BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1974

MÜNCHEN 1975

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über Standard-Konstruktionen von nicht-assoziativen Algebren

von **Max Koecher**

Mathematisches Institut der Universität Münster

Vorgelegt von Herrn Karl Stein am 11. Januar 1974

Hel Braun zur Vollendung des 60. Lebensjahres gewidmet

Einleitung

In der vorliegenden Note soll u. a. gezeigt werden, wie sich gewisse – oft verwendete – Methoden und Ergebnisse der nicht-assoziativen Algebra in einen allgemeinen Rahmen einordnen lassen. Ausgehend von einem kommutativen und assoziativen unitären Ring k und einem unitären k-Linksmodul X wird der k-Modul $\mathrm{Alg}\, X := \mathrm{Hom}_k(X, \mathrm{End}_k X)$ betrachtet, der bekanntlich in natürlicher Weise als $(\mathrm{End}\, X)^-$-Lie-Modul aufgefaßt werden kann. Die Elemente von $\mathrm{Alg}\, X$ entsprechen bijektiv den verschiedenen (nicht notwendig assoziativen) Algebren auf X. Es erscheint bemerkenswert, daß man in sinnvoller Weise zu gegebenem $u \in X$ ein Produkt $(A, B) \mapsto AuB$ auf $\mathrm{Alg}\, X$ definieren kann. $\mathrm{Alg}\, X$ zusammen mit diesem Produkt kann als *Algebra der Algebren* $\mathrm{Alg}_u X$ aufgefaßt werden. Speziell entspricht AuA der Mutation (bezüglich u) der zu A gehörenden Algebra auf X. Der § 1 ist dem Studium von $\mathrm{Alg}_u X$ gewidmet. Ist k ein Körper, so sind die Algebren $\mathrm{Alg}_u X$ für $u \neq 0$ einfach und paarweise isomorph.

Im § 2 wird gezeigt, daß der k-Modul $\mathrm{Stand}\, X := X \oplus \mathrm{End}\, X \oplus \mathrm{Alg}\, X$ in kanonischer Weise als anti-kommutative Algebra aufgefaßt werden kann, welche die *Standard-Algebra* von X genannt wird. Von besonderem Interesse sind die Lie-Teilalgebren der Standard-Algebra. Lie-Algebren dieses Typs sind in der Literatur mehrfach betrachtet worden, ohne daß dabei der hier aufgezeigte Hintergrund deutlich wird: So fallen z. B. sowohl algebraische Konstruktionen von Lie-Algebren vermittels Jordan-Algebren oder Jordan-Tripelsystemen ([5], [6], K. Meyberg [7], [8]) wie auch die Untersuchung von holomorphen Vektorfeldern (W. Kaup, Y. Matsushima und T. Ochiai [3] und W. Kaup [4]) und Ergebnisse über homogene konvexe Kegel und zugehörige Tubengebiete (O. Rothaus [9]) in diese Kategorie. Ein kürzlich von J. R. Faulkner [2] formuliertes Prinzip paßt sich ebenfalls in diesen Rahmen ein.

Nach der Diskussion einiger Klassen von Beispielen im § 3 wird im § 4 der Zusammenhang mit den sogenannten binären Lie-Algebren [6] hergestellt und gezeigt, daß man jeder Lie-Teilalgebra der Standard-Algebra eines endlich-dimensionalen Vektorraums X eine Gruppe von birationalen Abbildungen von X zuordnen kann.

§ 1. Die Algebra der Algebren

1. *Der Lie-Modul* Alg X. Es sei k ein kommutativer unitärer Ring, X ein unitärer k-Linksmodul und

$$\operatorname{Alg} X := \operatorname{Hom}_k(X, \operatorname{End}_k X).$$

Das Beispiel $k := \mathbf{Z}, X := \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ zeigt, daß $\operatorname{Alg} X = 0$ möglich ist.

Auf die Angabe des Grundringes k wird verzichtet, wenn keine Mißverständnisse möglich sind. Für $A \in \operatorname{Alg} X$ soll mit $u \mapsto A_u$, $u \in X$, die zugehörige lineare Abbildung von X in End X bezeichnet werden. X zusammen mit einer k-bilinearen Abbildung $(u,v) \mapsto uv$ von $X \times X$ in X nennt man wie üblich eine *Algebra* $\mathfrak{A}$ *auf* X und $(u,v) \mapsto uv$ das *Produkt* in dieser Algebra. Zu jedem $A \in \operatorname{Alg} X$ erhält man eine Algebra X_A auf X durch Definition des Produktes

$$(u,v) \mapsto uAv := A_u v, \quad u,v \in X.$$

Umgekehrt kann jede Algebra auf X als ein X_A mit $A \in \operatorname{Alg} X$ erhalten werden. Setzt man

$$\operatorname{Alg}^{\pm} X := \{A\,; A \in \operatorname{Alg} X, uAv = \pm\, vAu \text{ für } u,v \in X\},$$

so entspricht $\operatorname{Alg}^{+} X$ der Menge der kommutativen und $\operatorname{Alg}^{-} X$ der Menge der anti-kommutativen Algebren auf X.

Für $T \in \operatorname{End} X$ und $A \in \operatorname{Alg} X$ wird ein $T \cdot A \in \operatorname{Alg} X$ durch

$$\text{(I)} \qquad u(T \cdot A)v := T(uAv) - (Tu)Av - uA(Tv)$$

definiert. Wie man sieht ist dies gleichwertig mit

$$\text{(I')} \qquad (T \cdot A)_u = [T, A_u] - A_{Tu}.$$

Analog erklärt man für W aus der Gruppe $\operatorname{GL} X$ der bijektiven Endomorphismen von X und $A \in \operatorname{Alg} X$ ein $W * A \in \operatorname{Alg} X$ durch

$$\text{(II)} \qquad (Wu)(W * A)(Wv) := W(uAv),$$

d. h. durch

$$\text{(II')} \qquad (W * A)_u = W A_{W^{-1}u} W^{-1}.$$

Wegen (II) ist dann $W : X_A \to X_{W*A}$ ein Isomorphismus der Algebren.

Für $A \in \operatorname{Alg} X$, T, $S \in \operatorname{End} X$ und $W \in \operatorname{GL} X$ verifiziert man ohne Mühe

$$\text{(1)} \qquad T \cdot (S \cdot A) - S \cdot (T \cdot A) = [T, S] \cdot A,$$

$$\text{(2)} \qquad T \cdot \operatorname{Alg}^{\pm} X \subset \operatorname{Alg}^{\pm} X, \ W * \operatorname{Alg}^{\pm} X \subset \operatorname{Alg}^{\pm} X,$$

$$\text{(3)} \qquad W * (T \cdot A) = (W T W^{-1}) \cdot (W * A).$$

Wegen (1) *ist* $\operatorname{Alg} X$ *bezüglich* $(T, A) \mapsto T \cdot A$ *ein* $(\operatorname{End} X)^{-}$*-Lie-Modul und* $\operatorname{Alg}^{\pm} X$ *sind wegen* (2) *Lie-Teilmoduln.* Bei gegebenem $W \in \operatorname{GL} X$ erhält durch die Abbildung $A \mapsto W * A$ einen Isomorphismus des k-Moduls $\operatorname{Alg} X$ und $\operatorname{GL} X$ wird damit einer Untergruppe von $\operatorname{GL}(\operatorname{Alg} X)$ isomorph.

2. *Die Algebra der Algebren auf* X. Für $u \in X$ und $A, B \in \operatorname{Alg} X$ definiere man das Element $AuB \in \operatorname{Alg} X$ durch

$$\text{(III)} \qquad x(AuB)y := (uAx)By + xB(uAy) - uA(xBy),$$

d. h. durch

$$\text{(III')} \qquad (AuB)_x = -[A_u, B_x] + B_{uAx}.$$

Ein Vergleich mit (I′) ergibt

$$(\mathrm{III}'') \qquad AuB = -A_u \cdot B.$$

Der k-Modul Alg X zusammen mit dem Produkt $(A, B) \mapsto AuB$ wird damit zur Algebra $\mathrm{Alg}_u\, X$ auf Alg X. Man kann $\mathrm{Alg}_u\, X$ die *Algebra der Algebren auf* X nennen. Ist $\mathfrak{M}$ ein (End X)$^-$-Lie-Teilmodul von Alg X, so ist $\mathfrak{M}$ wegen (III″) ein Linksideal von $\mathrm{Alg}_u\, X$. *Speziell sind* $\mathrm{Alg}^{\pm}\, X$ *Linksideale in* $\mathrm{Alg}_u\, X$.

