BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1973

MÜNCHEN 1974

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Holomorphe Vervollständigung metrisierbarer lokalkonvexer Räume

Von **Martin Schottenloher** in München

Vorgelegt von Karl Stein am 2. März 1973

Einleitung: Nach einem Beispiel von Noverraz [6] gibt es lokalkonvexe Räume E über $\boldsymbol{C}$ mit der Eigenschaft, daß sich nicht jede analytische Funktion $f: E \to \boldsymbol{C}$ auf die Vervollständigung $\hat{E}$ von E analytisch fortsetzen läßt. Stattdessen kann man jedoch einen eindeutig bestimmten maximalen Untervektorraum E_Θ von $\hat{E}$ finden, derart, daß jede analytische Funktion $f: E \to \boldsymbol{C}$ eine analytische Fortsetzung nach E_Θ besitzt (vgl. Dineen [2]). E_Θ heißt die *holomorphe Vervollständigung* (oder *holomorph-vollständige Hülle*) von E, und E heißt *holomorph-vollständig*, falls $E = E_\Theta$ gilt. Ein Beispiel von Hirschowitz [4, S. 413] zeigt, daß nicht jeder normierte Raum holomorph-vollständig ist.

In dieser Note werden einige Eigenschaften der holomorphen Vervollständigung metrisierbarer Räume mit Hilfe von Methoden aus [8] bewiesen. Insbesondere wird für metrisierbare lokalkonvexe Räume E und F gezeigt, daß jede analytische Abbildung $f: E \to F$ eine analytische Fortsetzung $f_\Theta: E_\Theta \to F_\Theta$ besitzt. Diese Aussage verallgemeinert Resultate von Hirschowitz [5, S. 284] und Dineen [3]. Außerdem wird $E_\Theta \times F_\Theta = (E \times F)_\Theta$ für den metrisierbaren Fall bewiesen.

1. In diesem Abschnitt sollen zunächst einige Definitionen und bereits bekannte Ergebnisse über die holomorphe Vervollständigung bereitgestellt werden.

E und F seien lokalkonvexe Hausdorffräume über dem Körper $\boldsymbol{C}$ der komplexen Zahlen, und $\mathrm{cs}(E)$ sei die Menge der stetigen Seminormen von E nach $\boldsymbol{R}$. Eine Abbildung $P: E \to F$ heißt *homogenes Polynom n-ten* ($n \in \boldsymbol{N}$) *Grades*, wenn es eine n-lineare Abbildung $\check{P}: E^n \to F$ so gibt, daß $P = \check{P} \cdot \Delta_n$ für die Diagonalbildung $\Delta_n : E \ni a \mapsto (a, a, \ldots, a) \in E^n$ gilt. *Polynome* 0-*ten Grades* sind die konstanten Abbildungen von E nach F.

Mit $\boldsymbol{P}^n(E, F)$ wird der Raum der homogenen Polynome n-ten Grades bezeichnet. Statt $P(a)$ für $P \in \mathbf{P}^n(E, F)$ und $a \in E$ wird auch $P \cdot a$ geschrieben. Ohne Mühe läßt sich zeigen:

1.1. Lemma: 1° *Ein Polynom $P \in \boldsymbol{P}^n(E, F)$ ist genau dann stetig, wenn P in $0 \in E$ stetig ist, und das ist gleichbedeutend mit der folgenden Aussage: Für alle $\beta \in$* cs(F) *existiert ein* $\alpha \in$ cs(E) *mit* $\| P \|^{\alpha,\beta} := \sup \{\beta \circ P(a) \mid a \in E$ und $\alpha(a) \leq 1\} < \infty$.

2° *Jedes stetige Polynom $P \in \boldsymbol{P}^n(E, F)$ besitzt eine stetige Fortsetzung $\hat{P} \in \boldsymbol{P}^n(\hat{E}, \hat{F})$.*

Für eine offene Menge $U \subset E$ und $\alpha \in$ cs(E) ist die α-*Randdistanz* $d_U^\alpha(x)$ eines Punktes $x \in U$ definiert durch

$d_U^\alpha(x) := \sup \{r \mid r \in \boldsymbol{R}$ und $x + a \in U$ für alle $a \in E$, $\alpha(a) < r\}$. $d_U^\alpha : U \to \bar{\boldsymbol{R}}$ ist stetig, denn für $y \in U$, $\alpha(x - y) < d_X^\alpha(x)$ gilt: $| d_U^\alpha(x) - d_U^\alpha(y) | \leq \alpha(x - y)$.

