BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1973

MÜNCHEN 1974

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Kontaktrelationen (3. Mitteilung)

Von **Georg Aumann** in München

Vorgelegt am 1. Juni 1973

Die folgenden Betrachtungen stellen sich die Aufgabe, dem Begriff der „Konvexität" als Hüllenoperator $h$ durch gleichzeitige Betrachtung eines Paares von Hüllenoperationen $t$, $h$ in einer beliebigen Menge $S$ eine allgemeine Fassung zu geben. Die im Falle der „Konvexität" zu $t$, $h$ gehörigen „Extremalpunktmengen" $eX$ (als kleinste $t$-abgeschlossene Menge $Y$ mit $hY = hX$) ergeben eine Mengenoperation $X \mapsto eX$, $X \subset S$, die „stark idempotent" ist. Zusätzliche Forderungen topologischen Charakters an $t$ liefern weitere Eigenschaften von $e$, die im klassischen Falle der Konvexität im $\boldsymbol{R}^n$ wohl bekannt sind.

## 1. Weiteres über Hüllenoperatoren.

1.1. Neben der Kennzeichnung einer Hüllenoperation $h : \mathfrak{P}S \to \mathfrak{P}S$ durch die drei Eigenschaften der Extensivität, Isotonie und Idempotenz gibt es eine *Charakterisierung durch eine einzige „Funktionalgleichung"*, nämlich:

$$\text{(h*)} \qquad \bigwedge_{X \subset S} hX = \bigcap \{hY \,\vdots\, Y \subset S \wedge hY \supset X\}.$$

Auf einen Beweis sei hier verzichtet (man vergleiche dazu die Bemerkung, [1] S. 70).

1.2. *Das System $\boldsymbol{H}$ aller Hüllenoperationen in $S$ wird durch*

$$h_1 \leqslant h_2 :\asymp \bigwedge_{X \subset S} h_1 X \subset h_2 X$$

*vollständig geordnet. Dabei ist für $\boldsymbol{H}' \subset \boldsymbol{H}$*

$$(\inf \boldsymbol{H}')\, X = \bigcap \{hX \,\vdots\, h \in \boldsymbol{H}'\} \text{ *und*}$$
$$(\sup \boldsymbol{H}')X = \bigcap \{hX \,\vdots\, h \in \boldsymbol{H} \wedge \bigwedge_{h' \in \boldsymbol{H}'} h' \leqslant h\}.$$

Beweis. Es sei $h^+X := \bigcap \{hX \,\vdots\, h \in \boldsymbol{H}'\}$ und $\bigcap \{h^+Y \,\vdots\, h^+Y \supset X\} =: D$. Dann ist wegen $h^+X \supset$ X bei der Bildung von $D$

die Menge $X$ ein passendes $Y$, somit $D \subset h^+X$. Aus $h^+Y \supset X$ folgt für jedes $h \in \boldsymbol{H}'$ andererseits $hY = hhY \supset hh^+Y \supset hX$. Daher ist $h^+Y \supset h^+X$ und somit auch $D \supset h^+X$. Also erfüllt $\inf \boldsymbol{H}' = h^+$ $(h^*)$ und ist ein Hüllenoperator, und dasselbe gilt für $\sup \boldsymbol{H}'$.

**1.3. Eindeutigkeitssatz.** *Für jede Hüllenoperation gilt:*

$$\text{(e)} \qquad \bigwedge_{\mathfrak{X} \subset \mathfrak{P}S} h(\bigcup \mathfrak{X}) = h(\bigcup \{hX : X \in \mathfrak{X}\}),$$

*oder etwas schwächer ausgedrückt: Für irgend welche gleich indizierten Teilmengensysteme $(A_i)_{i \in J}$ und $(B_i)_{i \in J}$ von $S$ gilt:*

$$\text{(i)} \qquad (\bigwedge_{i \in J} hA_i = hB_i) \succ h(\bigcup_{i \in J} A_i) = h(\bigcup_{i \in J} B_i).$$