Mit Hilfe von (3) berechnet man

$$(1.1) \qquad W * (AuB) = (W * A)(Wu)(W * B)$$

Für $A, B \in \mathrm{Alg}\, X$ und $W \in \mathrm{GL}\, X$. *Damit ist* $A \mapsto W * A$, $W \in \mathrm{GL}\, X$, *ein Isomorphismus von* $\mathrm{Alg}_u\, X$ *auf* $\mathrm{Alg}_{Wu}\, X$.

Bemerkung 1. Ist k ein Körper, so operiert GL X transitiv auf den von Null verschiedenen Elementen von X. Damit sind alle Algebren $\mathrm{Alg}_u\, X$ für $u \neq 0$ paarweise isomorph.

Unter Verwendung von (III″) und (3) verifiziert man

$$(\mathrm{IV}) \qquad A(uCv)B = (CuA)vB + Av(CuB) - Cu(AvB)$$

für $A, B, C \in \mathrm{Alg}\, X$ und $u, v \in X$. Wie man sieht, ist dies die „duale" Formel zu (III).

Für eine Algebra $\mathfrak{A}$ auf X mit Produkt $(u, v) \mapsto uv$ definiert man die *Mutation* $\mathfrak{A}_q$ von $\mathfrak{A}$ bezüglich eines Elementes q von X als die Algebra auf X mit dem Produkt

$$(1.2) \qquad (u, v) \mapsto u(qv) + v(qu) - q(uv).$$

Setzt man $A = B$ in (III), so folgt

$$(\mathrm{III}^*) \qquad X_{AuA} = (X_A)_u$$

und $u = v$ in (IV) ergibt

$$(\mathrm{IV}^*) \qquad (\mathrm{Alg}_u\, X)_C = \mathrm{Alg}_{uCu}\, X.$$

Bemerkung 2. Ist k ein Körper, so ist die rechte Seite die Null-Algebra oder nach der Bemerkung 1 isomorph zu $\mathrm{Alg}_u\, X$. Für jede Algebra $\mathfrak{B} := \mathrm{Alg}_u\, X$ ist somit die folgende bemerkenswerte Eigenschaft richtig: *Jede Mutation von $\mathfrak{B}$ ist die Null-Algebra oder isomorph zu $\mathfrak{B}$.*

Da eine anti-kommutative Algebra $\mathfrak{A}$ genau dann eine Lie-Algebra ist, wenn jede Mutation $\mathfrak{A}_q$ die Null-Algebra ist, folgt aus (III*) das

Lemma 1.1. *Für $A \in \mathrm{Alg}^- X$ sind äquivalent:*

a) X_A *ist Lie-Algebra*
b) $A u A = 0$ *für alle* $u \in X$.

Aus (IV) folgt speziell

$$(A u A) u A = A (u A u) A .$$

Die Potenzassoziativität der dritten Potenzen in $\mathrm{Alg}_u X$ charakterisiert die Jordan-Algebren auf X. Mit Hilfe der Basis-Identitäten von Jordan-Algebren zeigt man mühelos

Lemma 1.2. *Enthält X keine 2- und 3-Torsion, dann sind für $A \in \mathrm{Alg}^+ X$ äquivalent:*

a) X_A *ist Jordan-Algebra*
b) $(A u A) u A = A u (A u A)$ *für alle* $u \in X$.

3. *Tripel-Systeme.* Es ist manchmal zweckmäßig, die vorliegende Situation unter dem Gesichtspunkt eines Tripel-Systems zu betrachten: Vermöge

$$\begin{aligned} X \times \mathrm{Alg}\, X \times X &\to X, & (u, A, v) &\mapsto u A v, \\ \mathrm{Alg}\, X \times X \times \mathrm{Alg}\, X &\to \mathrm{Alg}\, X, & (A, u, B) &\mapsto A u B, \end{aligned}$$

erhält man ein Tripel-System $(X, \mathrm{Alg}\, X)$, für das die beiden Grundformeln (III) und (IV) gelten. Eine Wiederholung von (II) und (1.1),

$$W(u A v) = (W u)(W * A)(W v), W * (A u B) = (W * A)(W u)(W * B),$$

zeigt, *daß* GL X *vermöge $(u, A) \mapsto (W u, W * A)$ als Gruppe von Automorphismen des Tripel-Systems operiert.*

Analog erhält man aus (I) und (1)

$$\begin{aligned} T(u A v) &= (T u) A v + u (T \cdot A) v + u A (T v), \\ T \cdot (A u B) &= (T \cdot A) u B + A (T u) B + A u (T \cdot B). \end{aligned}$$

Damit operiert (End $V)^-$ *vermöge* $(u, A) \mapsto (Tu, T \cdot A)$ *als Lie-Algebra von Derivationen des Tripel-Systems.*

4. *Die Ideale von* $\mathrm{Alg}_u\, X$. Zur Untersuchung der Ideale von $\mathrm{Alg}_u\, X$ benötigt man eine hinreichend umfangreiche Menge von explizit definierten Elementen von Alg X. Nach Wahl einer bilinearen Abbildung $\alpha : X \times X \to k$, einer linearen Abbildung $\lambda : X \to k$, eines $U \in \mathrm{End}\, X$ und eines $a \in X$ definiert man die Elements $C^{\alpha, a}$ und $D^{\lambda, U}$ von Alg X durch

$$(1.3) \qquad x(C^{\alpha,a})y := \alpha(x,y)a, \quad x(D^{\lambda,U})y := \lambda(x)Uy.$$

Mit Hilfe von (III) berechnet man für $A \in \mathrm{Alg}\, X$ und $u \in X$ zunächst

$$(1.4\mathrm{a}) \quad x(AuC^{\alpha,a})y = [\alpha(uAx,y) + \alpha(x,uAy)]a - \alpha(x,y)uAa,$$

$$(1.4\mathrm{b}) \quad x(C^{\alpha,a}uA)y = \alpha(u,x)aAy + \alpha(u,y)xAa - \alpha(u,xAy)a,$$

$$(1.4\mathrm{c}) \quad x(AuD^{\lambda,U})y = \lambda(uAx)Uy + \lambda(x)[U(uAy) - uA(Uy)],$$

$$(1.4\mathrm{d}) \quad x(D^{\lambda,U}uA)y = -\lambda(u)[U(xAy) - (Ux)Ay - xA(Uy)].$$

Wegen (I) bedeuten die letzten beiden Formeln

$$(1.4\mathrm{c}') \qquad AuD^{\lambda,U} = D^{\lambda\circ V,U} + D^{\lambda,[U,V]} \text{ mit } V := A_u,$$

$$(1.4\mathrm{d}') \qquad D^{\lambda,U}uA = -\lambda(u)\, U \cdot A.$$

Für die weiteren Überlegungen dieses Abschnitts wird angenommen, daß k ein Körper ist und $\dim_k X < \infty$ gilt. Dann bilden sowohl die $C^{\alpha,a}$ als auch die $D^{\lambda,U}$ je ein Erzeugendensystem von Alg X. Sei nun $u \neq 0$ aus X gewählt.

Lemma 1.3. *Für einen Teilmodul* $\mathfrak{M}$ *von* Alg X *sind äquivalent:*

a) $\mathfrak{M}$ *ist ein Linksideal in* $\mathrm{Alg}_u\, X$
b) $T \cdot \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ *für alle* T *aus* End X.

Beweis: Folgt aus (1.4d′) und 2.

Man definiert

$$\mathfrak{N}_u := \{A;\, A \in \mathrm{Alg}\, X, \mathrm{A}_u = 0\}$$

und entnimmt (1.4c)

$$(1.5) \qquad [A u D^{\lambda, U}]_u = \lambda(uAu)U + \lambda(u)[U, A_u]$$

für $U \in \operatorname{End} X$ und $\lambda \in X^*$. Speziell ist $\mathfrak{N}_u$ ein Rechtsideal in $\operatorname{Alg}_u X$.