1.2. *Definition:* Sei $U \subset E$ offen. Eine Abbildung $f : U \to F$ heißt *analytisch* (oder *holomorph*) in U, wenn es zu jedem $x \in U$ eine Folge $(d^n f(x))$ stetiger homogener Polynome $d^n f(x) \in \boldsymbol{P}^n(E, F)$ so gibt, daß für alle $\beta \in$ cs(F) ein $\alpha \in$ cs(E) existiert mit

$$d_U^\alpha(x) > 1 \text{ und } \lim_{N \to \infty} \sup_{\alpha(a) < 1} \beta\Big(f(x + a) - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} d^n f(x) \cdot a\Big) = 0.$$

Jede analytische Abbildung $f : U \to F$ ist stetig. Genauer gilt: Eine Abbildung $f : U \to F$ ist genau dann analytisch, wenn f stetig ist, und wenn alle Restriktionen $f|_{E_1 \cap U} : E_1 \cap U \to F$ für endlichdimensionale affine Teilräume $E_1 \subset E$ analytisch sind [1].

Sei $f : U \to F$ analytisch und seien $x \in U$, $a \in E \setminus \{0\}$ mit $x + \lambda a \in U$ für alle $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $| \lambda | \leq 1$. Dann gilt aufgrund der klassischen Cauchyschen Integralformel:

$$\frac{1}{n!} d^n f(x) \cdot a = \int_0^1 f(x + e^{2\pi i t} a)\, e^{-2\pi i n t}\, dt.$$

Für alle $a \in E$ und $n \in \boldsymbol{N}$ ist daher $d_a^n f : U \ni x \mapsto d^n f(x) \cdot a \in F$ analytisch. Ferner gibt es zu jedem $x \in U$ und $\beta \in$ cs(F) ein $\alpha \in$ cs(E) und ein $r > 0$ mit $\sum_{n \geq 0} \left\| \frac{1}{n!} d^n f(x) \right\|^{\alpha,\beta} r^n < \infty$.

Im Falle $F = \boldsymbol{C}$ ist der α-*Konverganzradius* $\varrho_f^\alpha(x)$ von f im Punkte $x \in U$ $(\alpha \in$ cs$(E))$ definiert durch:

$$\varrho_f^\alpha(x) := \sup\left\{r \mid r \in \mathbf{R} \text{ und } \sum_{n \geq 0} \left\|\frac{1}{n!} d^n f(x)\right\|^\alpha r^n < \infty\right\},$$

wobei jetzt $\left\|\frac{1}{n!} d^n f(x)\right\|^\alpha := \sup\left\{\left|\frac{1}{n!} d^n f(x) \cdot a\right| \mid \alpha(a) \leq 1\right\}$.

1.3. Lemma: *Sei $f: U \to \mathbf{C}$ analytisch. Dann gilt:*

1° *Für alle $x \in U$ gibt es $\alpha \in \mathrm{cs}\,(E)$ mit $\varrho_f^\alpha(x) > 0$.*

2° *Es ist $\varrho_f^\alpha(y) \geq \varrho_f^\alpha(x) - \alpha(x-y)$ für alle $y \in E$ mit $\alpha(x-y) \leq \min\,\{\varrho_f^\alpha(x),\ d_U^\alpha\,(x)\}$ und daher $|\varrho_f^\alpha(x) - \varrho_f^\alpha(y)| \leq \alpha(x-y)$.*

Insbesondere ist $\varrho_f^\alpha: U \to \bar{\mathbf{R}}$ gleichmäßig stetig in der von E induzierten uniformen Struktur.

Beweis: 1° folgt unmittelbar aus dem Vorangehenden. 2° läßt sich wie im normierten Fall beweisen [8].