Beweis. (i) besagt bei Bezugnahme auf den Abbildungsbegriff, daß die Relation zwischen $h\ (\bigcup_{i \in J} A_i)$ und dem System $\{(i \mapsto hA_i) : i \in J\}$ Abbildungscharakter hat, was (e) explizit wiedergibt. (e) folgt unmittelbar aus

$$h(\bigcup \mathfrak{X}) \subset h(\bigcup \{hX : X \in \mathfrak{X}\}) \subset h\big(h(\bigcup \{X : X \in \mathfrak{X}\})\big) = h(\bigcup \mathfrak{X}).$$

**1.3.1.** Wir erheben (e) zu einer Definition: Eine Abbildung $g : \mathfrak{P}S \to \mathfrak{P}S$ heiße *stark idempotent*, wenn

$$\text{(si)} \qquad \bigwedge_{\mathfrak{X} \subset \mathfrak{P}S} g(\bigcup \mathfrak{X}) = g(\bigcup \{gX : X \in \mathfrak{X}\}).$$

*Jede stark idempotente Abbildung ist auch idempotent* (man setze in (si) für $\mathfrak{X}$ das einelementige System $\{X\}$). Nach dem Eindeutigkeitssatz ist also jede Hüllenoperation stark idempotent.

**1.3.2.** *Jede stark idempotente Operation $g$ in $S$ liefert eine Hüllenoperation $H_g$, erklärt durch*

$$H_g X := \bigcup \{Y : Y \subset S \wedge gY = gX\}.$$

Beweis. 1. $H_g X \supset X$ ist klar. – 2. $H_g H_g X = \bigcup \{Z : gZ = g(\bigcup \{Y : gY = gX\})\}$. Wegen der starken Idempotenz von $g$ ist aber $g(\bigcup \{Y : gY = gX\}) = g(\bigcup \{gY : gY = gX\}) = ggX = gX$, somit $H_g H_g X = \bigcup \{Z : gZ = gX\} = H_g X$. – 3. Zum Beweis der Isotonie sei vorausgeschickt, daß

$$(*) \qquad gH_g = g;$$

denn $g(\bigcup \{Y \vdots gY = gX\}) = gX$, wie eben festgestellt wurde. Nun sei $X \subset Y$. Dann folgt $g(H_g X \cup H_g Y) = g(gH_g X \cup gH_g Y) = g(gX \cup gY) = g(X \cup Y) = g(Y) = gH_g Y$, somit (nach Definition von $H_g H_g Y$) $H_g Y = H_g H_g Y \supset H_g X \cup H_g Y$ oder $H_g X \subset H_g Y$.

Bemerkungen. 1. Ist $h$ irgend eine Hüllenoperation in $S$, so gilt $H_h = h$, d. h. man kann jede Hüllenoperation $h$ als eine zu einer stark idempotenten Operation $g$ gehörige Hüllenoperation $H_g$ darstellen. – 2. Neben (*) gilt, wie unmittelbar ersichtlich

(**) $$g \subset H_g \text{ und } H_g g = H_g.$$

**2. Konvexität.**

**2.1.** Jede Hüllenoperation $h$ in $S$ hat die Eigenschaft, daß es zu jedem $X \subset S$ ein größtes $Y \subset S$ gibt mit $hY = hX$, nämlich $Y := hX$. Dagegen besitzt die Frage nach einem „kleinsten" $Y$ mit $hY = hX$ im allgemeinen keine positive Antwort. Im Verfolg dieser Frage wäre nämlich die Menge

$$X_+ := \bigcap \{Y \vdots Y \subset S \wedge hY = hX\}$$

zu betrachten. Aber nicht für jedes $X$ und jedes $h$ ist $hX_+ = hX$.

Beispiel: $h$ ist die topologische Hülle im $\boldsymbol{R}^1$ und $X = [0; 1]$. Hier ist $X_+ = X \cap \boldsymbol{Q} \cap \complement \boldsymbol{Q}$, wobei $\boldsymbol{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen bezeichnet, also $hX_+ = \emptyset = X = hX$.