Lemma 1.4. *Für ein Rechtsideal $\mathfrak{M}$ von $\operatorname{Alg}_u X$ gilt entweder $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}_u$ oder $\mathfrak{M} = \operatorname{Alg}_u X$.*

Beweis: Man nehme an, daß $\mathfrak{M}$ nicht in $\mathfrak{N}_u$ enthalten ist.

Behauptung 1. *Es gibt $A \in \mathfrak{M}$ mit $uAu \neq O$.* Zum Beweis wählt man $B \in \mathfrak{M}$ mit $B_u \neq O$. Im Falle $uBu = O$ gehört wegen (1.5) auch $A := BuD^{\lambda, U}$ zu $\mathfrak{M}$ und man hat $uAu = -\lambda(u)uB(Uu)$. Wegen $B_u \neq O$ kann man λ und U so wählen, daß $uAu \neq O$ gilt.

Behauptung 2. *Es gibt $A \in \mathfrak{M}$ mit $A_u = Id$.* Man wählt $B \in \mathfrak{M}$ nach Behauptung 1 und setzt $U = Id$ in (1.5) ein. Für geeignetes λ erhält man ein Element $A := BuD^{\lambda, Id}$ in $\mathfrak{M}$ mit $A_u = Id$.

Ist nun $A \in \mathfrak{M}$ mit $A_u = Id$ gefunden, so ergibt (1.4a) $AuC^{\alpha, a} = C^{\alpha, a}$, so daß alle $C^{\alpha, a}$ zu $\mathfrak{M}$ gehören.

Satz 1.5. *Ist k ein Körper und $u \neq O$, so ist die Algebra $\operatorname{Alg}_u X$ einfach.*

Beweis: Sei $\mathfrak{M} \neq O$ ein zweiseitiges Ideal in $\operatorname{Alg}_u X$. Aus (1.4b) entnimmt man im Falle $A_u = O$

$$[C^{\alpha, a} u A]_u = \alpha(u, u) A_a$$

für alle α und alle $a \in X$. Damit enthält $\mathfrak{M}$ ein B mit $B_u \neq O$, so daß $\mathfrak{M}$ nicht in $\mathfrak{N}_u$ enthalten ist. Lemma 1.4 gibt nun die Behauptung.

5. *Die Eins-Räume von* $\operatorname{Alg}_u X$ *für gewisse Idempotente.* Ist u eine Links-Eins von X_A, also $A_u = Id$, so ergibt (III'') sofort $AuB = B$ für alle $B \in \operatorname{Alg} X$. Damit ist A eine Links-Eins von $\operatorname{Alg}_u X$.

Bemerkung 3. *Ist k ein Körper und A eine Links-Eins von $\operatorname{Alg}_u X$, so ist u eine Links-Eins von X_A.* Man wählt dazu $U = Id$ in (1.4c'). Mit analogen Schlüssen kann man sehen, daß $\operatorname{Alg}_u X$ *keine* Rechts-Eins enthält.

Sei nun $A \in \operatorname{Alg} X$ und sei $e = e_A$ das Einselement von X_A. Damit ist A eine Links-Eins, also ein *Idempotent* von $\operatorname{Alg}_e X$. Man definiert

$$q = q_A : \operatorname{Alg} X \to X, \quad q(B) := eBe.$$

Ohne Mühe verifiziert man nun

$$(BeA)eA = -A_{q(B)} \cdot A = [(BeA)eA]eA$$

für $B \in \operatorname{Alg} X$. Wie man sieht, hat der Endomorphismus $B \mapsto BeA$ von $\operatorname{Alg} X$ höchstens die Eigenwerte 0 und 1. Man setzt daher

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_1(A) &:= \{B;\, B \in \operatorname{Alg} X,\ BeA = B\},\\
\mathfrak{F}_0(A) &:= \{B;\, B \in \operatorname{Alg} X,\ (BeA)eA = 0\},\\
B^{(1)} &:= (BeA)eA = -A_{q(B)} \cdot A \in \mathfrak{F}_1(A),\\
B^{(0)} &:= B - (BeA)eA = B + A_{q(B)} \cdot A \in \mathfrak{F}_0(A).
\end{aligned}$$

Es folgt $B = B^{(1)} + B^{(0)}$ und $\operatorname{Alg} X = \mathfrak{F}_1(A) + \mathfrak{F}_0(A)$.

Lemma 1.6. *Die Abbildung $u \mapsto AuA$ ist eine Bijektion von X auf $\mathfrak{F}_1(A)$ mit Umkehrabbildung $q : \mathfrak{F}_1(A) \to X$. Speziell gilt $q(AuA) = u$.*

Beweis: Sei $B \in \mathfrak{F}_1(A)$, also $B = BeA = -B_e \cdot A$ und $B_e = A_{eBe} = A_{q(B)}$. Damit wird $B = AuA$ mit $u := q(B)$. Ist umgekehrt $B = AuA$ für ein $u \in X$, so folgt $B_e = -(A_u \cdot A)_e = A_u$ und daher $BeA = -B_e \cdot A = -A_u \cdot A = AuA = B$

Nach diesem Lemma *entsprechen die Elemente von $\mathfrak{F}_1(A)$ genau den Mutationen X_{AuA} von X_A* (vergl. (III*)).

6. *Der Fall einer kommutativen Algebra.* Wie in 5 habe X_A, $A \in \operatorname{Alg}^+ X$, ein Einselement e. Wegen 2 folgt dann $\mathfrak{F}_1(A) \subset \operatorname{Alg}^+ X$. Mit Hilfe von $(A_b \cdot A)_e = -A_b$ und $(A_a \cdot A)_u e = -uAa$ berechnet man

$$[(AaA)u(AbA)]_e = -[(A_a \cdot A)_u \cdot (A_b \cdot A)]_e =$$

$$= [(A_a \cdot A)_u, A_b] - (A_b \cdot A)_{uAa} = [[A_a, A_u], A_b] + A_{bA(uAa)},$$

so daß man wegen (III)

$$q((AaA)u(AbA)) = a(AuA)b \quad \text{für } a, b, u, \in X \tag{1.6}$$

erhält. Ist $\mathfrak{M}$ ein Teilmodul von $\mathfrak{F}_1(A)$, so wird wegen Lemma 1.6

$$\mathfrak{M} = \{A u A;\, u \in q(\mathfrak{M})\}. \tag{1.7}$$

Lemma 1.7. *Sei $A \in \mathrm{Alg}^+ X$ und X_A unitär. Für einen Teilmodul $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{F}_1(A)$ sind äquivalent:*

a) *$\mathfrak{M}$ ist für jedes $u \in X$ eine kommutative Teilalgebra von* $\mathrm{Alg}_u X$.

b) *$\mathfrak{M}$ ist für jedes $u \in X$ eine Teilalgebra von* $\mathrm{Alg}_u X$.

c) *$(X, \mathfrak{M})$ ist ein Unter-Tripel-System von* $(X, \mathrm{Alg}\, X)$.

d) (1) *$a(A u A) b \in q(\mathfrak{M})$ für alle $a, b \in q(\mathfrak{M})$ und $u \in X$.*
   (2) *$(A a A) u (A b A) = A\big(a(A u A) b\big) A$ für alle $a, b \in q(\mathfrak{M})$ und $u \in X$.*

Beweis: Aus a) folgt b), wegen 3 ist ferner b) und c) äquivalent. Sei also $\mathfrak{M}$ eine Teilalgebra von $\mathrm{Alg}_u X$ für jedes $u \in X$. Wegen (1.7) gibt es dann $c \in q(\mathfrak{M})$ mit $(A a A) u (A b A) = A c A$. Bei Beachtung von Lemma 1.6 ergibt (1.6) sofort $c = a(A u A) b$, also Teil c). Da die rechte Seite von (d.2) in a, b symmetrisch ist, folgt a) aus d).

Da Teil d) für Jordan-Algebra X_A uneingeschränkt gültig ist, hat man das *Korollar. Ist X_A eine unitäre Jordan-Algebra ohne* 2-*Torsion, so ist $\mathfrak{F}_1(A)$ für jedes $u \in X$ eine kommutative Teilalgebra von* $\mathrm{Alg}_u X$.

