BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1974

MÜNCHEN 1975

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über den 2n-Scheitelsatz von Herrn S. B. Jackson

Von Otto Haupt und Hermann Künneth in Erlangen

Einleitung

1. Von Herrn S. B. Jackson [1] (theorem 7.1.) rührt die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Blaschke-Mukhopadhyaya [6] her, welche so formuliert werden kann: Es sei C eine ebene einfache (geschlossene) orientierte Kurve mit stetiger Krümmung. Weiter sei K_0 ein Kreis derart, daß die endlich vielen gemeinsamen Punkte von C und K_0 sämtlich Schnittpunkte sind und daß es unter den, im Sinne von C orientierten Teilbogen von C, in welche C durch die Punkte von $C \cap K_0$ zerlegt wird, $2n - 1$ gibt ($n \geq 2$), etwa B_i, $i = 1, \ldots, 2n - 1$, mit folgender Eigenschaft: Ist p_{2i-1} Anfangs- und p_{2i} Endpunkt von B_i, so soll die Reihenfolge $p_1, p_2, \ldots p_{2(2n-1)}$ der Orientierung von C entsprechen sowie gleichzeitig einer (geeigneten) Orientierung von K_0. Unter diesen Annahmen besitzt C mindestens $2n$ Scheitel.

2. Die in den Voraussetzungen und in der Behauptung des Jackson'schen Satzes auftretenden Begriffe, wie Scheitel usw., lassen sich ohne Bezugnahme auf metrische Eigenschaften des Kreises definieren, genauer: definieren im Rahmen der Topologie der Ebene. Dies legt die Vermutung nahe, daß der Satz sich verallgemeinern läßt, d. h. daß an Stelle des Systems $\mathfrak{k}_0$ der Kreise (und Geraden) andere Systeme $\mathfrak{k}$ von (ebenen) Kurven treten können, deren jede durch beliebige 3 ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist und stetig von diesen Punkten abhängt. Die Existenz solcher Systeme von „verallgemeinerten Kreisen" ist bekannt; erinnert sei etwa an das System der Kreise, Abstandslinien und Grenzkreise in der hyperbolischen (nicht-euklidischen) Ebene.

3. Ziel der vorliegenden Note ist der Beweis einer Verallgemeinerung des Jacksonschen Satzes im Sinne der Andeutungen in Ziffer 2., d. h. als Ausdehnung des Satzes auf Systeme von „verallgemeinerten Kreisen". Dazu ist eine genauere Untersuchung der durch die Jacksonschen Bogen B_i (vgl. Ziffer 2.) bestimmten

Konfiguration erforderlich (vgl. § 3 der Note). Zum Beweis der Verallgemeinerung dient eine geeignete Modifikation einer von Mukhopadhyaya [6] angegebenen und für den Fall der Kreise (und auch der Kegelschnitte) dargestellten Methode (§ 4 der Note). Die bewiesene Verallgemeinerung enthält, wie verlangt, den Satz von Jackson für Kreise als Spezialfall.

Die größere Allgemeinheit des Satzes von Jackson gegenüber dem von Mukhopadhyaya (in [6]) besteht darin, daß C bei letzterem als Oval angenommen wird, während Jackson eine im Vergleich mit Ovalen weit größere Kurvenklasse einbezieht. Der Satz von Jackson gilt im allgemeinen nicht mehr, wenn C schwächere Differenzierbarkeitseigenschaften besitzt. Beispielsweise gibt es (sogar) Ovale mit genau 2 Scheiteln in bezug auf das System $\mathfrak{k}_0$ der Geraden und Kreise, wobei das Oval von geeigneten Kreisen in 4 Punkten geschnitten wird, also $n = 2$ ist (aber keine $2n$ Scheitel vorhanden sind). Die in Rede stehenden Ovale besitzen sogar überall stetige Tangente und stetige Krümmung, letztere aber mit Ausnahme der beiden Scheitel, in welchen die $\mathfrak{k}_0$-Paratimgente, d. h. der Schmiegkreis, nicht eindeutig bestimmt ist (vgl. [2] Nr. 4.1.2.2.1.).

Die von uns beim Beweise des verallgemeinerten Satzes von Jackson benutzte Abwandlung der Methode von Mukhopadhyaya [6] nimmt direkt Bezug auf die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen bezüglich der Kurve C und zieht die Theorie der ordnungsminimalen Bogen (vgl. [2], Nr. 4.2.) heran. Besagte Abwandlung der Methode scheint bequemer zu handhaben als die originale Fassung von Mukhopadhyaya.

4. Der Umstand, daß nach Mukhopadhyaya [6] ein $2n$-Scheitelsatz für Ovale auch bezüglich des Systems der Kegelschnitte gilt, legt die Frage nach Verallgemeinerung des Jacksonschen Satzes für ebene Kurven C mit entsprechenden Differenzierbarkeitseigenschaften nahe bezüglich Systemen $\mathfrak{k}$ mit ungerader Grundzahl $k \geq 5$ (im Fall der verallgemeinerten Kreise ist $k = 3$). Wir hoffen, auf diese Frage zurückzukommen.

§ 1. Vorbemerkungen

Nachstehend werden Bezeichnungen und einfache Sachverhalte zusammengestellt, auf die später zurückgegriffen wird.

1.1. Grundbereich G, in dem sich die Betrachtungen abspielen, ist eine abgeschlossene Kreisscheibe (oder ein topologisches Bild von ihr). Unter *Bogen* bzw. *Kurven* werden topologische Bilder einer Strecke bzw. einer Kreisperipherie verstanden. Mit C wird bezeichnet eine Kurve in G, gelegentlich auch, wenn ausdrücklich vermerkt, ein Bogen. Unter $C(+)$ und $C(-)$ sind die beiden *Seiten* von C zu verstehen, d. h. die beiden Komponenten von $\underline{G} \setminus C$ falls C Kurve ist, oder falls C ein Bogen ist, der bis auf seine beiden Endpunkte in $\underline{G}$ liegt. Handelt es sich um einen abgeschlossenen, in $\underline{G}$ enthaltenen Bogen B, so werden unter $B(+)$ und $B(-)$ verstanden die beiden Seiten einer Erweiterung von B zu einer Kurve. Sind a, b die Endpunkte eines Bogens B, so setzt man $B: = B(a \mid b)$ und $\underline{B}: = \underline{B}(a \mid b): = B(a \mid b) \setminus \{a\} \setminus \{b\}$; für Kurven C sei $\underline{C}: = C$. Ist $B(a|b)$ orientiert, so gilt im allgemeinen a als „vor b“ gelegener *Anfangspunkt* von B. Sind C, K Bogen oder Kurven mit $x \in \underline{C} \cap \underline{K}$ und ist x isolierter Punkt auf $\underline{C} \cap \underline{K}$, so heißt x *Schnitt-* oder *Stützpunkt* von C und (oder mit) K, je nachdem einseitige Umgebungen von x in $C \setminus \{x\}$ auf verschiedenen Seiten oder auf der gleichen Seite von K liegen; es ist dann x auch Schnitt- bzw. Stützpunkt von K und (mit) C. Enthält $C \cap K$ nur Schnittpunkte, so heißt K *Sekante* von C und C Sekante von K. Ist x Stützpunkt in $C \cap K$ und liegt $K \setminus \{x\}$ in der Nähe von x in $C(\alpha)$, $\alpha: = \pm$, so sagt man auch, *in x werde C von K in $C(\alpha)$ gestützt.* – Ist x *Schnittpunkt* von C und K und ist K orientiert, so sagt man auch: Es *tritt K in x aus* (der Seite) $C(\alpha)$ *auf* (die andere Seite) $C(-\alpha)$ *über*, wenn eine vordere Umgebung V von x auf $K \setminus \{x\}$ in $C(\alpha)$ liegt. – Betr. „vordere Umgebung“ u. a. vgl. [4], § 1.

1.2. Es seien C, K Kurven oder Bogen in G, orientiert und ohne Endpunkte in $\underline{G}$. Es sei K Sekante von C mit endlichem $C \cap K$. Ferner seien x', $x'' \in C \cap K$.

Behauptung. Tritt K in x' aus $C(\alpha)$ auf $C(-\alpha)$ über und in x'' aus $C(\beta)$ auf $C(-\beta)$, so liegt auf C zwischen x' und x'' eine gerade oder ungerade Anzahl von (Schnitt-)Punkten aus $C \cap K$, je nachdem $\alpha = -\beta$ ist oder $\alpha = \beta$. Sind insbesondere x', x'' benachbart auf C (d. h. ist $\underline{C}(x' \mid x'') \cap K = \emptyset$ für einen Teilbogen $C(x' \mid x'')$ von C), so ist $\alpha = -\beta$.

