BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1974

MÜNCHEN 1975

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Konstruktion allgemeiner Konvexitäten

Von Georg Aumann in München

1. Einleitung. Bezeichnet S eine kompakte konvexe Teilmenge des $\boldsymbol{R}^n$ und hX bzw. tX die Bildung der abgeschlossenen konvexen bzw. abgeschlossenen Hülle einer Teilmenge X von S („abgeschlossen" hier verstanden im Sinne der üblichen Topologie im $\boldsymbol{R}^n$), so besagt der Satz von den extremen Punkten:

$$1) \qquad \bigwedge\nolimits_{X \in \mathfrak{P} S} hX = h \bigcap \{tY : Y \in \mathfrak{P} S \wedge hY = hX\}.$$

Kürzlich [1] schlug ich vor, die Funktionalgleichung (1) für zwei Hüllenoperationen t und h allgemein zu studieren und bei ihrem Bestehen von „allgemeiner Konvexität" zu sprechen. Im Folgenden wird in einer angemessen allgemeineren Ordnungsstruktur als der von $\mathfrak{P} S$ die Gleichung (1) studiert und für den „wesentlichen" Fall, d. h. für $t \leq h$, die allgemeine Lösung im Sinne einer direkten und allgemeinen Konstruktion ermittelt: Die Konstruktion ist direkt, d. h. ihre Ausgangsdaten kann man als explizit vorgebbar betrachten, und sie ist allgemein, d. h. bei geeigneter Wahl der Ausgangsdaten liefert ihre Anwendung jede mögliche Lösung. Die oben erwähnte Konvexität besitzt im $\boldsymbol{R}^2$ noch die Besonderheit, daß jede abgeschlossene Teilmenge einer Extremalpunktmenge wieder eine solche Menge ist („Idealeigenschaft").[1] Diese Eigenschaft führt uns auf den Begriff der allgemeinen „i-Konvexität", für welche ebenfalls eine direkte und allgemeine Konstruktion mitgeteilt wird, welche sich allerdings transfiniter Hilfsmittel bedient.

---

[1] Diese Eigenschaft ist auf die Dimensionen $n \leq 2$ beschränkt; hierzu ein Gegenbeispiel im $\boldsymbol{R}^3$ (nach einer Mitteilung von Prof. Dr. E. Thoma): Ein schiefer Kreiskegel C mit der Spitze T, der kreisförmigen Grundfläche K und einer zu K senkrechten Mantellinie $A\,T$ bildet zusammen mit seinem Spiegelbild C' (bzgl. der Grundfläche) einen konvexen Körper $C \frown C'$, dessen abgeschlossene Extremalpunktmenge aus T, T' und dem Rand von K besteht. Die Teilmenge $\{A, T, T'\}$ davon ist keine Extremalpunktmenge.

2. Die Verallgemeinerung. Die durch (1) beschriebene Situation verallgemeinern wir wie folgt: a) An Stelle von $\mathfrak{P}S$ tritt irgendeine nach unten vollständig geordnete Menge V, also eine (teilweise) geordnete Menge $(V, \leq)$, in der für jede Teilmenge V' von V

$$\sqcap V' := \inf V'$$

in V vorhanden ist; wir nennen eine solche Struktur kurz einen D-Halbverband; insbesondere ist $\sqcap \varnothing$ gleich dem größten (vorhandenen) Element von V. b) Auf V betrachten wir Hüllenoperationen, d. h. extensive, isotone und idempotente Abbildungen von V in sich.

1. Satz. Das System $\mathfrak{H}$ aller Hüllenoperationen h auf V ist ein vollständiger Verband vermöge der Ordnungsrelation

$$(2) \qquad h_1 \leq h_2 : \asymp \bigwedge_{x \in V} h_1(x) \leq h_2(x),$$

und für $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{H}$ gilt:

$$(3) \qquad (\inf \mathfrak{H}')(x) = \sqcap \{h'(x) : h' \in \mathfrak{H}'\}$$

$$(4) \qquad \sup \mathfrak{H}' = \inf \{h'' : h'' \in \mathfrak{H} \wedge \bigwedge_{h' \in \mathfrak{H}'} h' \leq h''\}.$$

Wegen eines Beweises siehe [1].