7. *Der endlich-dimensionale Fall.* In diesem Abschnitt sei k ein kommutativer Körper und $X \neq O$ ein Vektorraum über k der endlichen Dimension n. Nach Wahl einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ von X über k definiere man die symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform σ von X durch $\sigma(b_i, b_j) = \delta_{ij}$. Zu jedem $A \in \mathrm{Alg}\, X$ gibt es dann eindeutig bestimmte $A^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$, aus $\mathrm{End}\, X$ mit

$$u A v = \sum_i \sigma(A^{(i)} u, v) b_i. \tag{1.8}$$

Man hat für $\varepsilon = \pm$ (für welches man in Formeln manchmal $\varepsilon = \pm 1$ zu lesen hat)

$$A \in \mathrm{Alg}^\varepsilon X \Leftrightarrow [A^{(i)}]^\sigma = \varepsilon A^{(i)}, \tag{1.9}$$

wobei für ein $T \in \operatorname{End} X$ mit T^σ der bezüglich σ adjungierte Endomorphismus bezeichnet wird.

Für $A, B \in \operatorname{Alg} X$ definiert man

$$\beta(A,B) := \sum_i \operatorname{Spur}\{A^{(i)\sigma} B^{(i)}\}. \tag{1.10}$$

Offenbar ist β eine (von der Wahl der Basis $b_1, \ldots, b_n$ abhängige) symmetrische Bilinearform von $\operatorname{Alg} X$. Man beweist ohne Mühe

Lemma 1.8. a) *β ist nicht-ausgeartet.*

b) *Für $T \in \operatorname{End} X$ und $A, B \in \operatorname{Alg} X$ gilt* $\beta(T \cdot A, B) = \beta(A, T^\sigma \cdot B)$.

c) *Ist die Chrakteristik von k nicht 2, so ist* $\operatorname{Alg} X$ *die β-orthogonale Summe von* $\operatorname{Alg}^+ X$ *und* $\operatorname{Alg}^- X$.

Man hatte in 1 gesehen, daß die $\operatorname{Alg}^\varepsilon X$ bezüglich $(T, A) \mapsto T \cdot A$ beide $(\operatorname{End} X)^-$-Lie-Moduln sind. Für $n > 1$ ist keiner dieser Moduln einfach: Sei für $\lambda \in X^*$ das Element $B^{\lambda,\varepsilon}$ von $\operatorname{Alg}^\varepsilon X$ gegeben durch

$$u(B^{\lambda,\varepsilon})v := \lambda(u)v + \varepsilon\lambda(v)u,$$

und $\mathfrak{U}^\varepsilon$ der von den $B^{\lambda,\varepsilon}$, $\lambda \in X^*$, aufgespannte Teilmodul von $\operatorname{Alg}^\varepsilon X$. Wegen (I) folgt $T \cdot B^{\lambda,\varepsilon} = -B^{\lambda \circ T, \varepsilon}$ für $T \in \operatorname{End} X$, *so daß sich* $\mathfrak{U}^\varepsilon$ *als ein* $(\operatorname{End} X)^-$-*Lie-Modul erweist.* Entsprechend zeigt (I'), daß

$$\mathfrak{B}^\varepsilon := \{A\,;\, A \in \operatorname{Alg}^\varepsilon X,\ \operatorname{Spur} A_u = 0 \text{ für alle } u \in X\}$$

ebenfalls ein $(\operatorname{End} X)^-$-*Lie-Modul ist.*

Bei Beachtung von (1.8) und (1.10) berechnet man für $A \in \operatorname{Alg}^\varepsilon X$

$$\operatorname{Spur}(B^{\lambda,\varepsilon})_u = (n+\varepsilon)\lambda(u), \tag{1.11}$$

$$\operatorname{Spur} A_u = \sigma(s_A, u) \text{ mit } s_A := \varepsilon \sum_i A^{(i)} b_i, \tag{1.12}$$

$$\beta(B^{\lambda,\varepsilon}, A) = 2\varepsilon\sigma(a, s_A) \text{ mit } \lambda(u) := \sigma(a,u). \tag{1.13}$$

Ein Vergleich von (1.11) und (1.12) ergibt

$$s_B = (n+\varepsilon)a, \text{ falls } B = B^{\lambda,\varepsilon},\ \lambda(u) = \sigma(a,u).$$

Wegen (1.13) folgt daher das

Lemma 1.9. *Teilt die Charakteristik von k nicht* $2(n+\varepsilon)$, *dann ist* $\mathrm{Alg}^\varepsilon X$ *die* β*-orthogonale Summe von* $\mathfrak{U}^\varepsilon$ *und* $\mathfrak{B}^\varepsilon$.

§ 2. Lie-Teilalgebren der Standard-Algebra

1. *Die Standard-Algebra von* X. Die Elemente des k-Moduls

$$\mathrm{Stand}\, X := X \oplus \mathrm{End}\, X \oplus \mathrm{Alg}\, X$$

schreibt man unmißverständlich in der Form $\Phi = u \oplus T \oplus A$. In Stand X wird ein anti-kommutatives Produkt $(\Phi, \Psi) \mapsto [\Phi, \Psi]$ definiert durch

$$[T,S] := TS - ST,\ [T,u] := Tu,\ [T,A] := T \cdot A,$$
$$[A,u] := A_u,\ [u,v] = 0,\ [A,B] = 0,$$

für $u, v \in X$, $T, S \in \mathrm{End}\, X$ und $A, B \in \mathrm{Alg}\, X$. Damit ist $(\mathrm{End}\, X)^-$ als Teilalgebra in Stand X eingebettet und sowohl X als auch Alg X sind Null-Teilalgebren. Ferner gelten die Kompositionsregeln

$$[X, \mathrm{End}\, X] \subset X,\ [\mathrm{End}\, X, \mathrm{Alg}\, X] \subset \mathrm{Alg}\, X,\ [X, \mathrm{Alg}\, X] \subset \mathrm{End}\, X.$$

Mit dieser Konstruktion ist *jedem k-Modul X in kanonischer Weise eine anti-kommutative k-Algebra* Stand X, *die Standard-Algebra von X, zugeordnet.*

Für $\Psi := 0 \oplus \mathrm{Id} \oplus 0$ und $(\mathrm{ad}\, \Psi)\Phi := [\Psi, \Phi]$ erhält man $(\mathrm{ad}\, \Psi)(u \oplus T \oplus A) = u \oplus 0 \oplus (-A)$. Folglich ist $(\mathrm{ad}\, \Psi)^3 = \mathrm{ad}\, \Psi$ und X, End X bzw. Alg X sind die Eigenräume von ad Ψ zu den Eigenwerten 1, 0 bzw. -1, sofern X keine 2-Torsion zuläßt.

Der Definition entnimmt man, daß ein Teilmodul $\mathfrak{B} \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}$ von Stand X genau dann eine Teilalgebra ist, wenn gilt

(a) $\mathfrak{T}$ ist Teilalgebra von $(\mathrm{End}\, X)^-$,

(b) $T\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$ für alle $T \in \mathfrak{T}$,

(c) $\qquad T \cdot \mathfrak{M} \subset$ für alle $T \in \mathfrak{T}$,

(d) $\qquad A_u \in \mathfrak{T}$ für alle $u \in \mathfrak{B}$ und $A \in \mathfrak{M}$.

Von einem besonderen Interesse sind die Teilmoduln von Stand X der Form $X \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}$. Im Hinblick auf Bedingung (d) definiert man für jede Teilalgebra $\mathfrak{T}$ von $(\operatorname{End} X)^-$

$$M(\mathfrak{T}) := \{A\,;\, A \in \operatorname{Alg} X,\ A_u \in \mathfrak{T} \text{ für alle } u \in X\}.$$

Diese Bildung tritt in spezieller Situation schon bei O. Rothaus [9] auf.

Wegen (I′) *ist* $M(\mathfrak{T})$ *ein* T*-Lie-Modul bezüglich* $(T, A) \mapsto T \cdot A$. Man erhält damit das

Lemma 2.1. *Ein Teilmodul* $X \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}$ *von* Stand X *ist genau dann eine Teilalgebra von* Stand X, *wenn gilt:*

a) $\mathfrak{T}$ *ist eine Teilalgebra von* $(\operatorname{End} X)^-$.

b) $\mathfrak{M}$ *ist* $\mathfrak{T}$*-Teilmodul von* $M(\mathfrak{T})$.

Korollar. Für jede Teilalgebra $\mathfrak{T}$ *von* $(\operatorname{End} X)^-$ *ist* $X \oplus \mathfrak{T} \oplus \oplus M(\mathfrak{T})$ *eine Teilalgebra von* Stand X.