Obwohl eine analytische Funktion auf E sich im allgemeinen nicht auf ganz $\hat{E}$ analytisch fortsetzen läßt, wie in der Einleitung erwähnt wurde, kann man zeigen:

1.4. Satz: [2]: *Zu jeder analytischen Funktion $f: E \to \mathbf{C}$ gibt es ein E enthaltendes Gebiet $\Omega_f \subset \hat{E}$, das Existenzgebiet einer analytischen Funktion $\check{f}: \Omega_f \to \mathbf{C}$ mit $\check{f}|_E = f$ ist.*

Beweis: Ω_f wird folgendermaßen konstruiert: Die nach 1.3.2° gleichmäßig stetige Funktion $\varrho_f^\alpha: E \to [0, \infty]$ hat eine eindeutig bestimmte gleichmäßig stetige Fortsetzung $\hat{\varrho}_f^\alpha: \hat{E} \to [0, \infty]$. Es sei $\Omega_f := \{y \in \hat{E} \mid$ Es gibt $\alpha \in \mathrm{cs}(E)$ mit $\hat{\varrho}_f^\alpha(y) > 0\}$. Ω_f ist offen als Vereinigung von offenen Mengen und zusammenhängend, da sich jeder Punkt $y \in \Omega_f$ mit einem Punkt der zusammenhängenden Menge $E \subset \Omega_f$ verbinden läßt. Für jedes $x \in E$ hat $d^n f(x)$ nach 1.1.2° eine stetige Fortsetzung $\check{d}^n f(x)$ auf $\hat{E}$. Nach Definition von ϱ_f^α konvergiert $\check{f}(x+a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \check{d}^n f(x) \cdot a$ gleichmäßig für $\alpha(a) < \varrho < \varrho_f^\alpha(x)$, $a \in \hat{E}$, und definiert daher eine analytische Funktion $\check{f}: \Omega_f \to \mathbf{C}$. Ω_f ist Existenzgebiet von $\check{f}$, da $\hat{\varrho}_{\check{f}}^\alpha = \varrho_{\check{f}}^\alpha = 0$ außerhalb Ω_f für alle $\alpha \in \mathrm{cs}(E) \cong \mathrm{cs}(\hat{E})$ gilt.

Im folgenden sei $H\,(U, F)$ der Vektorraum der analytischen Abbildungen von U nach F versehen mit der *Topologie der kompakten Konvergenz*. Statt $H(U, \mathbf{C})$ wird auch $H(U)$ geschrieben (U und F wie in 1.2).

1.5. Satz [2]: *$E_\Theta := \bigcap \{\Omega_f \mid f \in H(E)\}$ ist ein Vektorraum mit den folgenden Eigenschaften:*

1° *$E \subset E_\Theta$ und zu jeder Funktion $f \in H(E)$ existiert eine Funktion $g \in H(E_\Theta)$ mit $g|_E = f$.*

2° *Sei E_1 ein Unterverktorraum von $\hat{E}$ mit $E \subset E_1$ und der Eigenschaft: Zu jedem $f \in H(E)$ gibt es $h \in H(E_1)$ mit $h|_E = f$. Dann gilt $E_1 \subset E_\Theta$.*

Beweis: Für $a \in E$ sei $f_a: E \ni x \mapsto f(x - a) \in \mathbf{C}$. Dann gilt offenbar $\Omega_{f_a} = a + \Omega_f$. Für $b \in E_\Theta$ ist $a \in b + a + \Omega_f = b + \Omega_{f_a}$, also gilt $E \subset b + \Omega_f$ für alle $f \in H(E)$. Daher ist f_b: $E \ni x \mapsto \check{f}(x - b) \in \mathbf{C}$ wohldefiniert und analytisch, und es folgt: $E_\Theta = \bigcap \{\Omega_f \mid f \in H(E)\} = \bigcap \{\Omega_{f_b} \mid f \in H(E)\} = b + \bigcap \{\Omega_f \mid f \in H(E)\} = b + E_\Theta$. Deshalb ist $E_\Theta + E_\Theta = E_\Theta$ und analog $\lambda E_\Theta = E_\Theta$ für $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

1° gilt nur mit $g := \check{f} \mid E_\Theta$ (vgl. 1.4) und 2° ergibt sich aus $E_1 \subset \Omega_f$ für alle $f \in H(E)$.

2. Zur weiteren Beschreibung von Eigenschaften der holomorphen Vervollständigung eines lokalkonvexen Raumes benötigen wir die Begriffe der *regulären Klasse* und der *zulässigen Überdeckung* [8].