Für die in $\mathfrak{H}$ geltende Ordnung haben wir den

2. Satz. Für je zwei Hüllenoperationen $t, h \in \mathfrak{H}$ sind je zwei der folgenden Aussagen gleichwertig:

$$\text{(a)}\ t \leq h, \qquad \text{(b)}\ h \circ t = h, \qquad \text{(c)}\ t \circ h = h.$$

Beweis. $h \circ t \geq h$ wegen der Extensionalität von t und der Isotonie von h. Wenn nun $t \leq h$, so folgt aus der Isotonie und Idempotenz von h $h \circ t \leq h \circ h = h$. Umgekehrt folgt aus $h \circ t = h$ sofort $t(x) \leq h\big(t(x)\big) = h(x)$ für $x \in V$. Damit ist (a) $\asymp$ (b) gezeigt. Ähnlich ergeben sich die übrigen Behauptungen.

2. 1. Definition der allgemeinen Konvexität. Ist t, h ein Paar von Hüllenoperationen auf V, so heißt die Abbildung

$$x \mapsto e_{t,h}(x) := \sqcap \{t(y) : y \in V \wedge h(y) = h(x)\}, x \in V,$$

die zugehörige (t, h)-Extremaloperation, und h heißt eine (allgemeine) Konvexität bzgl. t, kurz t-konvex, wenn $h = h \circ e_{t,h}$, d. h.

$$\bigwedge_{x \in V} h(x) = h(e_{t,h}(x)). \tag{5}$$

Aus dieser Definition folgt sofort der

3. Satz. Wenn h t-konvex, so ist $e_{t,h} \leq h$.

3. Die Aufgabe, bei gegebenem D-Halbverband V die Funktionalgleichung (5) zu lösen, erleichtern wir uns ein wenig durch eine Äquivalenzerklärung: Bei gleichem h nennen wir zwei Hüllen t_1, t_2 h-äquivalent, wenn $e_{t_1,h} = e_{t_2,h}$.

4. Satz. Ist h t-konvex, so gibt es eine zu t h-äquivalente Hüllenoperation $\underline{t}$ mit $\underline{t} \leq h$, nämlich $\underline{t} = t \sqcap h$.

Beweis. Gemäß 2. (3) ist $x \mapsto (t \sqcap h)(x) := t(x) \sqcap h(x)$, $x \in V$, für beliebige $t, h \in \mathfrak{H}$ eine Hüllenoperation. Wenn nun h t-konvex, so folgt $e_{\underline{t},h}(x) = \bigsqcap \{t(y) \sqcap h(y) : y \in V \wedge h(y) = h(x)\} = h(x) \sqcap e_{t,h}(x) = e_{t,h}(x)$ wegen 3. Satz.

Da $e_{t,h}$ in t isoton ist und es im Sinne des hier entwickelten Konvexitätsbegriffes tunlich ist, möglichst kleine $e_{t,h}$ zu erhalten, so wollen wir uns auf Grund von Satz 4 bei der Lösung von (5) auf solche Paare t, h beschränken, für welche $t \leq h$ gilt; solche Lösungen von (5) nennen wir Hauptlösungen und solche mit $t \leqslant h$ seitliche Lösungen. Auf Grund von Satz 2 können wir (5) für eine Hauptlösung t, h in der Form schreiben

$$\bigwedge_{x \in V} h(t(x)) = h(\bigsqcap \{t(y) : y \in V \wedge h(t(y)) = h(t(x))\}),$$

was eine Aussage ist, in der eigentlich nur von Elementen der Menge

$$F_t := \{t(x) : x \in V\}$$

die Rede ist und welche wir mit Rücksicht darauf, daß F_t ein D-Halbverband ist (vgl. [2]), umschreiben können in

$$\begin{aligned} \bigwedge_{u \in F_t} h(u) = h(\bigsqcap \{u' : u' \in F_t \wedge h(u)) = h(u)\}) = \\ = h(e_{id,h}(u)), \end{aligned} \tag{6}$$

wobei id die identische Abbildung von F_t bezeichnet, d. h. h ist auf F_t id-konvex. Statt id-konvex wollen wir auch primitiv-konvex sagen. Damit ist die Frage nach den Hauptlösungen von (5) zurückgeführt auf die Bestimmung der primitiv-konvexen Hüllenoperationen.