2. *Lie-Teilalgebren von* Stand X. Zur Behandlung der Lie-Teilalgebren definiert man das Jacobi-Produkt von drei Elementen $\Phi, \Psi, \Omega \in$ Stand X durch $J(\Phi, \Psi, \Omega) := [\Phi, [\Psi, \Omega]] + [\Psi, [\Omega, \Phi]] + [\Omega, [\Phi, \Psi]]$. Mit Hilfe von 1 verifiziert man einerseits

$$(2.1) \quad J(u, v, A) = vAu - uAv,\ J(u, A, B) = AuB - BuA,$$

für $u, v \in X$ und $A B \in \operatorname{Alg} X$, und andererseits, daß alle hiervon „wesentlich verschiedenen" Jacobi-Produkte Null sind, wenn die Argumente aus X, End X bzw. Alg X genommen werden. Es folgt daher

Lemma 2.2. *Eine Teilalgebra* $X \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}$ *von* Stand X *ist genau dann eine Lie-Algebra, wenn*

$$uAv = vAu \quad \textit{und} \quad AuB = BuA$$

für alle $u, v \in X$ *und* $A, B \in \mathfrak{M}$ *gilt.*

Der Definition des Produktes in Stand X entnimmt man, daß der Teilmodul

$$\mathrm{Stand}^+X := X \oplus \mathrm{End}\, X \oplus \mathrm{Alg}^+X$$

eine *Teilalgebra* ist.

Bemerkung 1. *In* Stand^+X *ist das Produkt zweier beliebiger* Jacobi-*Produkte Null.* Denn wegen (2.1) liegt jedes Jacobi-Produkt in Alg^+X und dies ist eine Null-Algebra von Stand^+X.

Wegen Lemma 2.2 ist jede Lie-Teilalgebra von Stand X schon in Stand^+X enthalten. In Analogie zu $M(\mathfrak{T})$ definiert man daher für jede Teilalgebra $\mathfrak{T}$ von $(\mathrm{End}\, X)^-$ den k-Modul

$$M^+(\mathfrak{T}) := \{A\,; A \in \mathrm{Alg}^+X,\ A_u \in \mathfrak{T} \text{ für alle } u \in X\}.$$

Man sieht wieder, *daß* $M^+(\mathfrak{T})$ *ein* $\mathfrak{T}$*-Lie-Modul bezüglich* $(T, A) \mapsto T \cdot A$ *ist.*

Eine Kombination der Lemmata 2.1 und 2.2 führt zu

Lemma 2.3. *Ein Teilmodul* $X \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}$ *von* Stand$^+ X$ *ist genau dann eine Lie-Teilalgebra von* Stand^+X, *wenn gilt:*

a) $\mathfrak{T}$ *ist eine Teilalgebra von* $(\mathrm{End}\, X)^-$.
b) $\mathfrak{M}$ *ist* $\mathfrak{T}$*-Teilmodul von* $M^+(\mathfrak{T})$.
c) $AuB = BuA$ *für alle* $u \in X$ *und* $A, B \in \mathfrak{M}$.

Das Beispiel $\mathfrak{T} = \mathrm{End}\, X$, $\mathfrak{M} = \mathrm{Alg}^+X$, zeigt, daß die Bedingung c) nicht immer aus a) und b) folgt.

Man entnimmt diesem Lemma, daß $X \oplus \mathfrak{T} \oplus M^+(\mathfrak{T})$ eine Lie-Algebra darstellt, sofern c) für $M^+(\mathfrak{T})$ erfüllt ist. In § 3.2 und 3.3 werden hierfür einige Beispiele angegeben.

3. *Eine duale Konstruktion.* Bisher hatte man nach Vorgabe einer Teilalgebra $\mathfrak{T}$ von $(\mathrm{End}\, X)^-$ Konstruktionen betrachtet, die zu Lie-Teilalgebren von Stand^+X führen. Umgekehrt kann man von einem Teilmodul $\mathfrak{M}$ von Alg^+X ausgehen und im Hinblick auf Bedingung (c) von 1

$$S(\mathfrak{M}) := \{T; T \in \mathrm{End}\, X, T \cdot \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}\}$$

definieren. Wegen (1) *ist* $S(\mathfrak{M})$ *eine Teilalgebra von* $(\mathrm{End}\, X)^-$ *und* $\mathfrak{M}$ *ist ein* $S(\mathfrak{M})$*-Lie-Modul bezüglich* $(T, A) \mapsto T \cdot A$. Die Bedingung (a) bis (c) von 1 sind daher für $X \oplus S(\mathfrak{M}) \oplus \mathfrak{M}$

erfüllt und (d) bedeutet $AuB \in \mathfrak{M}$ für alle $A, B \in \mathfrak{M}$. Zusammen mit Lemma 2.2 erhält man

Lemma 2.4. *Ein Teilmodul* $X \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}$ *von* $\mathrm{Stand}^+ X$ *ist genau dann eine Lie-Teilalgebra von* $\mathrm{Stand}^+ X$, *wenn gilt:*

a) $\mathfrak{M}$ *ist für jedes* $u \in X$ *eine kommutative Teilalgebra von* $\mathrm{Alg}_u X$.

b) $\mathfrak{T}$ *ist eine Teilalgebra von* $S(\mathfrak{M})$.

Ein Vergleich mit Lemma 1.2 ergibt das

Korollar. Ist $X \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}$ *eine Teil-Lie-Algebra von* $\mathrm{Stand}^+ X$ *und enthält* X *keine* 2- *und* 3-*Torsion, dann ist* X_A *für jedes* $A \in \mathfrak{M}$ *eine Jordan-Algebra.*

Damit ist ein Ergebnis von K. Meyberg [7] erneut bewiesen.

4. *Die Einfachheit der Standard-Algebra.* Zunächst betrachte man *zerfallende* Ideale, d. h. Ideale von Stand X der Form

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}.$$

Die Idealeigenschaft von $\mathfrak{Q}$ übersetzt sich wegen **1** in

(2.2) $\quad \mathfrak{T}$ ist Ideal von $(\mathrm{End}\, X)^-$,

(2.3) $\quad \mathfrak{T}X \subset \mathfrak{B}, (\mathrm{End}\, X)\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$,

(2.4) $\quad \mathfrak{T} \cdot \mathrm{Alg}\, X \subset \mathfrak{M}, (\mathrm{End}\, X) \cdot \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$,

(2.5) $\quad A_u \in \mathfrak{T}$ sowohl für $u \in X$, $A \in \mathfrak{M}$ als auch für $u \in \mathfrak{B}$, $A \in \mathrm{Alg}\, X$.

Man sieht, daß $\mathfrak{B} = O$ schon $\mathfrak{Q} = O$ nach sich zieht.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{T}(X)$ den von allen $A_u, u \in X, A \in \mathrm{Alg}\, X$, erzeugte Teilmodul von End X, so zeigt (I'), daß $\mathfrak{T}(X)$ ein Ideal von $(\mathrm{End}\, X)^-$ ist. Weiter sei $\mathfrak{M}(X)$ der von allen AuB für $u \in X$ und $A, B \in \mathrm{Alg}\, X$ erzeugte Teilmodul von Alg X. Man verifiziert nun ohne Mühe, daß

$$\mathfrak{Q}(X) := X \oplus \mathfrak{T}(X) \oplus \mathfrak{M}(X)$$

ein Ideal in Stand X ist.

Lemma 2.5. *Sei* X *als* (End X)-*Linksmodul einfach und* $\mathfrak{Q} \neq O$ *ein zerfallendes Ideal von* Stand X. *Dann gilt* $\mathfrak{Q}(X) \subset \mathfrak{Q}$.

Beweis: Man schreibt $\mathfrak{Q}$ wie oben und entnimmt (2.2) sofort $\mathfrak{V} = X$. Wegen (2.5) folgt $\mathfrak{T}(X) \subset \mathfrak{T}$ und (2.4) liefert $A_u \cdot B \in \in M$ für $u \in X$ und $A, B \in \operatorname{Alg} X$. Damit gilt auch $\mathfrak{M}(X) \subset \mathfrak{M}$.