2.1. *Definition:* Sei Ω ein Gebiet im lokalkonvexem Hausdorffraum E. Eine offene Überdeckung $\mathfrak{V}$ von Ω heißt *zulässig*, wenn gilt:

1° Zu jedem $U \in \mathfrak{V}$ gibt es $\alpha \in \mathrm{cs}(E)$, $s \in \mathbf{R}_+$ und $V \in \mathfrak{V}$ mit $\inf \{d_\Omega^\alpha(x) \mid x \in U\} > s$ und $\{y \in E \mid \text{Es gibt } x \in U \text{ mit } \alpha(x - y) < s\} \subset V$.

2° $U \cup V \in \mathfrak{V}$ für alle $U, V \in \mathfrak{V}$.

Für eine zulässige Überdeckung $\mathfrak{V}$ von Ω sei $A_\mathfrak{V} := \{f \in H(\Omega) \mid \|f\|_U < \infty$ für alle $U \in \mathfrak{V}\}$, wobei $\|f\|_U := \sup \{|f(x)| \mid x \in U\}$. $A_\mathfrak{V}$ versehen mit der *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen* $U \in \mathfrak{V}$ ist eine vollständige lokalkonvexe Algebra. Ferner ist $A_\mathfrak{V}$ eine „*reguläre Klasse*" im folgenden Sinne:

2.2. Lemma: Für jede zulässige Überdeckung $\mathfrak{V}$ von Ω gilt:

1° $d_a^n f \in A_\mathfrak{V}$ für alle $f \in A_\mathfrak{V}$, $n \in N$ und $a \in E$.

2° Zu jedem Punkt $x \in \Omega$ gibt es eine Seminorm $\alpha \in cs(E)$ mit: $\varrho_{\mathfrak{V}}^{\alpha}(x) := \inf \{\varrho_f^{\alpha}(x) \mid f \in A_{\mathfrak{V}}\} > 0$ (vgl. [8, 2.7]).

Sei $\omega(\Omega)$ das gerichtete System der zulässigen und abzählbaren Überdeckungen von Ω. ($\mathfrak{V} < \mathfrak{W}$ genau dann, wenn $\mathfrak{V}$ Verfeinerung von $\mathfrak{W}$ ist.) $A_{\mathfrak{V}}$ ist Fréchetalgebra, falls $\mathfrak{V} \in \omega(\Omega)$. Für metrisierbare Räume E ist $H(\Omega) = \bigcup \{A_{\mathfrak{V}} \mid \mathfrak{V} \in \omega(\Omega)\}$. Ist $f \in H(\Omega)$, so gehört eine geeignete Verfeinerung $\mathfrak{V}$ von $(\{x \in \Omega \mid |f(x)| < n\} \mid n \in \boldsymbol{N})$ zu $\omega(\Omega)$, so daß $f \in A_{\mathfrak{V}}$. Allgemein heißt E ein *ω-Raum* [2], wenn die Bedingung $H(E) = \bigcup \{A_{\mathfrak{V}} \mid \mathfrak{V} \in \omega(E)\}$ erfüllt ist. Wie in [8, 3.7] läßt sich zeigen:

2.3. Lemma: *Sei Ω ein Gebiet des metrisierbaren lokalkonvexen Raumes E. Dann ist $H(\Omega)_b := \varinjlim_{\mathfrak{V} \in \omega(\Omega)} A_{\mathfrak{V}}$ der zu $H(\Omega)$ assoziierte bornologische Raum.*

Ebenfalls überträgt sich der folgende Satz vom Typ Cartan-Thullen (vgl. [8, 4.7]):

2.4. Satz: *Sei Ω ein Gebiet im lokalkonvexen Hausdorffraum E und sei $\mathfrak{W} \in \omega(\Omega)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1° *Die Funktionen aus $A_{\mathfrak{W}}$ lassen sich nicht simultan in ein Ω echt umfassendes Gebiet analytisch fortsetzen (auch wenn nichtschlichte Gebiete zugelassen sind).*

2° *Es gilt für alle $x \in \Omega$ und alle $\alpha \in cs(E)$: Aus $d_{\Omega}^{\alpha}(x) > 0$ folgt $d_{\Omega}^{\alpha}(x) \geq \varrho_{\mathfrak{W}}^{\alpha}(x)$.*

3° *Zu jeder Folge (x_n) aus Ω mit $d_{\Omega}^{\alpha}(x_n) \to 0$ für alle $\alpha \in cs(E)$ gibt es eine Funktion $f \in A_{\mathfrak{W}}$ mit* $\sup |f(x_n)| = \infty$.