4. Kennzeichnung der primitiv-konvexen Hüllenoperationen. Ist h primitiv-konvex auf V, so ist $e_{id,h}(x)$ das kleinste und $h(x)$ das größte zu x h-hüllengleiche Element. Die durch die Äquivalenz $h(x) = h(y)$ erzeugte (disjunkte) Zerlegung von V in Äquivalenzklassen besteht aus lauter Intervallen

$$[a; b] := \{v : v \in V \wedge a \leq v \leq b\},$$

nämlich den Intervallen

$$[e_{id,h}(x); h(x)], \; x \in V.$$

Jede primitiv-konvexe Hüllenoperation h liefert also eine Intervallzerlegung

$$V = \bigcup\nolimits_{i \in J} [a_i; b_i] \tag{7}$$

allerdings mit einer Besonderheit, nämlich

$$\bigwedge\nolimits_{i,j,x,y} x \in [a_i; b_i] \wedge y \in [a_j; b_j] \wedge x \leq y \succ b_i \leq b_j. \tag{8}$$

In der Tat, aus der linken Seite der Implikation von (8) folgt $b_i = h(x) \wedge b_j = h(y) \wedge x \leq y$, also wegen der Isotonie von h die rechte Seite $b_i \leq b_j$.

Eine Intervallzerlegung (7) von V nennen wir oberhalb isoton, wenn sie (8) erfüllt. Mit (8) gleichwertig ist:

$$\bigwedge\nolimits_{i,j \in J} a_i \leq b_j \succ b_i \leq b_j. \tag{8*}$$

In der Tat, (8*) folgt aus (8) durch Spezialisierung. Umgekehrt ergibt sich aus $a_i \leq x \leq b_i$ und $a_j \leq y \leq b_j$ und $x \leq y$ sofort $a_i \leq b_j$, also mittels (8*) dann $b_i \leq b_j$.

Wir vervollständigen diese Ergebnisse durch den

5. Satz. 1. Für jede primitiv-konvexe Hüllenoperation h auf dem D-Halbverband V stellt das Mengensystem $\{[e_{id,h}(x); h(x)] : x \in V\}$ eine oberhalb isotone Intervallzerlegung von V dar. – 2. Umgekehrt liefert jede oberhalb isotone Intervallzerlegung $\{[a_i; b_i] : i \in J\}$ eine primitiv-konvexe Hüllenoperation h gemäß der Definition

$$h(x) := b_i \text{ für } x \in [a_i; b_i]$$

(wobei $e_{id,h}(x) = a_i$ für $x \in [a_i; b_i]$).

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß die in 2. erklärte Abbildung h eine Hüllenoperation ist. Extensionalität und Idempotenz sind evident. Zum Nachweis der Isotonie von h sei $x \leq y$ und dabei $x \in [a_i; b_i]$ und $y \in [a_j; b_j]$. Daraus folgt $a_i \leq x \leq \leq y \leq b_j$, also nach (8*) $b_i \leq b_j$, d. h. $h(x) \leq h(y)$.

5. Direkte Konstruktion von oberhalb isotonen Intervallzerlegungen. Wir gehen aus von irgendeiner Intervallzerlegung $\mathfrak{Z} := \{[a_i; b_i] : i \in J\}$ von V, wobei wir unterstellen dürfen, daß die Beschaffung einer solchen Zerlegung $\mathfrak{Z}$ „expliziten" Charakter hat. In der Tat, kann man aus jeder beliebig vorgegebenen Wohlordnung der Menge aller Intervalle von V in naheliegender Weise eine (transfinite) Teilfolge auswählen, die eine Zerlegung von V darstellt und man erhält auf diese Weise alle möglichen Intervallzerlegungen von V.

$\mathfrak{Z}$ ändern wir nun ab in eine oberhalb isotone Intervallzerlegung in folgender Weise: Wir bilden

$$b_i^* := \bigsqcap \{b_j \vdots j \in J \wedge b_j \geq a_i\},\ i \in J;$$

offensichtlich ist $a_i \leq b_i^* \leq b_i$, so daß die Intervalle

$$(*) \qquad [a_i; b_i^*],\ i \in J,$$

disjunkt sind. Wir ergänzen die Intervallmenge (*) durch Hinzunahme der (einelementigen) Intervalle

$$(**) \qquad [s; s],\ s \in V \setminus \bigcup \{[a_i; b_i^*] \vdots i \in J\}.$$

Die Intervalle (*) und (**) zusammen bilden eine oberhalb isotone Intervallzerlegung $\mathfrak{Z}^*$ von V

$$(9) \qquad \mathfrak{Z}^* =: k(\mathfrak{Z}).$$

In der Tat, wenn etwa $b_i^* \geq a_k$, so folgt

$$b_j \geq a_i \succ b_j \geq b_i^* \geq a_k,$$

also $b_k^* = \bigsqcap \{b_j \vdots b_j \geq a_k\} \leq \bigsqcap \{b_j : b_j \geq a_i\} = b_i^*$. Damit ist im wesentlichen (8*) nachgewiesen, da die einelementigen Intervalle hier keine Rolle spielen. Schließlich stellen wir noch fest, daß

$$k(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Z}$$

ist, wenn $\mathfrak{Z}$ bereits oberhalb isoton ist. Wir haben damit eine direkt-konstruktive Bestimmung aller oberhalb isotonen Intervallzerlegungen von V im Sinne der Einleitung.