Beweis. Es genügt, den Fall benachbarter x', x'' zu betrachten. Hier gilt $\underset{\smile}{C}(x' \mid x'') \frown K(x' \mid x'') = \emptyset$. Ist Q das von $C(x' \mid x'') \smile K(x' \mid x'')$ begrenzte Gebiet, so liegt eine Umgebung U' von x' auf Q etwa in $K(\beta)$ und dann eine Umgebung von $K(x' \mid x'')$ in Q ebenfalls in $K(\beta)$. Tritt also C in x' aus $K(-\beta)$ nach $K(\beta)$ über, so in x'' aus $K(\beta)$ nach $K(-\beta)$.

1.3. Voraussetzung. (I) Es sei K eine orientierte Sekante des orientierten C, beide ohne Endpunkte in G und mit endlichem $C \frown K$. Für $C_v := C(a \mid b) \subset C$ und $K_v := K(a \mid b) \subset K$ gelte $\underset{\smile}{C}_v \frown K = \emptyset$, so daß ein von $C_v \smile K_v$ begrenztes Gebiet $Q_v := Q(C_v, K_v)$ etwa in $K(\beta)$ enthalten ist. Es liege Q_v, also auch $\underset{\smile}{K}_v$, in der Nähe von a und von b in $C(\alpha)$. – (II) Es existiere ein am nächsten bei b auf $(C \setminus C_v) \frown K_v$ gelegener Punkt c, so daß $\underset{\smile}{C}(b \mid c) \frown K = \emptyset$.

Behauptung. (1) $C' := C(b \mid c) \subset C \setminus \underset{\smile}{C}_v$ und $K' := K(c \mid b) \subset K_v$ begrenzen ein in $K(-\beta)$ enthaltenes Gebiet Q', welches in der Nähe von b und c in $C(\alpha)$ liegt. – (2) Es existiert ein, zu K fremder Teilbogen $\underset{\smile}{C}'' := \underset{\smile}{C}(e \mid d) \subset (C \setminus C_v \setminus C') \frown K(\beta)$ und $K'' := K(e \mid d) \subset \underset{\smile}{K}_v$ derart, daß ein von $C'' \smile K''$ begrenztes Gebiet $Q'' := Q(C'', K'')$ in $K(\beta)$ liegt. Eine Umgebung von C'' in Q'' liegt dann in $C(-\alpha)$.

Beweis. *Betr. Beh.* (1). Da C in b von K geschnitten wird, tritt C in b aus $K(\beta)$ nach $K(-\beta)$ über; wegen $\underset{\smile}{C}' \frown K = \emptyset$ ist daher $\underset{\smile}{C}' \subset K(-\beta)$. Weil $\underset{\smile}{C}' \frown K_v = \emptyset$ und weil $\underset{\smile}{K}_v$ in der Nähe von b in $C(\alpha)$ liegt, gilt dies auch für $\underset{\smile}{K}'$ in der Nähe von (b also von) c und daher auch für Q'.

Betr. Beh. (2). (A) *Entweder* ist $\underset{\smile}{K}' \frown C = \emptyset$. Da eine Umgebung von c auf $C \setminus C_v \setminus C'$ in Q_v liegt und da C in Q_v keine Endpunkte besitzt, tritt C in einem Punkt von $\underset{\smile}{K}(a \mid c) \subset K_v \setminus K'$ aus $K(\beta)$ nach $K(-\beta)$ über. Der zu c auf $C \setminus C_v \setminus C'$ nächstgelegene Punkt aus $C \frown K(a \mid c)$ ist ein d im Sinne der Beh. (2) und dann c ein e.

(B) *Oder* $\underset{\smile}{K}' \frown C \neq \emptyset$. Hier existiert der am nächsten bei b auf $\underset{\smile}{K}'$ gelegene Punkt $e \in (C \setminus C_v \setminus C') \frown \underset{\smile}{K}'$. In dem auf K_v am nächsten bei e gelegenen Punkt $b \in C$ tritt C aus $K(\beta)$ nach $K(-\beta)$ über; gemäß 1.2. tritt daher C in e aus $K(-\beta)$ nach

$K(\beta)$ über. Weil C in Q_v keine Endpunkte besitzt, tritt also C in einem Punkt $d \in C \setminus C_v \setminus C' \setminus C(c \mid e)$ aus $K(\beta)$ wieder nach $K(-\beta)$ über; es sei d der am nächsten bei e gelegene derartige Punkt, also $d \in \underset{\sim}{K}_v$. Somit liegt $\underset{\sim}{C}'' := \underset{\sim}{C}(e \mid d)$ in $K(\beta)$ und damit auch $Q'' := Q(C'', K'')$, wenn $K'' := K(d \mid e) \subset K_v$. Schließlich liegt $\underset{\sim}{K}_v$ in der Nähe von b in $C(\alpha)$, daher auch (gemäß 1.2.) $\underset{\sim}{K}(e \mid b)$ in der Nähe von e in $C(\alpha)$ und folglich K'' in der Nähe von e und d in $C(-\alpha)$. Daraus folgt, daß eine Umgebung von C'' in Q'' ebenfalls in $C(-\alpha)$ liegt.

1.4. Unter Bezugnahme auf die in [4], § 1, gegebenen Definitionen der Begriffe OChSystem, Punktordnungswert POW usw. führen wir ein die

1.4.0. Forderung. Das jeweils betrachtete OChSystem $\mathfrak{k}$ mit G als Grundbereich besitze eine *ungerade* Grundzahl $k = k(\mathfrak{k}) = 2t + 1$, $t \geq 1$, (d. h. jede OCh K, also $K \in \mathfrak{k}$, ist durch beliebige k ihrer Punkte eindeutig bestimmt und hängt stetig von ihnen ab). Ferner sei $K_0 \in \mathfrak{k}$ eine Sekante der Kurve $C \in \underset{\sim}{G}$; dabei sei $C \cup K_0$ $\mathfrak{k}$-*ordinär* (d. h. beliebige k verschiedene Punkte von $C \cup K_0$ liegen auf (genau) einer OCh. Es sei POW $(C; \mathfrak{k})$ *endlich*.

Anmerkung. (1) Bei gerader Grundzahl $k = 2t$, $t \geq 1$, ist keine OCh Kurve, falls keine Grundpunkte existieren (d. h. Punkte die allen $K \in \mathfrak{k}$ gemeinsam sind). Ist nämlich $K \in \mathfrak{k}$ mit $z_\varkappa \in K$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, $z_\varkappa \neq z_\tau$ für $\varkappa \neq \tau$, so existiert ein $K' \in \mathfrak{k}$, welches $z_1, \ldots, z_{k-1}$ und einen zu z_k benachbarten, zu K fremden Punkt z'_k enthält, so daß $K \neq K'$ und daß $K \cap K' = \{z_1, \ldots, z_{k-1}\}$. Wäre nun K Kurve, so müßte $K \cap K'$ eine gerade Anzahl Punkte enthalten also mindestens k, woraus $K = K'$ folgen würde. Benutzt ist dabei, daß weder K noch K' Endpunkte in $\underset{\sim}{G}$ besitzen sollen.

(2) Für spätere Betrachtungen ist nur erforderlich, daß $C \cup W$ $\mathfrak{k}$-ordinär ist, wobei W Vereinigung beliebig kleiner Umgebungen der (Schnitt-)Punkte aus $C \cap K_0$ ist. – Wenn POW $(C; \mathfrak{k})$ endlich ist, dann auch POW $(C; \mathfrak{k} \setminus \{K_0\})$.

Bezeichnung. Im folgenden wird statt $K \in \mathfrak{k}$ mit $u_1, \ldots, u_r \in K$ abkürzend geschrieben: $K(u_1, \ldots, u_r)$.

1.4.1. Voraussetzung

(I). Für die Kurve $C \in \underset{\sim}{G}$ und die Sekante $K_0 \in \mathfrak{k}$ von C sei die Forderung 1.4.0 erfüllt (insbesondere also $k = 2t + 1$).

(II) Es sei $a, b \in C \cap K_0$, $a \neq b$, und $C' := C(a \mid b)$ mit $\underset{\sim}{C}' \cap K_0 = \emptyset$. Ferner sei $S := K(a \mid b)$ derjenige Teilbogen von K_0, für den $S \cup C'$ die Begrenzung eines Gebietes Q ist mit $\bar{Q} \cap (G \setminus \underset{\sim}{G}) = \emptyset$.

(III) Es seien $u_\varkappa \in \underset{\sim}{S}$ bzw. $v_\varkappa \in K_0 \setminus S \setminus C \cap K_0$, $\varkappa = 1, \ldots, k - 1$, mit $u_\varkappa \neq u_\tau$ bzw. $v_\varkappa \neq v_\tau$ für $\varkappa \neq \tau$.

(IV) Es liege $\underset{\sim}{S}$ in der Nähe von a in $C(\alpha)$ und $\underset{\sim}{C}'$ liege in der Nähe von a in $K_0(\beta)$; dabei ist $\alpha, \beta \in \{+, -\}$.