**2.2.** Die Angelegenheit wird aussichtsreicher, wenn man verallgemeinert: Man betrachtet neben $h$ noch eine zweite Hüllenoperation $t : \mathfrak{P} S \to \mathfrak{P} S$ in $S$ und sucht jetzt nach einem $h$-hüllengleichen $Y$ mit kleinster $t$-Hülle. Jetzt haben wir es also mit der Operation $e := e_{t,h}$ zu tun, erklärt durch

(2) $$eX := \bigcap \{tY \vdots Y \subset S \wedge hY = hX\}, X \subset S,$$

und mit der Frage, wann

(2+) $$heX = hX$$

gilt.

**2.2.1.** Daß es zu jedem $h$ immer ein $t$ gibt, so daß $(2^+)$ sogar für alle $X \subset S$ gilt, ist fast trivial; man nehme $t := h$, so ist $e = h$, also $he = h$.

**2.2.2.** Ein nicht triviales Beispiel liefern die Extremalpunktmengen bei den kompakten konvexen Teilmengen des $\boldsymbol{R}^n$. Hier ist $S$ eine kompakte konvexe Teilmenge des $\boldsymbol{R}^n$, $hX$ die abgeschlossene (!) konvexe Hülle und $tX$ die abgeschlossene Hülle (beides bezüglich der üblichen Topologie im $\boldsymbol{R}^n$ verstanden). $(2^+)$ gilt für alle $X \subset S$. Es sei hier noch bemerkt, daß $(2^+)$ nicht mehr für alle $X$ gilt, wenn man das Beispiel dahin verallgemeinert, daß man $S$ als nicht-beschränkte konvexe Teilmenge des $\boldsymbol{R}^n$ zuläßt, z. B. $S = \boldsymbol{R}^n$ voraussetzt. Für einem Halbraum $X$ ist jetzt $eX = \emptyset$, also $(2^+)$ nicht erfüllt.

**2.3.** Die Beziehung $(2^+)$ ist etwas verwickelter Art und es ist schwierig, ohne besondere Voraussetzungen bequeme Bedingungen aufzustellen, die das Bestehen von $(2^+)$ garantieren. Wir müssen daher praktisch $(2^+)$ selbst als Forderung stellen. In leichter Anpassung an das Beispiel 2.2.2 setzen wir als Erstes voraus, daß

$$\text{(a)} \qquad ht = h$$

gilt, womit bereits allgemein $heX \subset hX$ gesichert ist; denn mit (a) ergibt sich sofort $eX \subset hX$ und damit $heX \subset hX$. Im übrigen verlangen wir, noch ein wenig über $(2^+)$ hinausgehend und mit Rücksicht auf (a), wenn $\mathfrak{F}_t$ das System aller $t$-abgeschlossenen Mengen bezeichnet, die Gültigkeit von

$$\text{(k)} \qquad \bigwedge_{\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_t, X \subset S} \left(\bigwedge_{F \in \mathfrak{F}} hF = hX\right) \succ h\left(\bigcap \mathfrak{F}\right) = hX,$$

einen Beziehung welche einen gewissen Zusammenhang zwischen den $h$- und $t$-Hüllen herstellt, und definieren:

Sind $h$ und $t$ Hüllenoperationen in $S$, so heißt $h$ eine *Konvexität in $S$ bzgl. $t$*, kurz *$t$-Konvexität*, wenn $h$ und $t$ (a) und (k) erfüllen. Bemerkung. Aus (a) folgt auch $th = h$; denn es ist $th \supset h$ und andererseits $th \subset hth = hh = h$.

Satz. *Ist $h$ $t$-konvex, so gilt $(2^+)$ für alle $X \subset S$.*

Beweis. Man setze in (k) $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}_t$ und berücksichtige (a). Ist $h$ $t$-konvex, so heißt

$$eX = \bigcap \{F : F \in \mathfrak{F}_t \wedge hF = hX\}$$

die *(t, h)-Extremalpunktmenge von X*; sie ist die kleinste $t$-abgeschlossene Teilmenge von $S$, deren $h$-Hülle gleich der von $X$ ist.