6. Nun sind wir in der Lage, alle Hauptlösungen t, h von (5) zu ermitteln. Wir gehen aus von irgendeiner Hüllenoperation t auf V – t braucht übrigens nicht topologisch, d. h. distributiv zu sein – konstruieren gemäß 4. und 5. im D-Halbverband $F_t \subset V$ irgendeine primitiv-konvexe Hüllenoperation $\tilde{h}$ auf F_t und erweitern diese zu einer Hüllenoperation h auf V gemäß

$$h(x) := \tilde{h}\left(t(x)\right), x \in V. \tag{10}$$

Damit erhalten wir eine Hauptlösung t, h von (5) und, wie aus unseren Betrachtungen hervorgeht, auch alle.

7. i-Konvexität. Das in der Einleitung beschriebene klassische Beispiel der Konvexität weist die Besonderheit auf, daß das System $\mathfrak{E}$ der Extrempunktmengen ein Ideal nach unten im System der abgeschlossenen Mengen ist. Mit den Bezeichnungen von 2. bedeutet dies:

$$\bigwedge_{x, y \in V} x = t(x) \leqslant e_{t,h}(y) \succ x = e_{t,h}(x).$$

(Dies ist offenbar eine Verschärfung der Idempotenz von $e_{t,h}$ ([1], 2.3.1). Bei der nun folgenden Behandlung dieser Art von Konvexitäten gehen wir in der Verallgemeinerung noch einen Schritt weiter und setzen vom zugrunde liegenden Bereich W keine besonderen Verbandseigenschaften voraus, sondern nur die (teilweise) Ordnung. Es sei also jetzt $(W, \leqslant)$ eine geordnete Menge. Ich definiere: Eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von W in disjunkte Intervalle $[a_j; b_j]$, $j \in J$, heißt eine i-Konvexität in W, wenn sie oberhalb isoton ist im Sinne von 4. und wenn außerdem die Menge $E_{\mathfrak{Z}}$ der a_j, $j \in J$, ein Ideal nach unten in W bildet, d. h. gilt:

$$\bigwedge_{x \in W, y \in E_{\mathfrak{Z}}} x \leqslant y \succ x \in E_{\mathfrak{Z}}.$$

Als ein triviales Beispiel einer i-Konvexität sei der Fall erwähnt, daß alle Intervalle einelementig sind.

7.1. Hinsichtlich der Existenz von i-Konvexitäten mit vorgegebenem $E_{\mathfrak{Z}}$ gilt der

6. Satz. Ist W geordnet und A ein Ideal in W, so läßt sich eine Teilmenge W^+ von W mit $W^+ \supset A$ und eine i-Konvexität $\mathfrak{Z}^+$ in W^+ konstruieren mit $E_{\mathfrak{Z}^+} = A$. Die Konstruktion ist direkt und allgemein im Sinne der Einleitung; insbesondere reproduziert sie bei geeigneter Wahl der Ausgangsdaten jede vorgegebene i-Konvexität in W.

(A) Konstruktion. Bei gegebenem Ideal $A \subset W$ betrachten wir die Menge Ω der Intervalle $\omega := [a; z]$ mit $a \in A$, $z \in W \setminus A$ und $\omega \frown A = \{a\}$.

Fall 1. $\Omega = \varnothing$. Dann ist die Konstruktion schon beendet und wir setzen $W^+ := A$ und nehmen für $\mathfrak{Z}^+$ die triviale i-Konvexität in W^+.