Behauptung. Es gibt $K(u_1, \ldots, u_{k-1}) \in \mathfrak{k}$ bzw. $K(v_1, \ldots, v_{k-1}) \in \mathfrak{k}$ von folgender Art: Es enthält $\underset{\sim}{C}' \cap K(u_1, \ldots, u_{k-1})$ bzw. $\underset{\sim}{C}' \cap K(v_1, \ldots, v_{k-1})$ nur Stützpunkte von C mit K; und in jedem dieser Stützpunkte wird $\underset{\sim}{C}'$ durch $K(u_1, \ldots, u_{k-1})$ in $C(\alpha)$ bzw. durch $K(v_1, \ldots, v_{k-1})$ in $C(-\alpha)$ gestützt.

Anmerkung. Dafür, daß sowohl $K(u_1, \ldots, u_{k-1})$ als $K(v_1, \ldots, v_{k-1})$ Stützpunkte liefert, ist notwendig, daß die Grundzahl k *ungerade* ist.

Beweis. *Betr.* $K(u_1, \ldots, u_{k-1})$. – Wir setzen $C' := C(a \mid b)$ und $\mathfrak{k}(u_1, \ldots, u_{k-1}) := \{K : K \in \mathfrak{k} \wedge K = K(u_1, \ldots, u_{k-1})\}$. Da $C \cup K_0$ $\mathfrak{k}$-ordinär sein soll (vgl. 1.4.0.), existiert zu jedem $y \in C'$ (genau) ein $K(y) := K(y, u_1, \ldots, u_{k-1}) \in \mathfrak{k}(u_1, \ldots, u_{k-1})$. – Es ist $C \cap K(y)$ abgeschlossen und endlich (vgl. 1.4.0.) sowie nicht leer. – Wegen $\underset{\sim}{C}' \cap K_0 = \emptyset$ liegt $\underset{\sim}{C}'$ ganz auf einer Seite von K_0, nämlich in $K_0(\beta)$.

(I) O. B. d. A. entspreche die Reihenfolge $a, u_1, \ldots, u_{k-1}, b$ auf K_0 einer Orientierung von K_0. Da $K_0 \cap K(y) = \{u_1, \ldots, u_{k-1}\} =: U$ für alle $y \in \underset{\sim}{C}'$, da $K(a) = K(b) = K_0$ und da C' positiven Abstand von dem kleinsten, U enthaltenden Teilbogen von K_0 besitzt, entspricht die Reihenfolge $u_1, \ldots, u_{k-1}$ auch auf $K(y)$ einer Orientierung von $K(y)$. Mithin ist y enthalten im größten, zu U fremden Teil $\underset{\sim}{R}(y)$ von $K(y)$; dabei kann $\underset{\sim}{R}(y)$ auch ein unterbrochenes Stück von $K(y)$ sein (vgl. [2], 4.2.1.).

(II) Wegen $(K_0 \setminus S) \cap K(y) = \emptyset$, weil $y \in \underset{\sim}{C}' \subset K_0(\beta)$ und weil $k - 1 = 2t$ gerade ist, also $\underset{\sim}{R}(y)$ in der Nähe von u_1 und u_{k-1} auf der gleichen Seite von K_0 liegt, gilt $R(y) \subset K_0(\beta)$. Es ist $\underset{\sim}{R}(y) \cap \underset{\sim}{R}(y') = \emptyset$ für $y \neq y'$ (weil $K(y) \cap K(y') = U$). Bezeichnet daher S' den kleinsten, U enthaltenden Teilbogen von $\underset{\sim}{S}$, so wird durch $S' \cup \underset{\sim}{R}(y)$ ein, in $K_0(\beta)$ enthaltenes Gebiet $Q(y) := Q(S', \underset{\sim}{R}(y))$ begrenzt. Das, wegen $\underset{\sim}{C}' \subset K_0(\beta)$, ebenfalls in $K_0(\beta)$ enthaltene, von $S \cup C'$ begrenzte Gebiet sei $Q := Q(S, C')$. Wegen $\underset{\sim}{C}' \cap \underset{\sim}{S} = \emptyset$ liegt eine Umgebung von a und eine von b auf Q auf der gleichen Seite von C, nämlich in $C(\alpha)$. Daher gilt $Q \subset C(\alpha) \cap K_0(\beta)$. Wegen $u_1, u_{k-1} \in S' \subset \underset{\sim}{S}$ liegen daher Umgebungen von u_1 und u_{k-1} auf $\underset{\sim}{R}(y)$, weil in $K_0(\beta)$, auch in Q und bei passender Wahl von u_1, u_{k-1} auch in $C(\alpha)$.

(III) Enthält $D(y) := \underset{\sim}{C}' \cap K(y) \neq \emptyset$ nur Stützpunkte, so liegt jeder Stützpunkt in $\underset{\sim}{C}'$ (vgl. Ziff. (I)). Ferner wird $\underset{\sim}{C}'$ von $\underset{\sim}{R}(y)$ in jedem der Stützpunkte in $C(\alpha)$ gestützt; denn $\underset{\sim}{R}(y)$ liegt in der Nähe von u_1 und u_{k-1} in $C(\alpha)$ (vgl. Ziff. (II)), kann also Punkte aus $C(-\alpha)$ nur enthalten, wenn $\underset{\sim}{C}' \cap \underset{\sim}{R}(y)$ Schnittpunkte enthält. Sind daher nur Stützpunkte vorhanden, so gilt $\underset{\sim}{R}(y) \subset \bar{Q}$, es wird also C von $K(y)$ in Q und $C(\alpha)$ gestützt.

(IV) Es enthalte jetzt $D(y)$ einen Schnittpunkt s. Dann liegt eine einseitige Umgebung V von s auf $\underset{\sim}{C}' \setminus \{s\}$ in $Q(y)$. Und für jedes $y' \in V$ gilt dann $\overline{Q(y')} \setminus \bar{S}' \subset Q(y)$, weil $\underset{\sim}{R}(y) \cap \underset{\sim}{R}(y') = \emptyset$, und daher $\underset{\sim}{V}(s \mid y') \subset \underset{\sim}{V} \cap Q(y) \setminus \overline{Q(y')}$, so daß $\underset{\sim}{V}(s \mid y')$ außerhalb $Q(y')$ liegt. Enthält nun auch $D(y')$ einen Schnittpunkt, etwa s', der also nicht in $\underset{\sim}{V}(s \mid y')$ liegt, so existiert ein $y'' \in \underset{\sim}{C}'$ und ein zu $\underset{\sim}{V}(s \mid y')$ fremdes $V(s' \mid y'') \subset \underset{\sim}{C}'$, welches außerhalb $Q(y'')$ liegt. Da es auf $\underset{\sim}{C}'$ höchstens abzählbar (unendlich) viele fremde offene Teilbogen $\underset{\sim}{V}(x \mid z)$ gibt, führt die Fortsetzung der Schlüsse, welche y' und y'' lieferten, zu (höchstens abzählbar unendlich vielen) $y_1 := y', y_2 := y'', y_3, \ldots$ Man gelangt so entweder zu einem $y_r =: c \in \underset{\sim}{C}'$ oder zu einem Häufungspunkt $c \in \underset{\sim}{C}'$ einer Folge $(y_n)_n$ mit folgender Eigenschaft: $y_n \in C' \cap K(y_n)$ und $c = \lim_{n \to \infty} y_n$. Es enthält $D(c)$ keine Schnittpunkte, wegen $D(c) \neq \emptyset$ also mindestens einen Stützpunkt und nur Stützpunkte. Damit haben wir den Fall der

Ziffer (III) des Beweises. Die Behauptung gilt also auch im Fall der gegenwärtigen Ziffer (IV). Zu beachten ist dabei, daß $K(c, u_1, \ldots, u_{k-1}) = \lim_{y_n \to c} K(y_n, u_1, \ldots, u_{k-1})$ (vgl. 2.0.).

Betr. $K(v_1, \ldots, v_{k-1}) \in K_0 \setminus S$. Der Beweis verläuft analog wie der im Falle $K(u_1, \ldots, u_{k-1})$.