**2.3.0.** Die *Orizykel-Konvexität* als ein Beispiel einer Konvexität ohne Linearität.

1. Es sei $U := \{z : |z| < 1\}$ die Kreisscheibe vom Radius 1 in der komplexen $z$-Ebene; ferner sei $A := \{a : 0 < |a| < 1\}$. Für $a \in A$ heißt die Punktmenge

$$Z_a := \{z : z \in U \wedge |z - a| \leq 1 - |a|\}$$

eine *Orizykelscheibe*, kurz *OZ-Scheibe*, in $U$ mit dem *Ursprung* $u := a / |a|$. Je zwei verschiedene Punkte $z'$, $z''$ bestimmen eindeutig die „spindelförmige" Menge (Kreiszweieck)

$$T_{z', z''} := Z_{a_1} \cap Z_{a_2},$$

wobei $Z_{a_1}$, $Z_{a_2}$ jene OZ-Scheiben bezeichnen, auf deren Peripherien $z'$ und $z''$ liegen.

2. Für ein festes $\varrho$, $0 < \varrho < 1$, betrachten wir auf der Menge $X := \{z : |z| \leq \varrho\}$ neben der Hülle $t$ der gewöhnlichen Topologie die Hüllenoperation $k$, deren $k$-abgeschlossenen Mengen als die Mengen

$$K_B := X \cap (\bigcap \{Z_a : a \in B\} \text{ mit } B \subset A$$

erklärt sind; es ist dann für $Y \subset X$

$$kY = \bigcap \{K_B : B \subset A \wedge K_B \supset Y\}$$

und es gilt der

Satz 1. *Es ist $Y \subset X$ k-abgeschlossen, d. h. $kY = Y$ genau dann, wenn Y t-abgeschlossen* $\wedge \bigwedge_{z', z'' \in Y} T_{z', z''} \subset Y$. – 2. *k ist t-konvex.*

Zum Beweis sei nur bemerkt, daß sich die Extremalpunkte einer $t$-abgeschlossenen Menge $Y$ bzgl. $k$ hier (in analoger Weise wie im Beispiel 2.2.2) in folgender Weise ergeben: Zu jedem Ursprung $u$ ($|u| = 1$) gibt es eine minimale, $Y$ überdeckende OZ-Scheibe $Z_a$, auf deren Peripherie $Z_a^r$ genau ein Extremalpunkt liegt, wenn $Z_a^r \cap Y$ aus nur einem Punkt besteht, nämlich dieser Punkt selbst, oder genau zwei Extremalpunkte, wenn $Z_a^r \cap Y$

mehrpunktig ist, nämlich jene zwei Punkte $p$, $q$ von $Z_a^r \cap Y$, für welche der ($u$ nicht enthaltene) Peripheriebogen $\widehat{pq}$ von $Z_a$ alle Punkte von $Z_a^r \cap Y$ trägt.

**2.3.1.** *Ist $h$ t-konvex, so ist e stark idempotent.*

Beweis. Es ist $x \notin eZ$ gleichwertig mit der Aussage

$$\curlyvee_{F \in \mathfrak{F}_t} x \notin F \wedge hF = hZ.$$

Um also die starke Idempotenz von $e$ zu erhalten, haben wir die Gleichwertigkeit der Aussagen

$$\curlyvee_{F \in \mathfrak{F}_t} x \notin F \wedge hF = h(\bigcup \mathfrak{X}) \text{ und}$$

$$\curlyvee_{F' \in \mathfrak{F}_t} x \notin F' \wedge hF' = h(\bigcup \{eX : X \in \mathfrak{X}\})$$

zu beweisen. Nach 1.3 ist aber $h(\bigcup \mathfrak{X}) = h(\bigcup \{hX : X \in \mathfrak{X}\}) = h(\bigcup \{heX : X \in \mathfrak{X}\}) = h(\bigcup \{eX : X \in \mathfrak{X}\})$. Die fragliche Gleichwertigkeit wird also durch $F = F'$ hergestellt.