Bemerkung 2. *Ist* $\operatorname{Alg} X = O$, *so wird* $\operatorname{Stand} X = X \oplus \operatorname{End} X$ *und* $\mathfrak{Q}(X) = X$. *Die Standard-Algebra ist also nicht einfach.* Das Beispiel $k := \mathbf{Z}$, $X := \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$, zeigt, daß dieser Fall auch eintritt. Im Gegensatz hierzu gilt jedoch

Satz 2.6. *Ist k ein Körper der Charakteristik* $\neq 2$, *dann sind die Algebren* $\operatorname{Stand} X$ *und* $\operatorname{Stand}^+ X$ *einfach.*

Beweis: Sei $\mathfrak{Q} \neq O$ ein Ideal von $\operatorname{Stand} X$. Wegen $[O \oplus Id \oplus O, u \oplus T \oplus A] = u \oplus O \oplus (-A)$ zerfällt $\mathfrak{Q}$, also $\mathfrak{Q} = \mathfrak{V} \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}$. Man kann nun Lemma 2.5 anwenden oder direkt mit (2.2) bis (2.5) schließen:

Wegen (2.3) folgt $\mathfrak{V} = X$ und (2.5) liefert $\mathfrak{T} = \operatorname{End} X$. Für $T = Id$ erhält man $\mathfrak{M} = \operatorname{Alg} X$ aus (2.4).

Der Beweis der Einfachheit von $\operatorname{Stand}^+ X$ geht analog.

Bemerkung 3. *Für einen Körper k kann gezeigt werden, daß jede Derivation von* $\operatorname{Stand} X$ *die Form* $\Phi \mapsto [O \oplus T \oplus O, \Phi]$ *mit* $T \in \operatorname{End} X$ *hat.*

§ 3. Einige Beispiele für $M^+(\mathfrak{T})$

1. Es sei k ein Körper der Charakteristik ungleich 2, $X \neq O$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über k und σ eine symmetrische nichtausgeartete Bilinearform von X. Für $T \in \operatorname{End} X$ bezeichnet T^σ den bezüglich σ adjungierten Endomorphismus zu T.

Die Teilalgebra $\mathfrak{T}$ von $(\operatorname{End} X)^-$ sei bezüglich σ *selbstadjungiert*, d. h. mit T gehört auch T^σ zu $\mathfrak{T}$. Damit hat $\mathfrak{T}$ eine direkte Summendarstellung $\mathfrak{T} = \mathfrak{H} + \mathfrak{P}$ mit

$$\mathfrak{H} := \{T; T \in \mathfrak{T}, T^\sigma = -T\}, \ \mathfrak{P} := \{T; T \in \mathfrak{T}, T^\sigma = T\}.$$

Offenbar gelten die Kompositionsregeln

$$[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \subset \mathfrak{H}, \ [\mathfrak{H}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{P}, \ [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}] \subset \mathfrak{H}.$$

Wie in § 2.1 bzw. § 2.2 sind für Teilvektorräume $\mathfrak{Q}$ von End X die Teilvektorräume

$$M(\mathfrak{Q}) := \{A; A \in \operatorname{Alg} X, A_u \in \mathfrak{Q} \text{ für } u \in X\},$$
$$M^+(\mathfrak{Q}) := \{A; A \in \operatorname{Alg}^+ X, A_u \in \mathfrak{Q} \text{ für } u \in X\}$$

von Alg X bzw. von $\operatorname{Alg}^+ X$ definiert. Für $P \in M(\mathfrak{P})$ ist $\sigma(vPw, u)$ in u, w symmetrisch.

Lemma 3.1. *Sei T bezüglich σ selbstadjungiert. Ein $A \in \operatorname{Alg} X$ gehört genau dann zu $M^+(\mathfrak{T})$, wenn es ein $H \in M(\mathfrak{H})$ und ein $P \in M(\mathfrak{P})$ gibt mit folgenden Eigenschaften:*

a) *A ist durch P gemäß*

$$\sigma(uAv, w) = \sigma(uPv, w) + \sigma(vPu, w) - \sigma(wPu, v)$$

definiert.

b) $\sigma(uHv, w) = \sigma(vPu, w) - \sigma(wPu, v)$.

Beweis: Sei $A \in M^+(\mathfrak{T})$. Dann gilt $A = H + P \in \operatorname{Alg}^+ X$ mit $H \in \mathfrak{H}$ und $P \in \mathfrak{P}$.

Wegen $A_u^\sigma = -H_u + P_u$ erhält man

$$\sigma(uAv, w) = \sigma(v, A_u^\sigma w) = -\sigma(v, uHw) + \sigma(v, uPw),$$

also wegen $H_u = A_u - P_u$

$$\sigma(uAv, w) + \sigma(uAw, v) = 2\sigma(v, uPw).$$

Man vertauscht u, v, w zyklisch zweimal, bildet die alternierende Summe der drei Gleichungen und erhält

$$\sigma(uAw, v) = \sigma(uPw, v) + \sigma(wPv, u) - \sigma(vPu, w).$$

Da P_w selbstadjungiert ist, hat man Teil a) gezeigt. Teil b) erhält man durch Einsetzen von $A = H + P$ in Teil a).

Ist umgekehrt A wie in Teil a) definiert, so gehört A zu $\operatorname{Alg}^+ X$, denn P_w ist selbstadjungiert. Mit Teil b) wird $A_u = H_u + P_u \in \in \mathfrak{T}$ für $u \in X$, also $A \in M^+(\mathfrak{T})$.

Korollar 1. Gilt $T^\sigma = -T$ für alle $T \in \mathfrak{T}$, so ist $M^+(\mathfrak{T}) = O$.

Wendet man das Lemma auf $\mathfrak{T} = (\operatorname{End} X)^-$, so folgt $2P_u = = A_u^\sigma + A_u$, also

Korollar 2. Ein $A \in \mathrm{Alg}^+X$ *ist durch* $A_u + A_u^\sigma$, $u \in X$, *eindeutig bestimmt.*

2. Eine Teilmenge $\mathfrak{H}$ von $(\mathrm{End}\,X)^-$ soll *σ-schief* genannt werden, wenn $H^\sigma = -H$ für alle $H \in \mathfrak{H}$ gilt. Für $u, v \in X$ definiert man $uv^\sigma \in \mathrm{End}\,X$ durch $(uv^\sigma)x := \sigma(v,x)u$. Sei ferner

$$\mathfrak{j}(\mathfrak{H}) := \{a; a \in X, au^\sigma - ua^\sigma \in \mathfrak{H} \text{ für alle } u \in X\}$$

und

$$u(B^a)v := \sigma(a,u)v + \sigma(a,v)u - \sigma(u,v)a,$$

so ist $\mathfrak{j}(\mathfrak{H})$ ein Teilraum von X und $B^a \in \mathrm{Alg}^+X$ für $a \in X$.

Satz 3.2. *Ist* $\mathfrak{H}$ *eine σ-schiefe Teilalgebra von* $(\mathrm{End}\,X)^-$ *und* $\mathfrak{T} := k\,Id + \mathfrak{H}$, *so gilt:*

a) *Die Abbildung* $a \mapsto B^a$ *ist eine Surjektion von* $\mathfrak{j}(\mathfrak{H})$ *auf* $M^+(\mathfrak{T})$.

b) $\mathfrak{H}\,\mathfrak{j}(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{j}(\mathfrak{H})$.

c) *Für* $H \in \mathfrak{H}$ *und* $a \in \mathfrak{j}(\mathfrak{H})$ *gilt* $H \cdot B^a = B^{Ha}$.

d) *Im Falle* $\mathfrak{j}(\mathfrak{H}) \neq X$ *ist* $\mathfrak{j}(\mathfrak{H})$ *bezüglich σ total isotrop.*

e) *Für* $a, b \in \mathfrak{j}(\mathfrak{H}), u \in X$, *gilt* $B^a u B^b = B^c$ *mit* $c := a(B^u)b \in \in \mathfrak{j}(\mathfrak{H})$.