§ 2. Hilfssätze

Neben der Forderung in 1.4.0. wird im folgenden zugrunde gelegt die

2.0. Forderung. Es sei $C \subset G$ ein Bogen oder eine Kurve und $x_\varkappa$, $x_{\varkappa n} \in C \cup K_0$, $\varkappa = 1, \ldots, k$; $n = 1, 2, \ldots$; $x_{\varkappa n} \neq x_{\tau n}$ für $\varkappa \neq \tau$ und alle n. Dabei sei $k \geq 1$. Da $C \cup K_0$ $\mathfrak{k}$-ordinär sein soll (1.4.0.) existieren die OCh $K_n := K(x_{1n}, \ldots, x_{kn}) \in \mathfrak{k}$. Weiter sei $x_\varkappa = \lim_n x_{\varkappa n}$, $\varkappa = 1, \ldots, k$. Gefordert wird: Existiert $L := \lim_n K_n$, so ist L *selbst eine OCh*, also $L \in \mathfrak{k}$, entweder falls die $x_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, alle gleich $x \in C$ oder falls 2 der $x_\varkappa$ gleich x sind. In diesen Fällen, in denen also entweder alle $x_\varkappa$ oder nur zwei gleich x sind, bezeichnet am L als $\mathfrak{k}$-*Paratingente* $P(x; C)$ in x an C bzw. als $\mathfrak{k}$, 2-*Paratingente* (in x) an C. Insbesondere ist also *jedes* $P(x; C) = P(x; C; \mathfrak{k})$ eine Ordnungscharakteristik. – Falls $k = 1$ ist oder falls die x alle verschieden sind, liegen die $x_\varkappa$ auf der OCh $K(x_1, \ldots, x_k)$, weil $C \cup K_0$ $\mathfrak{k}$-ordinär ist; wegen der stetigen Abhängigkeit des $K(x_1, \ldots, x_k)$ von den $x_\varkappa$ ist hier von selbst $L = K(x_1, \ldots, x_k)$.

Anmerkung. Von dem (später nicht in Betracht kommenden) Fall, daß alle $x_\varkappa$ auf K_0 liegen, kann abgesehen werden, da alsdann $K_n = K_0$ ist.

2.1. Definition. Es sei C Bogen oder Kurve und orientiert mit endlichem POW $(C; \mathfrak{k})$; ferner sei $K \in \mathfrak{k}$ Sekante von C mit $C \cap K = \{y_1, \ldots, y_r\}$, $r \geq 1$. Es heißen C und K *normal* zueinander, wenn folgendes gilt: Entspricht die Reihenfolge $y_1, \ldots, y_r$ auf C der Orientierung von C, so auf K einer passenden Orientierung von K, der sogenannten bezüglich C *natürlichen* Orientierung von K; im Falle $1 \leq r \leq 2$ sind C und K stets normal im Sinne dieser Definition. Ist C normal zu *jedem*

$K \in \mathfrak{k}$, so heißt C $\mathfrak{k}$-*normal*. Weiter heißt C $\mathfrak{k}$-normal im Punkt $x \in C$, wenn x eine $\mathfrak{k}$-normale Umgebung auf C besitzt. Ist C in jedem seiner Punkte $\mathfrak{k}$-normal, so wird C als *lokal* $\mathfrak{k}$-*normal* bezeichnet. – Im Falle POW $(C; \mathfrak{k}) = m < +\infty$ gilt, bezeichnet man als *Maximalsekante* von C jedes $K \in \mathfrak{k}$, welches Sekante von C ist und mit C genau m (Schnitt-)Punkte gemeinsam hat.

2.1.1. Ist C lokal $\mathfrak{k}$-regulär ([4], 1.2.), so auch lokal $\mathfrak{k}$-normal (Vgl. [2], 4.2.4.2., Satz 1.) (vgl. auch 2.1.2.).

2.1.2. Ist C global $\mathfrak{k}$-regulär, ist also POW $(C; \mathfrak{k}) = k = k(\mathfrak{k})$, so haben alle (natürlich orientierten) Maximalsekanten $K \in \mathfrak{k}$ von C die gleiche vordere Signatur vsgn $K = \alpha$ und die gleiche hintere Signatur hsgn $K = \beta$, wobei $\alpha = (-1)^k \beta$. (Dabei ist vsgn $K = \alpha$ bzw. hsgn $K = \beta$, wenn folgendes gilt: Ist $C \cap K = \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_n\}$ und entspricht die Reihenfolge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf C bzw. auf K der Orientierung von C bzw. der Orientierung des (zu C normalen) $K \in \mathfrak{k}$, so liegt eine vordere bzw. hintere Umgebung von x_1 bzw. von x_n auf $K \setminus \{x_1\} \setminus \{x_n\}$ in $C(\alpha)$ bzw. in $C(\beta)$ (Daß bei $\mathfrak{k}$-regulärem C vsgn K und hsgn K unabhängig von K ist, folgt daraus, daß hier alle Maximalsekanten stetig ineinander überführbar sind in $\underset{\sim}{C}$; vgl. [2], 4.2.4., Satz 2 und 3).

2.1.3. Definition. Bei $\mathfrak{k}$-*regulärem* $x \in C$ wird die, für alle Maximalsekanten K einer $\mathfrak{k}$-regulären Umgebung von x auf C konstante vsgn K vzw. hsgn K als vordere bzw. hintere *Signatur* vsgn x bzw. hsgn x *von* x bezeichnet; es ist vsgn $x = (-1)^k$ hsgn x.

2.1.4. Zu jedem *lokal* $\mathfrak{k}$-*regulärem* C gibt es α bzw. β mit vsgn $x = \alpha$ bzw. hsgn $x = \beta$ für alle $x \in C$; dabei ist $\alpha = (-1)^k \beta$. (Denn hinreichend benachbarte x besitzen gemeinsame $\mathfrak{k}$-reguläre Umgebungen). Es wird α bzw. β als die *vordere* bzw. *hintere Signatur* vsgn C bzw. hsgn C (*von* C) bezeichnet.

2.2. Definition. Es heißt $x \in C$ $\mathfrak{k}$-*Scheitel* auf (von) C, wenn POW $(x: C) \geq k + 1$, d. h. wenn x beliebig kleine Umgebungen U auf C mit POW $(U; \mathfrak{k}) \geq k + 1$ besitzt. Ein $\mathfrak{k}$-*Scheitel* $x \in C$ heißt *normal*, wenn C in x (lokal) normal ist und wenn in x an C

nur eine *einzige* $\mathfrak{k}$-Paratingente $P(x; C)$ existiert, wobei dann $P(x; C)$ auch *Scheitelparatingente* heißt.

2.3. Definition. Ein auf C isolierter $\mathfrak{k}$-Scheitel x heißt *signiert* mit der Signatur $\operatorname{sgn} x = \alpha$, kurz auch α-Scheitel, wenn für eine Umgebung U von x auf C gilt: Ist $K \in \mathfrak{k}$ Sekante von U mit auf U direkt konsekutiven ([4], 1.4.) $x_1, \ldots, x_{k+1} \in U \cap K$, so liegt für alle solchen K und alle zugehörigen $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ eine Umgebung von x_1 auf $K \setminus \{x_1\}$ auf der gleichen Seite $C(\alpha)$ von C.

2.3.1. Für jeden *normalen* $\mathfrak{k}$-Scheitel $x \in C$ gilt: Es sind gleichwertig: (1) Es ist x isolierter $\mathfrak{k}$-Scheitel auf C. – (2) Es ist x signiert. – (3) Es ist POW $(x; C) = k + 1$.

Zusatz. Jeder isolierte, normale $\mathfrak{k}$-Scheitel besitzt vordere und hintere Umgebungen V und H, die $\mathfrak{k}$-regulär sind; dabei ist $\operatorname{vsgn} V = (-1)^{k+1} \operatorname{hsgn} H$. Und es ist $\operatorname{vsgn} V = -\operatorname{vsgn} H$.

Für die *Beweise* zu 2.3.1. vgl. [5], Nr. 3.2., Satz; die dort auf ungerades k bezogenen Ausführungen gelten auch für gerades k. – Der Zusatz folgt aus POW $(x; \mathfrak{k}) = k + 1$ und aus dem Umstand, daß es zu beliebig kleinen $V \cup H$ Maximalsekanten $K \in \mathfrak{k}$ gibt mit $(V \cup H) \cap K = \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_{k+1}\}$ und sowohl $x_1, \ldots, x_k \in V$ als $x_2, \ldots, x_{k+1} \in H$ (vgl. [5], Nr. 3.2., Satz Beh. (e)).

2.3.2. Definition. Für einen isolierten, normalen $\mathfrak{k}$-*Scheitel* $s \in C$ wird als *Signatur* $\operatorname{sgn} s$ von s auf C erklärt: $\operatorname{sgn} s :=$ $= \operatorname{vsgn} V$ (2.1.4.), wobei V vordere $\mathfrak{k}$-reguläre Umgebung von s auf C ist.