Von grundlegender Bedeutung ist der folgende Satz:

2.5. Satz: *Sei E metrisierbar, $\mathfrak{V} \in \omega(E)$ und E_1 ein Unterraum von $\hat{E}$. Sei $\Omega \subset E_1$ ein Gebiet mit $E \subset \Omega$, in das sich jedes $f \in A_{\mathfrak{V}}$ fortsetzen läßt: Für alle $f \in A_{\mathfrak{V}}$ existiert $\check{f} \in H(\Omega)$ mit $\check{f}|_E = f$. Dann gibt es eine zulässige Überdeckung $\check{\mathfrak{V}} \in \omega(\Omega)$ mit $A_{\check{\mathfrak{V}}} = \{\check{f} \mid f \in A_{\mathfrak{V}}\}$, und die Restriktionsabbildung $A_{\check{\mathfrak{V}}} \ni g \mapsto g|_E \in A_{\mathfrak{V}}$ ist ein Isomorphismus von Frécheträumen.*

Beweis: Sei $x \in \Omega$. Dann ist $\hat{x}$: $A_{\mathfrak{V}} \ni \hat{f} \mapsto f(x) \in \boldsymbol{C}$ stetig. Es gibt nämlich eine Folge (x_n) aus E mit $x_n \to x$, das bedeutet $\hat{x}_n(f) \to \hat{x}(f)$ für alle $f \in A_{\mathfrak{V}}$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus [7, S. 86] ist $\hat{x}$ stetig, da natürlich alle $\hat{x}_n$ stetig sind. Also existieren eine Konstante $C \in \boldsymbol{R}$ und ein $U \in \mathfrak{B}$ mit $|\hat{x}(f)| \leq C \|f\|_U$ für alle $f \in A_{\mathfrak{B}}$. Diese Ungleichung gilt auch für alle Potenzen von f; es kann deshalb $C = 1$ gesetzt werden. Wir zeigen jetzt:

(1) Es gibt eine Umgebung $W \subset \Omega$ von x und ein $V \in \mathfrak{B}$, so daß $|\hat{y}(f)| \leq \|f\|_V$ für alle $y \in W$ und alle $f \in A_{\mathfrak{B}}$.

Zu U gibt es zunächst α, s, V wie in der Definition 2.1.1°. Aus 2.2.1° folgt $|\hat{x}(d_a^n f)| \leq \|d_a^n f\|_U$ für $a \in E$, und aus der Cauchy-Integralformel ergibt sich $\left\|\frac{1}{n!} d_a^n f\right\|_U \leq \|f\|_V$, falls $\alpha(a) \leq R$, $0 < R < s$. Also gilt $\left\|\frac{1}{n!} d^n \check{f}(x)\right\|^\alpha \leq R^{-n} \|f\|_V$ und daher $|\hat{y}(f)| = \left|\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} d^n \check{f}(x) \cdot (y - x)\right| \leq \|f\|_V$ für $y \in \Omega$, $\alpha(y - x) < R$. Damit ist (1) bewiesen.

Nun sei $(\alpha_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ eine aufsteigende Folge von stetigen Seminormen auf E, die die Topologie von E definiert. Für $U \in \mathfrak{B}$ und $n, k \in \boldsymbol{N}$ sei $V_n^k(U)$ der offene Kern der Menge $\{x \in \Omega \mid d_\Omega^{\alpha_k}(x) > 2^{-n}$ und $|\hat{y}(f)| \leq \|f\|_U$ für alle $y \in \Omega$, $\alpha_k(y - x) < 2^{-n}$, und alle $f \in A_{\mathfrak{B}}\}$. Das System $\check{\mathfrak{B}}$ aller endlichen Vereinigungen solcher $V_n^k(U)$ ist wegen (1) eine offene Überdeckung von Ω. Aus der Definition der $V_n^k(U)$ ergibt sich weiter, daß $\check{\mathfrak{B}} \in \omega(\Omega)$ gilt. Es bleibt $A_{\check{\mathfrak{B}}} = \{\check{f} \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\}$ zu zeigen. Dazu sei $f \in A_{\mathfrak{B}}$ und $V_n^k(U) \in \check{\mathfrak{B}}$. Offenbar gilt