**2.3.2.** *Ist $h$ t-konvex, so gilt* (mit der Bezeichnung von 1.3.2)

$$H_e = h.$$

Beweis. Es ist $H_e X$ gleich $\bigcup \{Y : eY = eX\}$ und wegen $eh = e$ auch gleich $\bigcup \{hY : eY = eX\}$. Aus $eY = eX$ aber folgt $heY = heX$ oder $hY = hX$, also $H_e X = hX$.

**2.3.3.** Über die Menge $\boldsymbol{T}_h$ der Hüllenoperationen $t$, bezüglich welcher $h$ $t$-konvex ist, läßt sich folgendes aussagen:

$$\curlywedge_{t, t', t'' \in \boldsymbol{H}} (\{t, t'\} \subset \boldsymbol{T}_h \wedge t \leqslant t'' \leqslant t') \succ t'' \in \boldsymbol{T}_h$$

(Man sagt auch, $\boldsymbol{T}_h$ sei „*intervallkonvex*" in $\boldsymbol{H}$).

Beweis. 1. Wegen $t'' \leqslant t'$ ist $ht'' \leqslant ht' = h$. Da aber auch $ht'' \geqslant h$, so folgt $ht'' = h$. – 2. $e''X = \bigcap \{t''Y : hY = hX\} \supset \bigcap \{tY : hY = hX\} = eX$, also $hX = heX \subset he''X \subset hX$, also $he''X = hX$ für jedes $X \subset S$.

Bemerkung. Da $h$ $h$-konvex, so ist bei $t$-Konvexität von $h$ auch $h$ $t'$-konvex für jede Hüllenoperation $t'$ zwischen $t$ und $h$ ($h$ ist ja die größte Hüllenoperation, bezüglich welcher $h$ konvex ist).

2.3.4. Hinsichtlich der Frage nach minimalen Elementen (oder gar nach einem kleinsten) in $\boldsymbol{T}_h$ sei hier nur das folgende Resultat genannt:

*Ist h die klassische Konvexität auf* $S := [0; 1]$, *bezogen auf die gewöhnliche Topologie t (vgl.* 2.2.2.*), so ist t in* $T_h$ *minimal.*

Beweis. Es sei $t'$ eine Hüllenoperation in $S$ mit $t' \leqq t$ und $t' \neq t$. Dann gibt es ein $X_0 \subset S$ und ein $a \in S$, so daß $tX_0 \ni a$ und $t'X_0 \subset (tX_0) \setminus \{a\}$. Ohne Beschränkung können wir $a = 0$ setzen. Aus $X_0$ können wir zwei Teilmengen $Y_1$, $Y_2$ ausgreifen, so daß $tY_1 \ni 0$, $tY_2 \ni 0$, $\sup Y_1 = \sup Y_2 = \sup X_0 =: \varrho > 0$ und $(tY_1) \cap (tY_2) \cap (0; \varrho/2) = \emptyset$. Es ist $hY_1 = hY_2 = hX_0 = [0; \varrho]$ und wegen $t'Y_i \subset t'X_0 \subset (tX_0) \setminus \{0\}$ und $t'Y_1 \cap t'Y_2 \cap (0; \varrho/2) = \emptyset$ auch $t'Y_1 \cap t'Y_2 \cap [0; \varrho/2) = \emptyset$, also $e'X_0 \cap [0; \varrho/2) = \emptyset$ und somit $(he'X_0) \cap [0; \varrho/2) = \emptyset$, also $he'X_0 \neq hX_0$, d. h. $h$ nicht konvex bezüglich $t'$ : $t$ ist minimal.