2.4. Bei späteren Betrachtungen erweist es sich als zweckmäßig, den Begriff der Orientierung und Signatur auch für die $\mathfrak{k}$-Paratingenten einzuführen. Hierzu dienen

2.4.1. Definition. Ist C lokal $\mathfrak{k}$-normal in x, so wird für jede $\mathfrak{k}$-*Paratingente* $P(x; C)$ an C in x die bezüglich der Orientierung von C *natürliche Orientierung* erklärt als diejenige, die sich mit Hilfe der Orientierung von C so ergibt: Es sei $P(x; C) = \lim_n K_n$, wobei $K_n = K(x_{1n}, \ldots, x_{kn}) \in \mathfrak{k}$ und $x = \lim_n x_{\varkappa n}$, $\varkappa = 1, \ldots, k$; dabei soll die Reihenfolge $x_{1n}, \ldots x_{kn}$, der auf C direkt konsekutiven $x_{\varkappa n}$ für alle n der Orientierung von C entsprechen. Vermöge des Grenzüberganges mit $n \to \infty$ überträgt sich dann die bezüglich der Orientierung von C natürliche Orientierung der (zu C normalen) K_n auf $P(x; C)$; und zwar ist diese Orientierung bei festem $P(x; C)$ unabhängig von der Wahl der K_n (Der Beweis ergibt sich aus [2], Nr. 1.1.3.).

2.4.2. Definition. Als vordere bzw. hintere *Signatur* einer natürlich orientierten *𝔨-Paratingente* $P(x; C)$ an C in einem *𝔨-regulären Punkt* $x \in C$ oder in einem isolierten, normalen *𝔨-Scheitel* $x \in C$ wird die vordere bzw. hintere Signatur von x erklärt.

2.4.3. Alle natürlich orientierten 𝔨-Paratingenten $P(x; C)$ in allen Punkten $x \in C$ eines lokal 𝔨-regulären C besitzen die gleiche vordere und die gleiche hintere Signatur (Es ist vsgn $= (-1)^k$ hsgn.)

2.4.4. Für jedes $x \in C$ mit $k \leq \text{POW}\ (x; C) \leq k + 1$ und jede (lokal normale) hinreichend kleine vordere bzw. hinreichend kleine hintere Umgebung V bzw. H von x gilt: Es gibt nur eine einzige 𝔨-Paratingente $P(x; V)$ und $P(x; H)$ (in x an V bzw. H); und zwar gilt für $z \in \underline{V}$ bzw. $z \in \underline{H}$: es ist $P(x; V) = \lim_{z \to x} P(z; V)$ und $P(x; H) = \lim_{z \to x} P(z; H)$ für alle $P(z; \underline{V})$ bzw. $P(z; \underline{H})$. (Bew. Die betrachteten V bzw. H sind global 𝔨-regulär; für 𝔨-Scheitel x mit POW $(x; 𝔨) = k + 1$ vgl. [2], Nr. 4.1.3.1.1., Satz 2. Daraus folgt die Beh. wegen [2], Nr. 4.2.6.3. und Nr. 4.2.6.4. je Satz 1.).

2.4.5. Es sei $k \geq 1$ *ungerade* und C lokal 𝔨-regulär. Dann ist jede 𝔨-Paratingente $P(x; C)$ fremd zu $C \setminus \{x\}$ und zu jedem $P(z; C)$ mit $z \neq x$. Von $P(x; C)$ wird C in x *geschnitten*. Hingegen wird C in einem isolierten normalen 𝔨-*Scheitel* x von der 𝔨-(Scheitel-)Paratingente gestützt. Ist k *gerade*, so sind „geschnitten" und „gestützt" zu vertauschen. (Vgl. [2], Nr. 4.2.4.2., Satz 2, und Nr. 4.2.6.2., Satz 1).

2.5. Benachbarte isolierte normale 𝔨-Scheitel besitzen entgegengesetzte Signatur. Genauer:

Voraussetzung. Es sei C orientiert und genüge den Forderungen in 1.4.0. und 2.0. Ferner seien s', $s'' \in \underline{C}$ isolierte normale

$\mathfrak{k}$-Scheitel, die auf C benachbart sind, d. h. zwischen s' und s'' liegen auf C keine $\mathfrak{k}$-Scheitel (so daß $C(s' \mid s'')$ *lokal* $\mathfrak{k}$-*regulär* ist). Gemäß 1.4.0. ist k *ungerade*; es sei dabei $k > 1$ (vgl. 1.4.0.).

Behauptung. Die Signaturen von s' und s'' sind verschieden.

Zusatz. Die Behauptung gilt auch für gerades k (bei sonst gleichen Voraussetzungen).

Beweis. Bezüglich einer (festzuhaltenden) Orientierung von C liege etwa s' auf C vor s''. Es sei α' bzw. α'' die (vordere) Signatur von s' bzw. s''.

(I) Da $C(s' \mid s'')$ lokal $\mathfrak{k}$-regulär ist, haben die $\mathfrak{k}$-Paratingenten $P(z;C)$ in den $z \in \underset{\sim}{C}(s' \mid s'')$ sämtlich die gleiche, von z und $P(z;C)$ unabhängige vordere bzw. hintere Signatur α bzw. β, wobei $\alpha = (-1)^k \beta$ (vgl. 2.1.4. und 2.4.2.). Wegen 1.4.0. ist $k > 1$.

(II) Weil eine hintere Umgebung H' von s' auf $C(s' \mid s'')$ und eine vordere Umgebung V'' von s'' auf $C(s' \mid s'')$ $\mathfrak{k}$-regulär ist (vgl. 2.4.4., Bew.), gilt $P(s''; V'') = \lim_{z \to s''} P(z; C)$ mit $z \in \underset{\sim}{V}''$ und $P(s'; H') = \lim_{z \to s'} P(z; C)$ mit $z \in \underset{\sim}{H}'$. (gemäß 2.4.4.). Daher ist die hintere Signatur β' von $P(s'; C)$, also die hintere Signatur von s', gleich β und die vordere Signatur α'' von $P(s''; C)$ gleich α (vgl. 2.4.3.), somit $\beta' = \beta$, $\alpha'' = \alpha$.

(III) Wegen $\alpha' = (-1)^{k+1} \beta'$, wobei $\alpha' = \operatorname{vsgn} s'$ (vgl. 2.3.1., Zusatz), folgt aus (I) und (II), daß $\alpha' = (-1)^{k+1} \beta' = (-1)^{k+1} \beta = (-1)^{2k+1} \alpha = -\alpha = -\alpha''$.

2.6. Beziehung zwischen $\mathfrak{k}$-Scheiteln und $\mathfrak{k}'$-Scheiteln, wobei $\mathfrak{k}'$ ein (geeignet erklärtes) Untersystem von $\mathfrak{k}$ ist und $k' = k(\mathfrak{k}') = k(\mathfrak{k}) - 1$.

Die folgenden Bemerkungen beziehen sich auf $\mathfrak{k}$ der Grundzahl 3, gelten aber auch (mutatis mutandis) für beliebige $k \geq 3$.

2.6.0. Bezeichnung. Es sei $\mathfrak{k}$ ein OCh-System mit der Grundzahl $k(\mathfrak{k}) = 3$. Man setze: $\mathfrak{k}_3 := \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}(x') := \{K : K \in \mathfrak{k} \wedge x' \in K\}$ sowie $\mathfrak{k}_1 := \mathfrak{k}(x', x'') = \{K : K \in \mathfrak{k} \wedge x', x'' \in K\}$ mit $x' \neq x''$ (vgl. 1.4.1., Bew.).

Anmerkung. Es gilt $\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{k}_2 \subset \mathfrak{k}_3$; ferner ist jedes $\mathfrak{k}_i$, $i = 1, 2, 3$, ein OCh-System mit der Grundzahl $i = k(\mathfrak{k}_i)$ und mit $3 - i$ Grundpunkten (d. h. Punkten, die allen $K \in \mathfrak{k}_i$ gemeinsam sind); für $i = 2$ bzw. 1 sind dies x bzw. x' und x''.

2.6.1. Forderung. Bezüglich C soll gelten: Erstens die Forderung 1.4.0. Zweitens die Forderung 1.4.1. für $\mathfrak{k}$ und dann erst recht für $\mathfrak{k}_2$ und $\mathfrak{k}_1$, wobei im Sinne von 2.6.0. $k = 3$, $x' := u_1$, $x'' := u_2$ und $x', x'' \in \underset{\sim}{S}$ oder $x' := v_1$, $x'' := v_2$ und $x', x'' \in K_0 \setminus S \setminus C \frown K_0$. Drittens die Forderung 2.0. nicht nur für $\mathfrak{k}$, sondern auch für $\mathfrak{k}_2$ und $\mathfrak{k}_1$.

2.6.2. Voraussetzung. Es sei C orientiert und genüge der Forderung 2.6.1. In $\underset{\sim}{C}' := \underset{\sim}{C}(a \mid b)$ (vgl. 1.4.1.) seien s', s'' isolierte, normale $\mathfrak{k}_i$-Scheitel. $i = 1, 2$, welche auf C benachbart sind. Überdies sei weder s' noch s'' ein $\mathfrak{k}_{i+1}$-Scheitel; es seien also s' und s'' beide $\mathfrak{k}_{i+1}$-regulär.

