomorphically complete locally convex topological vector spaces. Erscheint im *Sém. Lelong*.
- [3] Dineen, S.: Holomorphic functions on locally convex topological vector spaces III. Handgeschriebenes Manuskript.
- [4] Hirschowitz, A.: Sur les suites de fonctions analytiques. *Ann. Inst. Fourier* 20, 403-413 (1970).
- [5] Hirschowitz, A.: Prolongement analytique en dimension infinie. *Ann. Inst. Fourier* 22, 255-292 (1972).

- [6] Noverraz, P.: Sur le théorème de Cartan-Thullen-Oka en dimension infinie. *Erscheint in An. Acad. Bras. Ciências.*
- [7] Schaefer, H. H.: *Topological vector spaces.* New York: Macmillan 1966.
- [8] Schottenloher, M.: Über analytische Fortsetzung in Banachräumen. *Math. Ann* **199**, 313–336 (1972).
- [9] Schottenloher, M.:  $\varepsilon$ -product and continuation of analytic mappings. *Erscheint in Colloque d'Analyse, Rio de Janeiro 1972, Hermann, Paris.*

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1974

Band/Volume: [1973](#)

Autor(en)/Author(s): Schottenloher Martin

Artikel/Article: [Holomorphe Vervollständigung metrisierbarer lokalkonvexer Räume 57-66](#)