(2) $$\|\check{f}\|_{V_n^k(U)} \leq \|f\|_U.$$

Sei umgekehrt $g \in A_{\check{\mathfrak{B}}}$ und $U \in \mathfrak{B}$. Es gibt α, s, V wie in 2.1.1° und es ist $\alpha \leq \alpha_k$ und $2^{-n} < s$ für geeignete $n, k \in \boldsymbol{N}$. Es folgt

(3) $$\|g|_E\|_U \leq \|g\|_{V_n^k(U)},$$

also $A_{\check{\mathfrak{B}}} = \{\check{f} \mid f \in A_{\mathfrak{B}}\}$. Die Restriktion $A_{\check{\mathfrak{B}}} \to A_{\mathfrak{B}}$ ist deshalb bijektiv; daß sie offen und stetig ist, läßt sich aus (2) und (3) ablesen.

Für eine zulässige Überdeckung $\mathfrak{B}$ von E ist $\varrho_{\mathfrak{B}}^\alpha$ wieder gleichmäßig stetig; es gelten die entsprechenden Ungleichungen wie in 1.3.2°. Also gibt es eine stetige Fortsetzung $\hat{\varrho}_{\mathfrak{B}}^\alpha : \hat{E} \to \bar{\boldsymbol{R}}$. Mit Hilfe des letzten Satzes läßt sich in Analogie zu 1.4 zeigen:

2.6. Satz: *Sei E metrisierbar und $\mathfrak{V} \in \omega(E)$. Dann ist das Gebiet $\Omega_{\mathfrak{V}} \subset \hat{E}$, $\Omega_{\mathfrak{V}} := \{y \in \hat{E} \mid$ Es gibt $\alpha \in \mathrm{cs}(E)$ mit $\hat{\varrho}^{\alpha}_{\mathfrak{V}}(y) > 0\}$, die maximale simultane analytische Fortsetzung von $A_{\mathfrak{V}}$, und es gilt $\Omega_{\mathfrak{V}} = \bigcap \{\Omega_f \mid f \in A_{\mathfrak{V}}\}$.*

Beweis: Nach Definition von $\Omega_{\mathfrak{V}}$ gilt $d^{\alpha}_{\Omega}(x) \geq \varrho^{\alpha}_{\mathfrak{V}}(x)$ (vgl. 1.3.2°) für $x \in \Omega$, und mit $\mathfrak{W} := \check{\mathfrak{V}}$ ($\check{\mathfrak{V}}$ wie in 2.5) folgt $\varrho^{\alpha}_{\mathfrak{W}} = \hat{\varrho}^{\alpha}_{\mathfrak{V}}$. Die erste Aussage des Satzes ergibt sich nun aus 2.4.

$\Omega_{\mathfrak{V}} \subset \bigcap \{\Omega_f \mid f \in A_{\mathfrak{V}}\}$ gilt unmittelbar. Zu $x \notin \Omega_{\mathfrak{V}}$ gibt es eine Folge (x_n) aus $\Omega_{\mathfrak{V}}$ mit $x_n \to x$ und daher nach 2.4 ein $g \in A_{\mathfrak{W}}$ mit $\sup |g(x_n)| = \infty$. Mit $f := g|_E \in A_{\mathfrak{V}}$ folgt $x \notin \Omega_f$, also $x \notin \bigcap \{\Omega_f \mid f \in A_{\mathfrak{V}}\}$.

2.7. Korollar: $E_\Theta = \bigcap \{\Omega_{\mathfrak{V}} \mid \mathfrak{V} \in \omega(E)\}$.

2.8. Korollar: *Die Restriktion $r\colon H(E_\Theta)_b \to H(E)_b$ ist ein Isomorphismus von lokalkonvexen Räumen.*

Beweis: Offenbar ist r stetig. Zu $\mathfrak{V} \in \omega(E)$ gibt es nach 2.5 eine Überdeckung $\check{\mathfrak{V}} \in \omega(E_\Theta)$, so daß die Restriktion $A_{\check{\mathfrak{V}}} \to A_{\mathfrak{V}}$ topologisch ist. Also ist $A_{\mathfrak{V}} \to A_{\check{\mathfrak{V}}} \to H(E_\Theta)_b$ und damit nach 2.3 auch r^{-1} stetig.

2.9. Korollar: *Für jede kompakte Menge $\mathcal{B} \subset H(E)$ (kompakt in der Topologie der kompakten Konvergenz) ist $r|_{r^{-1}(B)}\colon r^{-1}(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ topologisch.*

Beweis: Das Korollar folgt unmittelbar aus 2.8 unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $H(E)$ für metrisierbare E ein Semi-Montelraum ist.