Behauptung. Auf $\underset{\sim}{C}(s' \mid s'')$ liegt mindestens ein $\mathfrak{k}_{i+1}$-Scheitel.

Beweis. O.B.d.A. liege s' auf C vor s''.

(I) Die (einzige) $\mathfrak{k}_i$-Paratingente $P_i(s') := P(s'; C; \mathfrak{k}_i)$ im $\mathfrak{k}_i$-Scheitel s' ist zugleich eine (nicht notwendig die einzige) $\mathfrak{k}_{i+1}$-Paratingente $P(s'; C, \mathfrak{k}_{i+1})$ im $\mathfrak{k}_{i+1}$-regulären Punkt s'. Die gleiche Bemerkung gilt für s'' und $P_i(s'')$. – In der Tat: Weil s' isolierter, normaler $\mathfrak{k}$-Scheitel ist, gilt $POW(s'; C; \mathfrak{k}_i) = i + 1$ (gemäß 2.3.1.). Daher ist $P_i(s')$ Limes von Maximalsekanten K_n einer Umgebung U von s' auf C, wobei $U \frown K_n$ für $n \to \infty$ auf s' sich zusammenzieht. Wegen $\mathfrak{k}_i \subset \mathfrak{k}_{i+1}$ ist $K_n \in \mathfrak{k}_{i+1}$. Das (eindeutig bestimmte) $P_i(s')$ ist also auch $\mathfrak{k}_{i+1}$-Paratingente in s'. – Entsprechendes gilt für s''.

(II) Gemäß 2.5. ist $\alpha' = \operatorname{sgn} s' = -\operatorname{sgn} s'' = -\alpha''$. Ist daher β' bzw. β'' die hintere bzw. die vordere Signatur von $P_i(s')$ bzw. von $P_i(s'')$, so folgt $\beta' = (-1)^i \beta''$ (weil $\alpha' = (-1)^{i+1} \beta'$ und $\alpha'' = \beta''$).

(III) Ist nun entgegen der Beh., $C(s' \mid s'')$ lokal $\mathfrak{k}_{i+1}$-regulär, so gibt es zufolge der vorausgesetzten $\mathfrak{k}_{i+1}$-Regularität von s' und s'', also der Existenz $\mathfrak{k}_{i+1}$-regulärer Umgebungen $\underset{\sim}{U}'$ von $s' \in \underset{\sim}{U}'$ bzw. $\underset{\sim}{U}''$ von $s'' \in \underset{\sim}{U}''$ einen lokal $\mathfrak{k}_{i+1}$-regulären Bogen $\underset{\sim}{A} \subset C$ mit $C(s' \mid s'') \subset \underset{\sim}{A}$. Weil jetzt β' bzw. β'' die hintere bzw. vordere Signatur von $P(s'; C, \mathfrak{k}_{i+1}) = P_i(s')$ bzw. von $P(s''; C, \mathfrak{k}_{i+1}) = P_i(s'')$ ist, gilt $\beta' = (-1)^{i+1} \beta''$ (gemäß 2.1.4.). Dies steht im Widerspruch zum Ergebnis in Ziff. (II).

§ 3. Jackson-Normalität

3.1. Definition. Es sei $C \subset \underset{\sim}{G}$ eine orientierte Kurve und $K_0 \in \mathfrak{k}$ Sekante von C; dabei sei die Grundzahl $k(\mathfrak{k})$ von $\mathfrak{k}$ gleich 3. Wir bezeichnen dann C als *normal im Sinne von Jackson*, kürzer als Jackson-normal oder J-normal, *bezüglich* K_0, wenn folgendes gilt: Es ist $C \frown K_0$ endlich. Unter den Teilbogen, in welche C durch K_0 zerlegt wird, gibt es $2n - 1$ Bogen $C(p_{2i-1}, p_{2i})$, $i = 1, 2, \ldots, 2n - 1$, derart, daß die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_{2(2n-1)}$ in dieser Reihenfolge sowohl der Orientierung von C als einer (geeigneten) Orientierung von K_0 entsprechen (vgl. [1], S. 577, theorem 7.1.).

Zusatz. Die oben gemachte Annahme, daß K_0 Sekante von C sei, ist – wenigstens bei endlichem POW$(C; \mathfrak{k})$ – unwesentlich. Enthält nämlich $C \frown K_0$ (bei endlichem POW$(C; \mathfrak{k})$) Stützpunkte, so gibt es zu K_0 beliebig benachbarte Sekanten $K_0^* \in \mathfrak{k}$ (vgl. [2] 1. 1.4.3., auch 1.4.2., Satz 1.); und bezüglich solcher Sekanten K_0^* ist C ebenfalls J-normal, wenn bezüglich K_0.

3.2. Bezeichnungen. Gemäß 3.1. sind die (offenen) Teilbogen $\underset{\sim}{C}(p_{2i-1}, p_{2i})$ von C fremd sowohl untereinander als zu K_0. Daher gibt es unter diesen Teilbogen mindestens n, etwa $\underset{\sim}{C}_\nu := \underset{\sim}{C}(p_{2i_\nu-1} \mid p_{2i_\nu})$, $\nu = 1, \ldots, n$ die alle auf der gleichen Seite von K_0 liegen, etwa auf $K_0(\beta)$. Statt $p_{2i_\nu-1}$ bzw. p_{2i_ν} schreiben wir abkürzend $2\nu - 1$ bzw. 2ν, also $\underset{\sim}{C}_\nu := \underset{\sim}{C}(2\nu - 1 \mid 2\nu)$. Dabei kann und soll angenommen werden, daß die Punkte $1, 2, \ldots, 2n$ in dieser Reihenfolge sowohl auf C als auf K_0 der Orientierung von C bzw. K_0 entsprechen. Und da die $2\nu - 1$, 2ν sämtlich Schnittpunkte von C und K_0 sind, so sind die (abgeschlossenen) C_ν paarweise fremd (und bis auf die beiden Endpunkte auch fremd zu K_0). Nach Annahme ist ferner $\underset{\sim}{C}_\nu \subset K_0(\beta)$. Außerdem ist (gemäß 3.1.) der zu allen $2\varrho - 1, 2\varrho$; $\varrho = 1, \ldots n$, fremde Teilbogen $\underset{\sim}{K}_\nu := \underset{\sim}{K}_0(2\nu - 1 \mid 2\nu)$ von K_0 fremd zu C_ν, so daß durch $C_\nu \smile K_\nu$ ein in $K_0(\beta)$ enthaltenes Gebiet $Q_\nu := Q(C_\nu, K_\nu)$ begrenzt wird. Und Umgebungen von $2\nu - 1$ und 2ν auf $\underset{\sim}{K}_\nu$ liegen für alle ν auf der gleichen Seite von C, etwa auf $C(\alpha)$ (vgl. 1.2.); demzufolge liegt eine Umgebung von $\underset{\sim}{C}_\nu$ auf Q_ν in $C(\alpha)$ (vgl. 1.3.). Auf dem zu C_ν und $C_{\nu+1}$ fremden Teilbogen $\underset{\sim}{C}'_\nu := \underset{\sim}{C}(2\nu \mid 2\nu + 1)$

von C liegen nun Umgebungen von 2ν in $K_0(-\beta)$ (weil 2ν Schnittpunkt ist); wir bezeichnen mit $\underset{\sim}{Z}'_\nu = \underset{\sim}{C}(2\nu \mid z_\nu) \subset \underset{\sim}{C}'_\nu$ die kleinste solche Umgebung von 2ν derart, daß $\underset{\sim}{Z}'_\nu \subset K_0(-\beta)$ und daß der Endpunkt $z_\nu \in C \cap K_0$.

3.3. Fallunterscheidung hinsichtlich der Lage der Z'_ν.

Fall (ν I). Es ist $z_\nu \in \underset{\sim}{K}_\nu \cup \underset{\sim}{K}_0(2\nu \mid 2\nu + 1) \cup \underset{\sim}{K}_{\nu+1} \cup \{2\nu + 1\}$.

Man hat hier die *Unterfälle*:

(ν I 1) $z_\nu \in \underset{\sim}{K}_0(2\nu \mid 2\nu + 1) \cup \{2\nu + 1\}$;
(ν I 2) $z_\nu \in \underset{\sim}{K}_{\nu+1}$;
(ν I 3) $z_\nu \in \underset{\sim}{K}_\nu$.

Fall (ν II) $z_\nu \in K_0 \setminus (K_\nu \cup K_0(2\nu \mid 2\nu + 1) \cup K_{\nu+1})$
(es liegt also keiner der Fälle (ν I i), $i = 1, 2, 3$, vor).