Fall 2. $\Omega \neq \varnothing$. Dann nehmen wir als Ausgangspunkt unserer Konstruktion irgendeine Wohlordnung von Ω:

$$\text{(wO)} \qquad \omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_\varrho, \ldots \text{ mit } \varrho < \tau.$$

Als erstes vergrößern wir A durch Hinzufügung (im Sinne der Mengenvereinigung) von $\bar{\omega}_o := \omega_o = [\bar{a}_o;\ \bar{z}_o]$. Ist eine Teilfolgenauswahl aus (wO) bereits bis zu

$$(+) \qquad \bar{\omega}_o, \ldots, \bar{\omega}_\varrho, \ldots \text{ für } \varrho < \sigma$$

getätigt, wobei diese Intervalle paarweise fremd sind und der Isotoniebedingung (8*) genügen, so nehmen wir als $\bar{\omega}_\varrho$ hinzu das erste nach den $\bar{\omega}_\varrho$, $\varrho < \sigma$, in (wO), welches zu allen $\bar{\omega}_\varrho$, $\varrho < \sigma$, fremd ist und wiederum mit diesen zusammen die Isotoniebedingung erfüllt. Gibt es kein solches $\bar{\omega}_\varrho$, so ist die Auswahl beendet: Das Ergebnis ist die transfinite Folge (+) von paarweise fremden Intervallen $\bar{\omega}_\varrho := [\bar{a}_\varrho;\ \bar{z}_\varrho]$, welche die Isotoniebedingung erfüllen. Zu diesen Intervallen nehmen wir noch die einelementigen Intervalle

$$(++) \qquad [b; b] \text{ mit } b \in A \setminus \{\bar{a}_\varrho : \varrho < \sigma\}$$

hinzu und erhalten damit eine oberhalb isotone Intervallzerlegung $\mathfrak{Z}^+$ der Menge

$$W^+ := A \cup \bigcup_{\varrho<\sigma} [\bar{a}_\varrho; \bar{z}_\varrho] \supset A$$

mit $E_{\mathfrak{Z}^+} = A$.

(B) Liegt andererseits eine zu einer i-Konvexität in W gehörige Intervallzerlegung $\mathfrak{Z}$ von W vor mit $E_\mathfrak{Z} = A$, und trifft es sich, daß in einem Abschnitt $0 \leqslant \varrho < \sigma$ von (wO) alle mehrelementigen Intervalle von $\mathfrak{Z}$ und nur diese (einmal und in irgend einer Reihenfolge) aufgeführt sind, dann bricht die Konstruktion ab, wenn dieser Abschnitt restlos aufgebraucht ist. Das Ergebnis der Konstruktion ist in diesem Falle $\mathfrak{Z}^+ = \mathfrak{Z}$ und $W^+ = W$.

Bemerkung. Bei einem endlichen W gibt es nur endlich viele i-Konvexitäten in W und obige Konstruktion liefert u. a. alle diese i-Konvexitäten. Eine eingehende Untersuchung dieses Falles gehört in die Theorie der gerichteten Graphen.

7.2. Die Frage, ob es zu jedem Ideal A in W eine i-Konvexität $\mathfrak{Z}$ in W gibt mit $E_\mathfrak{Z} = A$, ist zu verneinen. Beispiel: Es sei $W := \{v_1, v_2, v_3\}$ mit den einzigen (echten) Ordnungsrelationen $v_1 < v_2$, $v_1 < v_3$. Das Ideal $\{v_1\}$ kann kein $E_\mathfrak{Z}$ einer i-Konvexität $\mathfrak{Z}$ in W sein.

8. Mit den angegebenen Konstruktionen ist zwar der Zugang zu den allgemeinen und den i-Konvexitäten gewonnen; offen bleibt die Frage nach den seitlichen Lösungen von (5), die Klärung der Frage 7.2. und selbstverständlich noch eine Unzahl von weiteren Problemen, die durch den hier (und in [1]) konzipierten Begriff der Konvexität auftauchen. Darüber sei später einmal berichtet.

Literatur

[1] G. Aumann, Kontaktrelationen (3. Mitteilung), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 1973, 79–86.

[2] G. Aumann, Kontaktrelationen. Math. Phys. Semesterber., Band 20, 182 bis 188, 1973.

Nachtrag (8. 5. 1974). Einer freundlichen Mitteilung von Herrn Professor A. Appert, Angers (Frankreich), verdanke ich den Hinweis, daß das Axiom

(K_3) (in meiner Arbeit „Kontakt-Relationen", Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. 1970) sich als „axiome de transitivité" bereits in seiner Note „Sur les topologies transitives", Acad. royale de Belgique, Bull. Cl. Sc. XXIII (1937)-2, 135-142, findet. Dort wird, entgegen dem jetzigen Sprachgebrauch, schon von „Topologie" gesprochen, wenn die Axiome (K_0), (K_1), (K_2), (K_3) (s. meine obige Arbeit) erfüllt sind.