Zum Schluß dieses Abschnitts eine Charakterisierung der holomorph-vollständigen metrisierbaren Räume (vgl. [2]):

2.10. Satz: *Die folgenden Aussagen sind für einen metrisierbaren lokalkonvexen Raum E äquivalent:*

1° *E ist holomorph-vollständig (i.e. $E = E_\Theta$).*

2° *Zu jeder Cauchyfolge (x_n) aus E ohne Häufungspunkt in E gibt es eine analytische Funktion $f\colon E \to \mathbf{C}$ mit $\sup |f(x_n)| = \infty$.*

3° *Für jede präkompakte Menge $K \subset E$ mit $\|f\|_K < \infty$ für alle $f \in H(E)$ gilt: $\hat{K} := \{x \in E \mid |f(x)| \leq \|f\|_K$ für alle $f \in H(E)\}$ ist kompakt in E.*

Beweis: $1° \Rightarrow 2°$. Sei (x_n) eine Folge aus E mit $x_n \to x \in \hat{E} \setminus E_\Theta$. Dann gilt $x \notin \Omega_{\mathfrak{V}}$ für ein $\mathfrak{V} \in \omega(E)$ (2.7). Also gibt es nach 2.5 und 2.4 eine Funktion $f \in A_{\mathfrak{V}}$ mit $\sup |f(x_n)| = \infty$.

$2° \Rightarrow 3°$. $\hat{K}$ liegt in der abgeschlossenen konvexen Hülle von K in E, die kompakt ist. Wäre $\hat{K}$ nicht kompakt, so gäbe es eine Folge (x_n) aus K mit $x_n \to x \notin E$. Nach 2° gibt es dann eine Funktion $f \in H(E)$ mit $\sup |f(x_n)| = \infty \leq \|f\|_K$. Widerspruch!

$3° \Rightarrow 1°$. Sei $x \in E_\Theta$. Da E in E_Θ dicht liegt, gibt es eine Folge (x_n) aus E mit $x_n \to x$. $K := \{x_n \mid n \in \boldsymbol{N}\}$ erfüllt die Voraussetzungen in 3°, also ist $\hat{K} \subset E$ kompakt, und es folgt $x \in \hat{K} \subset E$.

3. Es werden jetzt vektorwertige analytische Abbildungen betrachtet.

3.1. Satz: *Sei E metrisierbar und F folgenvollständig. Dann hat jede analytische Abbildung $f: E \to F$ eine analytische Fortsetzung $\check{f}: E_\Theta \to F$.*

Beweis: Sei zunächst F vollständig. Die Abbildung $f^*: F'_c \to H(E): v \mapsto v \circ f$, ist stetig, wenn mit F'_c der Dualraum F' von F mit der Topologie der kompakten Konvergenz bezeichnet wird. Für gleichstetige Mengen $H \subset F'_c$ ist folglich $f^*(H)$ relativkompakt und $r^{-1}: f^*(H) \to r^{-1}(f^*(H))$ stetig nach 2.9. Jede Auswertungsabbildung $\hat{x}: H(E_\Theta) \ni g \mapsto g(x) \in \boldsymbol{C}$, $x \in E_\Theta$, ist stetig. Zusammenfassend ist also $\hat{x} \circ r^{-1} \circ f^* |_H: H \to \boldsymbol{C}$ für alle gleichstetigen Mengen $H \subset F'$ stetig. Aus dem Vollständigkeitssatz von Grothendieck [7, S. 148] folgt: $\hat{x} \circ r^{-1} \circ f^*: F' \to \boldsymbol{C}$ ist schwach stetig und bestimmt daher ein Element $\check{f}(x)$ aus F. Offenbar ist $\check{f}: E_\Theta \ni x \mapsto \check{f}(x) \in F$ eine analytisches Fortsetzung von f, der Satz ist also für vollständige Räume F bewiesen. Sei jetzt F folgenvollständig und $i: F \to \hat{F}$ die natürliche Inklusion. $i \circ f$ hat dann eine analytische Fortsetzung $i \check{\circ} f: E_\Theta \to \hat{F}$, und es gilt $i \check{\circ} f(E_\Theta) \subset F$, da E dicht in E_Θ liegt.