3.3.1. Betr. die Fälle (ν I 1) und (ν I 2). Es bezeichne $K'_\nu := K_0(2\nu \mid z_\nu)$ denjenigen, von 2ν und z_ν begrenzten Teilbogen von K_0, für welchen $Z'_\nu \cup K'_\nu$ ein in $K_0(-\beta)$ enthaltenes Gebiet Q'_ν begrenzt. In den Fällen (ν I 1) und (ν I 2) liegt Q'_ν in Umgebungen von 2ν und z_ν auf $C(-\alpha)$, so daß eine Umgebung von Z'_ν auf Q'_ν in $C(-\alpha)$ liegt (vgl. 1.3.).

Betr. den Fall (ν I 3). Hier liegt (gemäß der vorhergehenden Überlegung) eine Umgebung von $\underset{\sim}{Z}'_\nu$ auf Q'_ν in $C(\alpha)$. Daraus folgt nun: Da z_ν Schnittpunkt ist, tritt C in z_ν aus $K_0(-\beta)$ nach $K_0(\beta)$ über und es sind jetzt die Voraussetzungen von 1.3. erfüllt, wenn dort in den Voraussetzungen gesetzt wird: $a := 2\nu - 1$, $b := 2\nu$, $K := K_0$, $c := z_\nu$ (und in der Behauptung $C' := Z'_\nu$, $Q' := Q'_\nu$ usw.). Demgemäß gibt es Teilbogen C''_ν bzw. K''_ν von C bzw. K_0 von folgender Art: Es ist $\underset{\sim}{C}''_\nu \cap \underset{\sim}{K}''_\nu = \emptyset$, ferner gibt es ein von $C''_\nu \cup K''_\nu$ begrenztes, in $K_0(\beta)$ enthaltenes Gebiet Q''_ν; und eine Umgebung von C''_ν auf Q''_ν ist in $C(-\alpha)$ enthalten.

Betr. den Fall (ν II). Hier ist wieder (vgl. 3.2. und 3.3.) $Z'_\nu := C(2\nu \mid z_\nu) \subset \underset{\sim}{C}'_\nu \cap K_0(-\beta)$ und $K'_\nu := K_0(2\nu \mid z_\nu) \subset (K_0 \setminus (K_0(2\nu \mid 2\nu + 1) \cup K_{\nu+1}))$. Und es gilt: Bezeichnet Q'_ν das in $K_0(-\beta)$ enthaltene, von $Z'_\nu \cup K'_\nu$ begrenzte Gebiet, so liegt eine Umgebung von $\underset{\sim}{Z}'_\nu$ auf Q'_ν in $C(\alpha)$.

3.3.2. Aus 3.3.1. ergibt sich der

Satz. Voraussetzung. Es sei $C \subset G$ eine orientierte Kurve mit endlichem $POW(C; \mathfrak{k})$, wobei $k = k(\mathfrak{k}) = 3$. Ferner sei $K_0 \in \mathfrak{k}$ eine (entsprechend) orientierte Sekante von C, für welche Teilbogen $C_\nu \subset C$ und $K_\nu \subset K_0$ im Sinne von 3.2. existieren. Schließlich sei $C \cup K_0$ $\mathfrak{k}$-ordinär (1.4.0.).

Behauptung. In den Fällen (ν I) und (ν II) (3.3.) existiert auf K_0 bei gegebenen $\nu, \nu + 1 \in \{1, \ldots, n\}$ eine zu C fremde Umgebung $V'_\nu := \underset{\sim}{K}_0(w_{2\nu-1} \mid 2\nu - 1) \subset K_0 \setminus K_\nu$ von $2\nu - 1$ sowie $V''_\nu := \underset{\sim}{K}_0(w_{2\nu+1} \mid 2\nu + 1) \subset K_0 \setminus K_{\nu+1}$ von $2\nu + 1$ der folgenden Art:

Für beliebige $1', 2', 3' \in V'_\nu$ und beliebiges $4' \in V''_\nu$, wobei die Reihenfolge $1', 2', 3', 4'$ der Orientierung von K_0 entspricht, gilt:

(a) Es gibt $K^\nu \in \mathfrak{k}(1', 2')$ bzw. $K^{\nu+1} \in \mathfrak{k}(3', 4')$ durch welche $\underset{\sim}{C}_\nu$ bzw. $\underset{\sim}{C}_{\nu+1}$ in $C(-\alpha)$ gestützt wird (vgl. 1.1.).

(b) Es gibt $K^{\nu,\nu+1} \in \mathfrak{k}(2', 3')$, durch welche ein Teilbogen $\underset{\sim}{Z}'_\nu$ von $\underset{\sim}{C}(2\nu \mid 2\nu + 1)$ in $C(\alpha)$ gestützt wird.

Beweis: Im Hinblick auf 3.3.1. läßt sich aus 1.4.1. entnehmen:

Betr. (a) Da hier $1', 2'$ außerhalb Q_ν bzw. $3', 4'$ außerhalb $Q_{\nu+1}$ liegen, ferner Umgebungen von $\underset{\sim}{C}_\nu$ auf Q_ν bzw. Umgebungen von $\underset{\sim}{C}_{\nu+1}$ auf $Q_{\nu+1}$ in $C(\alpha)$ liegen, wird C durch K^ν und $K^{\nu+1}$ in Punkten von $\underset{\sim}{C}_\nu$ und von $\underset{\sim}{C}_{\nu+1}$ in $C(-\alpha)$ gestützt.

Betr. (b) In den Fällen (ν I 1) und (ν I 2) liegen $2'$ und $3'$ außerhalb Q'_ν; und Umgebungen von $\underset{\sim}{Z}'_\nu$ außerhalb Q'_ν liegen in $C(\alpha)$, so daß $\underset{\sim}{Z}'_\nu$ durch $K^{\nu,\nu+1}$ in $C(\alpha)$ gestützt wird. – Im Fall (ν I 3) gilt Gleiches für Q''_ν und $\underset{\sim}{C}''_\nu$ an Stelle von Q'_ν und $\underset{\sim}{Z}'_\nu$. – Im Fall (ν II) schließlich, welcher genau dann eintritt, wenn keiner der Fälle (ν I i), $i = 1, 2, 3$, vorliegt, gilt: Es liegt $2', 3'$ auf dem, zu $\underset{\sim}{Z}'_\nu$ fremden Begrenzungsteil von Q'_ν, während eine Umgebung von $\underset{\sim}{Z}'_\nu$ auf Q'_ν in $C(\alpha)$ liegt. Gemäß 1.4.1. gibt es daher $K^{\nu,\nu+1} \in$ $\in \mathfrak{k}(2', 3')$, von welchen $\underset{\sim}{Z}'_\nu$ in $C(\alpha)$ gestützt wird, wie behauptet.

§ 4. Verallgemeinerung des 2n-Scheitelsatzes von Jackson auf Systeme von Ordnungscharakteristiken mit der Grundzahl 3.

4.1. Unter Benutzung der §§ 1–3 läßt sich beweisen der

Satz. Voraussetzung. (1) Es sei $\mathfrak{k}$ ein System von Ordnungscharakteristiken mit dem Grundbereich G und der Grundzahl $k = k(\mathfrak{k}) = 3$.

(2) Es sei $C \subset G$ eine orientierte Kurve, ev. auch ein Bogen. Und zwar sei C lokal $\mathfrak{k}$-normal (vgl. 2.1.) und es sei jede $\mathfrak{k}$, 2 – sowie jede $\mathfrak{k}$-Paratingente an C eine OCh, also insbesondere mehrpunktig (2.0.).

(3) Es sei C, *falls von endlichem* POW$(C;\ \mathfrak{k})$, Jackson-normal (3.1.): Für die Sekante $K_0 \in \mathfrak{k}$ von C soll gelten: Unter den Teilbogen T, in die C durch die (Schnitt-)Punkte von C mit K_0 zerlegt wird, gibt es $2n - 1$, etwa $T_\nu^* := C(p_{2\nu-1} \mid p_{2\nu})$, $\nu = 1, \ldots, 2n - 1$, derart, daß die Reihenfolge $p_1, p_2, \ldots, p_{4n-2}$ der Orientierung von C und einer Orientierung von K_0 entspricht; insbesondere ist also jedes T_ν^* fremd zu K_0. Außerdem soll $C \cup K_0$ $\mathfrak{k}$-ordinär sein (1.4.0.).

(4) Für (beliebige) $x', x'' \in K_0 \setminus K_0 \cap C$ gilt: In jedem $x \in C \setminus C \cap K_0$ existiert an C genau eine $\mathfrak{k}(x')$- (und $\mathfrak{k}(x', x'')$-) Paratingente sowie in jedem $x \in C$ genau eine $\mathfrak{k}$-Paratingente an $C(x' \neq x'')$.