Beweis: Für $\mathfrak{P} = \{\alpha Id; \alpha \in k\}$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{H} + \mathfrak{P}$, sind Bedingungen von 1 erfüllt. Da $P \in M(\mathfrak{P})$ mit $P_u = \sigma(a,u)Id$ für geeignetes $a \in X$ gleichwertig ist, zeigt Lemma 3.1, daß $A \in M^+(\mathfrak{T})$ mit $A = B^a$, $a \in \mathfrak{j}(\mathfrak{H})$, gleichwertig ist. Teil b) entnimmt man $[H, au^\sigma - ua^\sigma] \in \mathfrak{H}$ für $H \in \mathfrak{H}$ und Teil c) folgt aus (I). Für $a, b \in \mathfrak{j}(\mathfrak{H})$ ist wegen b) auch $(au^\sigma - ua^\sigma)b \in \mathfrak{j}(\mathfrak{H})$, also $\sigma(a,b)u \in \in \mathfrak{j}(\mathfrak{H})$ für alle $u \in X$. Hieraus entnimmt man Teil d). Teil e) ist ohne Mühe nachzurechnen, wobei $B^c \in M^+(\mathfrak{T})$ aus $B_u^a \in \mathfrak{T}$ für $u \in X$ folgt.

Offenbar sind die Bedingungen von Lemma 2.2 erfüllt, man hat daher das

Korollar. $X \oplus \mathfrak{T} \oplus M^+(\mathfrak{T})$ *ist eine Lie-Teilalgebra der Standard-Algebra von* X.

Dieser Satz gibt eine volle Klasse von Beispielen, für welche $M^+(\mathfrak{T})$ nicht-trivial ist: Geht man nämlich von einem Teilraum V von X aus, der bezüglich σ total isotrop ist und bezeichnet mit $\mathfrak{H} := (V, \sigma)$ den von allen $au^\sigma - ua^\sigma$, $a \in V$, $u \in X$, aufgespannten Teilraum von End X, so verifiziert man

(1) $\mathfrak{H} := (V, \sigma)$ ist eine σ-schiefe Teilalgebra von $(\mathrm{End}\, V)^-$,

(2) $\mathfrak{j}(\mathfrak{H}) = V$.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit Satz 3.2, so erhält man

$$M^+(k \cdot Id + \mathfrak{H}) = M^+((\mathfrak{j}(\mathfrak{H}), \sigma))$$

für jede σ-schiefe Teilalgebra $\mathfrak{H}$ von $(\mathrm{End}\, X)^-$. Durch $M^+(\mathfrak{T})$ wird daher in der vorliegenden Situation nur die Teilalgebra $(\mathfrak{j}(\mathfrak{H}), \sigma)$ von $\mathfrak{H}$ gemessen.

Bemerkung 1. *Wählt man* $\mathfrak{H} = \{T; T \in \mathrm{End}\, X, T^\sigma = -T\}$, *so wird* $\mathfrak{j}(\mathfrak{H}) = X$ *und man erhält durch* $(u, v, w) \mapsto \{uvw\} := u(B^v)w$ *ein Standard-Jordan-Tripel-System.*

3. Für ein weiteres Beispiel geht man von einer kommutativen Algebra $\mathfrak{A} = X_L$ mit Einselement e aus und schreibt vereinfacht $L(u) = L_u$ und

$$uv := uLv = L(u)v.$$

Es wird angenommen, daß die Spurform $\sigma(u, v) := \mathrm{Spur}\, L(uv)$ nicht-ausgeartet und assoziativ ist. Speziell sind alle $L(u)$ bezüglich σ selbstadjungiert.

Für $D \in \mathrm{Der}\, \mathfrak{A}$ gilt $[D, L(u)] = L(Du)$, so daß $\sigma(e, Du) = 0$, also $D^\sigma e = 0$ gilt. Man erhält $0 = \sigma(e, D(uv)) = \sigma(Du, v) + \sigma(u, Dv)$, so daß $\mathrm{Der}\, \mathfrak{A}$ eine σ-schiefe Teilalgebra von $(\mathrm{End}\, X)^-$ ist.

Lemma 3.3. *Sei* $\mathfrak{Q}$ *ein Ideal von* $\mathfrak{A}$ *mit*

$$[L(\mathfrak{Q}), L(\mathfrak{A})] \subset \mathrm{Der}\, \mathfrak{A}, \quad (\mathrm{Der}\, \mathfrak{A})\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{Q},$$

dann ist $A \in M^+((\mathrm{Der}\, \mathfrak{A} + L(\mathfrak{Q}))$ *gleichwertig mit* $A = LaL$, $a \in \mathfrak{Q}$.

Beweis: Man setzt $\mathfrak{H} := \mathrm{Der}\, \mathfrak{A}, \mathfrak{P} := L(\mathfrak{Q})$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{H} + \mathfrak{P}$ und sieht, daß die Voraussetzungen von 1 wieder erfüllt sind. Ein

$P \in M(\mathfrak{P})$ hat die Form $P_u = L(Su)$ mit einer linearen Abbildung $S : X \to \mathfrak{Q}$. Wegen Lemma 3.1 kann jedes $A \in M^+(\mathfrak{T})$ daher geschrieben werden als

$$\sigma(uAv, w) = \sigma(Su \cdot v, w) + \sigma(Sv \cdot u, w) - \sigma(Sw \cdot u, v),$$

folglich

$$uAv = Su \cdot v + u \cdot Sv - S^\sigma(uv).$$

Die weitere Bedingung von Lemma 3.1 lautet

$$H_u := L(u)S - S^\sigma L(u) \in \operatorname{Der} \mathfrak{A} \text{ für alle } u \in X.$$

Man wendet dies auf e an und bekommt $u \cdot Se = S^\sigma u$, also $S^\sigma = L(a) = S$ mit $a := Se \in \mathfrak{Q}$. Damit folgt

$$uAv = u(av) + v(au) - a(uv) = u(LaL)v$$

und dies ist die Behauptung.

Man kann wieder zeigen, daß die Bedingungen von Lemma 2.2 erfüllt sind.

4. Als letztes Beispiel soll ein von J. R. Faulkner [2] angegebenes Verfahren in die vorliegende Situation eingeordnet werden: Man geht von einer Lie-Algebra $\mathfrak{T}$ aus, von der sogleich angenommen wird, daß sie eine Teilalgebra von $(\operatorname{End} X)^-$ ist. Weiter sei eine assoziative symmetrische und nicht-ausgeartete Bilinearform $\alpha : \mathfrak{T} \times \mathfrak{T} \to k$ gegeben. Zu jedem $\lambda \in X^*$ und $u \in X$ wird ein $A_u^\lambda \in \mathfrak{T}$ erklärt durch

$$\alpha(T, A_u^\lambda) = \lambda(Tu) \text{ für alle } T \in \mathfrak{T}.$$

Damit ist $A^\lambda, u \mapsto A_u^\lambda$, ein Element von $\operatorname{Alg} X$ und der Definition entnimmt man

$$A^\lambda \in M(\mathfrak{T}) \text{ für } \lambda \in X^*.$$

Für $T \in \mathfrak{T}$ verifiziert man ohne Mühe

$$T \cdot A^\lambda = -A^{\lambda \circ T}, \lambda \in X^*,$$

und damit

$$(A^\lambda)u(A^\mu) = A^\varrho \text{ mit } \varrho := \mu \circ A_u^\lambda$$

für $\lambda, \mu \in X$. Das Bild von X^* unter der Abbildung $\lambda \mapsto A^\lambda$ ist daher für jedes $u \in X$ eine Teilalgebra von $\operatorname{Alg} X$.

§ 4. Ein Zusammenhang mit birationalen Abbildungen

1. *Der Begriff des generischen Elementes.* Sei k ein Körper mit einer von 2 und 3 verschiedenen Charakteristik und X ein Vektorraum über k der endlichen Dimension $n > O$. Weiter seien $\tau_1, \ldots, \tau_n$ algebraisch unabhängige Elemente einer Körpererweiterung von k und $\tilde{k} := k(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in $\tau_1, \ldots, \tau_n$ mit Koeffizienten aus k. Ist Y ein weiterer endlich-dimensionaler Vektorraum über k, dann bezeichnet

$$\tilde{Y} := \tilde{k} \oplus_k Y$$

die zugehörige Skalarerweiterung. Nach Wahl einer Basis $c_1, \ldots, c_m$ von Y über k kann man die Elemente y von $\tilde{Y}$ eindeutig schreiben als

$$y = \varphi_1 c_1 + \ldots + \varphi_m c_m \text{ mit } \varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \tilde{k}. \tag{4.1}$$

Ist $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von X über k, dann heißt

$$x = \tau_1 b_1 + \ldots + \tau_n b_n \in \tilde{X}$$

ein *generisches Element von X*. Für $y \in \tilde{Y}$ schreibt man dann auch $y = y(x)$.