Für metrisierbare Bildräume F kann der Fortsetzungssatz noch folgendermaßen verschärft werden:

3.2. Satz. *Jede analytische Abbildung $f: E \to F$ zwischen metrisierbaren lokalkonvexen Räumen hat eine analytische Fortsetzung $f_\Theta: E_\Theta \to F_\Theta$.*

Beweis: Nach 3.1 gibt es eine analytische Fortsetzung $\widetilde{i\circ f}: E_\Theta \to \hat{F}$ von $i\circ f$, wenn $i: F \to \hat{F}$ wieder die natürliche Inklusion bezeichnet. Sei $x \in E_\Theta$ und (x_n) eine Folge aus E mit $x_n \to x$. Wäre $\widetilde{i\circ f}(x) \notin F_\Theta$, so gäbe es nach 2.10 eine analytische Funktion $g: F_\Theta \to \mathbf{C}$ mit $\sup |g\circ \widetilde{i\circ f}(x_n)| = \infty$, und $g\circ i\circ f \in H(E)$ ließe sich nicht analytisch nach E_Θ fortsetzen. Widerspruch! Also ist $\widetilde{i\circ f}(E_\Theta) \subset F_\Theta$ für jede analytische Abbildung $f: E \to F$, woraus folgt, daß die Restriktion $f_\Theta: E_\Theta \to F_\Theta$ von $\widetilde{i\circ f}$ analytisch ist.

Eine weitere Anwendung von Satz 3.1 ergibt das folgende Resultat:

3.3. Satz: *Für metrisierbare lokalkonvexe Räume E und F gilt* $E_\Theta \times F_\Theta = (E\times F)_\Theta$.

Beweis: $(E\times F)_\Theta \subset E_\Theta \times F_\Theta$ läßt sich zeigen, ohne daß von der Metrisierbarkeit Gebrauch gemacht werden muß: Sei $(a, b) \notin E_\Theta \times F_\Theta$, etwa $a \notin E_\Theta$. Es gibt $f \in H(E)$ mit $a \notin \Omega_f$ (1.5). Die triviale Fortsetzung $\bar{f}: E_\Theta \times \hat{F} \ni (x, y) \mapsto f(x) \in \mathbf{C}$ erfüllt $\Omega_{\bar{f}} = \Omega_f \times \hat{F}$, also ist $(a, b) \notin (E\times F)_\Theta$, und $(E\times F)_\Theta \subset E_\Theta \times F_\Theta$ ist bewiesen. Es bleibt nach 1.5 zu zeigen, daß sich jede Funktion $f \in H(E\times F)$ nach $E_\Theta \times F_\Theta$ analytisch fortsetzen läßt. Aus der Produktformel $H(E\times F) = H(E, H(F))$ [9] ergibt sich mit Hilfe von 3.1, daß sich f zunächst zu einer analytischen Funktion f_1 auf $E_\Theta \times F$ fortsetzen läßt. f_1 läßt sich dann wegen $H(E_\Theta \times F) = H(F, H(E_\Theta))$ auf $E_\Theta \times F_\Theta$ analytisch fortsetzen.

Literatur:

[1] Bochnak, J.–Siciak, J.: Analytic functions in topological vector spaces. Studia Math. 39, 77–112 (1971).

[2] Dineen, S.: Holomorphically complete locally convex topological vector spaces. Erscheint im Sém. Lelong.

[3] Dineen, S.: Holomorphic functions on locally convex topological vector spaces III. Handgeschriebenes Manuskript.

[4] Hirschowitz, A.: Sur les suites de fonctions analytiques. Ann. Inst. Fourier 20, 403–413 (1970).

[5] Hirschowitz, A.: Prolongement analytique en dimension infinie. Ann. Inst. Fourier 22, 255–292 (1972).

[6] Noverraz, P.: Sur le théorème de Cartan-Thullen-Oka en dimension infinie. Erscheint in An. Acad. Bras. Ciências.

[7] Schaefer, H. H.: Topological vector spaces. New York: Macmillan 1966.

[8] Schottenloher, M.: Über analytische Fortsetzung in Banachräumen. Math. Ann 199, 313–336 (1972).

[9] Schottenloher, M.: ε-product and continuation of analytic mappings. Erscheint in Colloque d'Analyse, Rio de Janeiro 1972, Hermann, Paris.