3. Weitere Eigenschaften von $e$ ergeben sich, wenn man von $t$ gewisse „topologische" Eigenschaften fordert.

3.1. *Ist t ein topologischer Hüllenoperator in S und ist h t-konvex, so ist e „endlich unteradditiv"*, d. h.

$$\bigwedge_{X_1, X_2 \subset S} e(X_1 \cup X_2) \subset eX_1 \cup eX_2.$$

Beweis. Wenn $z \notin eX_1$ und $\notin eX_2$, so gibt es $Y_1$ und $Y_2$, sodaß $hY_i = hX_i$ und $z \notin tY_i$, $i = 1, 2$. Da $t$ topologisch ist, so folgt daraus $z \notin t(Y_1 \cup Y_2)$, ferner wegen 1.3 $h(X_1 \cup X_2) = h(Y_1 \cup Y_2)$, also nach Definition von $e$ auch $z \notin e(X_1 \cup X_2)$.

3.2. Um die Unteradditivität für beliebige Mengensysteme zu erreichen, brauchen wir die Regularität und Kompaktheit der Operation $t$.

I. $t$ heißt *regulär*, wenn $t$ durch ein KT-System $\mathfrak{B}$ darstellbar ist, für welches gilt:

$$\bigwedge_{x \in S,\, V \in \mathfrak{B}} x \in V \succ \bigvee_{V' \in \mathfrak{B}} x \in V' \wedge tV' \in \mathfrak{B}.$$

II. $t$ heißt *kompakt*, wenn für das System $\mathfrak{F}_t$ aller $t$-abgeschlossenen Mengen der „Durchschnittssatz" gilt:

$$\curlywedge_{\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_t} (\curlywedge_{\mathfrak{F}' \in \mathfrak{F}} \mathfrak{F}' \text{ endlich} \succ \bigcap \mathfrak{F}' \neq \emptyset) \succ \bigcap \mathfrak{F} \neq \emptyset.$$

Es gilt der Satz:

*Ist t eine reguläre und kompakte Hüllenoperation in S und ist h t-konvex, so ist e „stark t-unteradditiv", d. h.*

$$\curlywedge_{\mathfrak{X} \subset \mathfrak{P} S} e(\bigcup \mathfrak{X}) \subset t(\bigcup \{eX \vdots X \in \mathfrak{X}\}).$$

Beweis: Es sei $z$ ein Punkt, der nicht zur rechten Seite der zu beweisenden Inklusion gehört. Dann gibt es ein $V \in \mathfrak{V}$ mit $V \ni x$ und $V$ fremd zu $\bigcup \{eX \vdots X \in \mathfrak{X}\} =: W$. Wegen der Regularität gibt es weiter ein $V' \subset V$ mit $tV' \subset V$, so daß auch $tV'$ fremd zu $W$ ist, d. h. $eX \frown tV' = \emptyset$ für alle $X \in \mathfrak{X}$. Wegen $eX = \bigcap \{F \vdots F \in \mathfrak{F}_t \wedge hF = hX\}$ und wegen der Kompaktheit gibt es endlich viele $F_1, \ldots, F_n$ mit $hF_i = hX$ und $F_X := F_1 \frown \ldots \frown F_n$ fremd zu $tV'$ und erst recht zu $V'$, und damit ist auch $F^+ := t \bigcup \{F_X \vdots X \in \mathfrak{X}\}$ fremd zu $V'$. Ferner ist wegen der Konvexität $\curlywedge_{X \in \mathfrak{X}} hF_X = hX$. Nach dem Eindeutigkeitssatz folgt mit $X^* := \bigcup \mathfrak{X}$ $hF^+ = h(\bigcup \{F_X \vdots X \in \mathfrak{X}\}) = h(\bigcup \{hX \vdots X \in \mathfrak{X}\}) = hX^+$. Daraus folgt $eX^+ \subset F^+$, also $eX^+$ fremd zu $V'$, somit $z \notin eX^+$.

Ostern 1973.

## Literatur

[1] G. Aumann, Kontaktrelationen, Sitz. Ber. Bayer. Ak. Wiss., Math.-Nat. Kl., 1970, S. 67–77; [2] dto. (2. Mitteilung), 1971, S. 119–122.