Ist u ein Element einer Skalarerweiterung von X und $y \in \tilde{Y}$, so ist durch

$$\Delta_x^u y(x) := \frac{d}{d\tau} y(x + \tau u)\Big|_{\tau \to 0}$$

ein Differenzialoperator Δ definiert. Man vergleiche hierzu [1], Kap. I, § 1.

Ist η ein genauer Nenner von $y \in \tilde{Y}$ und ist u aus einer Skalarerweiterung von X, so sagt man, *daß y in u definiert ist*, wenn die Spezialisierung $x \to u$ von η nicht Null ist. Ist dies der Fall, so schreibt man

$$y(u) := y(x)\Big|_{x \to u}$$

Ein $y \in \tilde{Y}$ nennt man (homogenes) *Polynom in x*, wenn in der Darstellung

(4.1) die $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ (homogene) Polynome (gleichen Grades) in $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sind.

2. *Der Zusammenhang mit binären Lie-Algebren.* In [6], Kap. I, wird im k-Vektorraum X die Lie-Algebra Rat X mit dem Produkt $(f,g) \mapsto [f,g]$,

$$[f,g](x) := \Delta_x^{g(x)} f(x) - \Delta_x^{f(x)} g(x), \tag{4.2}$$

betrachtet.

Man bezeichne mit $\mathfrak{P}_r, r = 0, 1, 2, \ldots$, den Teilraum von Rat X, der aus den homogenen Polynomen vom Grad r in x besteht und setzt $\mathfrak{P}_{-1} = O$. Die Menge aller Polynome in x erhält man dann in der Form

$$\mathrm{Pol}\, X := \bigoplus_{r \geq 0} \mathfrak{P}_r.$$

Wegen

$$[\mathfrak{P}_r, \mathfrak{P}_s] \subset \mathfrak{P}_{r+s-1}, \quad r, s = 0, 1, 2, \ldots,$$

ist Pol X eine graduierte Teilalgebra der Lie-Algebra Rat X. In [6] werden sogenannte *binäre Lie-Algebren*, d. h. die Funktion $f(x) = x$ enthaltende Teilalgebren von $\mathfrak{P} := \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$, betrachtet.

In der Bezeichnung von § 2.1 und § 2.2 ist eine k-lineare Injektion

$$\chi : \mathrm{Stand}^+ X \to \mathrm{Pol}\, X$$

vermöge

$$[\chi(u \oplus T \oplus A)](x) := u + Tx + \frac{1}{2}\, xAx$$

definiert. Offenbar ist $\mathfrak{P}$ das Bild von χ. Mit einer elementaren Rechnung verifiziert man nun

Lemma 4.1. *Für* $\Phi, \Psi \in \mathrm{Stand}^+ X$ *gilt*

$$[\chi(\Phi), \chi(\Psi)] = \chi([\Phi, \Psi]) + p,$$

wobei das Polynom p gegeben ist durch

$$2\,p(x) := (xAx)Bx - (xBx)Ax$$

und wobei A bzw. B die in $\mathrm{Alg}^+ X$ *liegenden Anteile von Φ bzw. Ψ sind.*

Da Pol X eine Lie-Algebra ist, erhält man das

Korollar 1. *Eine Teilalgebra* $X \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}$ *von* Stand^+X *ist genau dann eine Lie-Algebra, wenn*

$$(xAx)Bx = (xBx)Ax \tag{4.3}$$

für alle A, B *aus* $\mathfrak{M}$ *gilt. Ist dies der Fall, dann ist ihr Bild eine Teilalgebra von* $\mathfrak{P}$.

Vergleicht man dies mit Lemma 2.3, so sieht man, daß für Teilalgebren $X \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}$ von Stand^+X die Beziehung (4.3) gleichwertig ist mit $AuB = BuA$ für alle $u \in X$ und $A, B \in \mathfrak{M}$.

Korollar 2. *Die Abbildung* χ *induziert eine Bijektion von der Menge der Lie-Teilalgebren* $X \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}$ *mit* $\mathrm{Id} \in \mathfrak{T}$ *von* Stand^+X *auf die Menge der binären Lie-Algebren in* Pol X.

3. *Die zugeordnete Gruppe von birationalen Abbildungen.* Nach dem Korollar 2 können alle Ergebnisse von [6], Kap. I, auf die hier betrachtete Klasse von Teilalgebren von Stand^+X übertragen werden:

Sei dazu $\mathfrak{L} = X \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}$ eine Lie-Teilalgebra von Stand^+X mit $\mathrm{Id} \in \mathfrak{T}$ und in der Bezeichnung von [6], Kap. I, § 2,

$$\mathfrak{Q} := \chi(\mathfrak{L}) = X \oplus \mathfrak{T} \oplus \bar{X}$$

die zugehörige binäre Lie-Algebra. Hierbei ist $\mathfrak{T}$ mit $\{Tx; T \in \mathfrak{T}\}$ identifiziert und

$$\bar{X} = \chi(\mathfrak{M}) = \{p; p(x) = xAx, A \in \mathfrak{M}\}$$

gesetzt.

In der Bezeichnung von § 1.1 sei

$$\Gamma(\mathfrak{L}) := \{W; W \in \mathrm{GL}\,X, W * \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}\}.$$

Ein Vergleich mit [6], Kap. I § 4, zeigt, daß dann $\Gamma(\mathfrak{L})$ mit der dort definierten Gruppe $\Gamma(\mathfrak{Q})$ übereinstimmt.

Man definiert nun

$$t_a(x) := x + a \quad \text{für } a \in X,$$

$$\tilde{t}_A(x) := (\mathrm{Id} + A_x)^{-1} x \quad \text{für } A \in \mathfrak{M},$$

und entnimmt [6], Lemma 2.4, daß $\tilde{t}_A$ mit $\tilde{t}_v$, $v(x) = x A x$, übereinstimmt, also birational ist. Aus [6], Kap. I, § 4, entnimmt man nun den

Satz 4.2. *Sei* $\mathfrak{L} = X \oplus \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{M}$ *eine Lie-Teilalgebra von* Stand^+X *mit* $\mathrm{Id} \in \mathfrak{T}$ *und* $\Xi(\mathfrak{L})$ *die von den birationalen Abbildungen*

$$t_a,\ W \text{ und } \tilde{t}_A$$

für $a \in X$, $W \in \Gamma(\mathfrak{L})$ *und* $A \in \mathfrak{M}$ *erzeugte Gruppe von birationalen Abbildungen.*

Dann gilt:

a) *Jedes* $f \in \Xi(\mathfrak{L})$ *hat die Form* $f = W \circ t_a \circ \tilde{t}_A \circ t_b$ *mit* $W \in \Gamma(\mathfrak{L})$, $a, b \in X$ *und* $A \in \mathfrak{M}$.

b) *Die Teilmengen* $\{t_a;\ a \in X\}$ *und* $\{\tilde{t}_A;\ A \in \mathfrak{M})$ *sind abelsche Untergruppen von* $\Xi(\mathfrak{L})$.

Literatur

[1] Braun, H. und Koecher, M.: Jordan-Algebren, Berlin-Heidelberg, Springer 1966.

[2] Faulkner, J. R.: On the geometry of inner ideals. Journal of Alg. 26, 1–9 (1973).

[3] Kaup, W., Matsushima, Y., und Ochiai, T.: On the automorphisms and equivalences of generalized Siegel domains. Amer. Journal of Math. 92, 475–498 (1970).

[4] Kaup, W.: Einige Bemerkungen über polynomiale Vektorfelder, Jordanalgebren und die Automorphismen von Siegelschen Gebieten. Math. Ann. 204, 131–144 (1973).

[5] Koecher, M.: Imbedding of Jordan-algebras into Lie algebras I, II. Amer. J. Math. 89, 787–816 (1967) und 90, 476–510 (1968).

[6] Koecher, M.: An elementary approach to bounded symmetric domains. Lecture notes, Rice University, Houston, Texas, 1969, und Appendix 1970.

[7] Meyberg, K.: Zur Konstruktion von Lie-Algebren aus Jordan-Tripelsystemen. Manuscripta math. 3, 115–132 (1970).

[8] Meyberg, K.: Jordan-Tripelsysteme und die Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren. Math. Z. 115, 58–78 (1970).

[9] Rothaus, O.: Automorphisms of Siegel domains. Trans. Amer. Math. Soc. 162 (1971).