Behauptung. *Die Anzahl der* $\mathfrak{k}$-*Scheitel von* C *ist* (a) *mindestens* $2n - 3$, *wenn* C *ein Bogen ist, und* (b) *mindestens* $2n$, *wenn* C *eine Kurve ist. – Insbesondere besitzt* C *unendlich viele* $\mathfrak{k}$-*Scheitel, wenn* POW$(C;\ \mathfrak{k})$ *unendlich ist.*

Zusatz. Umgekehrt folgt aus der Endlichkeit von $POW(C;\ \mathfrak{k})$ im allgemeinen *nicht*, daß C *endlich* viele $\mathfrak{k}$-Scheitel besitzt (Beispiel für den Fall des Systems $\mathfrak{k}$ der Geraden und Kreise in Journ. f. d. reine u. angew. Math. 167 [1931] Seite 39).

Anmerkung. (1) Durch die Voraussetzungen wird den Forderungen 1.4.0., 2.0. und 2.6.1. Genüge geleistet; abgesehen von der der Endlichkeit von POW$(C;\ \mathfrak{k})$, die für den Beweis nicht erforderlich ist (vgl. 4.2.1.). – (2) Daß in $x \in C$ genau eine

$\mathfrak{k}(x', x'')$-Paratingente an C existiert, folgt aus der Voraussetzung, daß $C \cup K_0$ $\mathfrak{k}$-ordinär sein soll (Vor. (3)).

Beispiele liefern, unter anderen, das System der Geraden und Kreise in der euklidischen Ebene, sowie das System der Abstandslinien, Grenzkreise und (hyperbolischen) Kreise in der hyperbolischen Ebene.

4.2. Beweis des Satzes.

4.2.1. *Wenn* die Anzahl der $\mathfrak{k}$-Scheitel von C endlich ist, dann ist, wie weiter unten gezeigt wird, $\mathrm{POW}(C; \mathfrak{k})$ endlich (sogar beschränkt). Damit ist dann der letzte Teil der Behauptung bewiesen. Wir werden daher *von jetzt ab* beim Beweis des Satzes (4.2.1.–4.2.3.4.) annehmen, daß *C nur endlich viele $\mathfrak{k}$-Scheitel besitzt.*

Bei endlich vielen $\mathfrak{k}$-Scheiteln s ist jeder isoliert und wegen der lokalen $\mathfrak{k}$-Normalität von C (Vor. (2)) auch normal. Da zudem im $\mathfrak{k}$-Scheitel die $\mathfrak{k}$-Scheitelparatingente eindeutig bestimmt ist (Vor. (4)), gilt $\mathrm{POW}(s; \mathfrak{k}) = 4$ für jeden $\mathfrak{k}$-Scheitel s und gibt es eine vordere und eine hintere Umgebung V bzw. H von s auf C mit $\mathrm{POW}(V; \mathfrak{k}) = \mathrm{POW}(H; \mathfrak{k}) = 3$ (vgl. 2.3.1.). Somit ist C Vereinigung von (wegen der Kompaktheit von C) endlich vielen lokal $\mathfrak{k}$-normalen (abgeschlossenen) Bogen je vom POW 3. Daher *ist* $\mathrm{POW}(C; \mathfrak{k})$ *beschränkt.* – Da in jedem der endlich vielen $\mathfrak{k}$-Scheitel von C nur je eine $\mathfrak{k}$-(Scheitel-)Paratingente existiert (Vor. (4)), ist die Anzahl aller dieser Paratingenten endlich; außerdem ist jede von K_0 verschieden, weil sie C im Scheitel stützt (2.4.5.), also nicht Sekante sein kann. Da jede $\mathfrak{k}$-Paratingente OCh ist (Vor. (2)), hat sie mit K_0 höchstens 2 Punkte gemeinsam. Somit ist die Menge M der Schnittpunkte der $\mathfrak{k}$-Scheitelparatingenten mit K_0 endlich. Es gibt also zu jedem $x_\varrho \in C \cap K_0$ auf $K_0 \setminus \{x_\varrho\}$ vordere (und hintere) Umgebungen V_ϱ von x_ϱ mit $V_\varrho \cap M = \emptyset$. Die in 4.2.3.2. ff. auftretenden, mit $1'$, $2'$ usw. bezeichneten $x', x'', \ldots$ (vgl. Vor. (4)) sollen in den V_ϱ liegen.

4.2.2. Es genügt jetzt zu zeigen (wir verwenden im folgenden die in 3.2. eingeführten Bezeichnungen): Auf jedem der $\underline{T}_\nu := \underline{C}_\nu \cup C(2\nu \mid 2\nu + 1) \cup \underline{C}_{\nu+1}$, $\nu = 1, \ldots, n - 1$; liegt mindestens ein $\mathfrak{k}$-Scheitel s_ν von C mit der Signatur $\operatorname{sgn} s_\nu = -\alpha$ und alle diese s_ν sind verschieden. Daraus folgt nämlich die Existenz von $n - 2$ weiteren $\mathfrak{k}$-Scheiteln, die von den s_ν und untereinander verschieden sind; denn gemäß 2.5. sind s_ν und $s_{\nu+1}$, weil von gleicher Signatur $-\alpha$, nicht benachbart auf C, es liegt also zwischen ihnen noch mindestens ein weiterer $\mathfrak{k}$-Scheitel (von der Signatur α). Somit ergibt sich, im Falle C ein Bogen ist, die Existenz von mindestens $(n-1) + (n-2) = 2n - 3$ $\mathfrak{k}$-Scheiteln auf C. Im Falle C Kurve ist, existierten dagegen mindestens n $\mathfrak{k}$-Scheitel der Signatur $-\alpha$ und dazu mindestens n der Signatur α, also insgesamt mindestens $2n$ $\mathfrak{k}$-Scheitel.

4.2.3. B e w e i s d e r B e h. in 4.2.2, daß nämlich in jedem $\underline{T}_\nu$ ein $\mathfrak{k}$-Scheitel s_ν mit $\operatorname{sgn} s_\nu = -\alpha$ liegt und daß alle diese s_ν verschieden sind.

4.2.3.1. Gemäß 3.3.2. existiert ein $K^\nu \in \mathfrak{k}(1', 2') = \mathfrak{k}(1') \cap \mathfrak{k}(2')$, so daß $\underline{C}_\nu$ durch K^ν in einem Punkt x_ν in $C(-\alpha)$ gestützt wird, also $\operatorname{sgn} x_\nu = -\alpha$. Da $\mathfrak{k}(1')$ und $\mathfrak{k}(2')$ je die Grundzahl 2 besitzen, ist K^ν die (nach Vor. einzige) $\mathfrak{k}(1')$- und $\mathfrak{k}(2')$-Paratingente an $\underline{C}_\nu$ in x_ν, also $K^\nu = P(x_\nu; \mathfrak{k}(1')) = P(x_\nu; \mathfrak{k}(2')) \in \mathfrak{k}(1', 2')$.

(I) *Es ist* $\mathrm{POW}(x_\nu; \mathfrak{k}(1')) = \mathrm{POW}(x_\nu; \mathfrak{k}(2')) = 2$, *also* x_ν *sowohl* $\mathfrak{k}(1')$- *als* $\mathfrak{k}(2')$-*regulär und mit* $\operatorname{sgn} x_\nu = -\alpha$; $x_\nu \in \underline{C}_\nu$.

In der Tat: Es sei $i \in \{1', 2'\}$. Weil $\mathfrak{k}(i)$ die Grundzahl 2 besitzt und $\mathrm{POW}(x_\nu; \mathfrak{k}(i)) =: m_\nu \leq \mathrm{POW}(x_\nu; \mathfrak{k})$ ist (wegen $\mathfrak{k}(i) \subset \mathfrak{k}$), gilt $2 \leq m_\nu \leq 4$ (weil $\mathrm{POW}(x; \mathfrak{k}) \leq 4$ für alle $x \in C$). Es ist aber $m_\nu < 4$. Da nämlich die $\mathfrak{k}(i)$-Paratingente $P(x_\nu; \mathfrak{k}(i))$ in x_ν an C nach Voraussetzung eindeutig bestimmt ist (4.1., Satz, Vor. (4)), würde bei $\mathrm{POW}(x_\nu; \mathfrak{k}(i)) = 4$ die (eindeutig bestimmte) $\mathfrak{k}$-Scheitelparatingente $P(x_\nu; \mathfrak{k})$ gleich $P(x_\nu; \mathfrak{k}(i))$ sein, also $i \in P(x_\nu; \mathfrak{k})$ im Widerspruch zur Lage der i auf K_0 gemäß der Annahme am Ende von 4.2.1. Es ist also $2 \leq m_\nu \leq 3$. Aber auch $m = 3$ führt zu einem Widerspruch; denn im Falle $m_\nu = 3$ existieren $K \in \mathfrak{k}(i)$, welche mit beliebig kleinen Umgebungen von x_ν auf $\underline{C}_\nu$ je genau 3 Punkte gemeinsam haben und gegen eine $\mathfrak{k}(i)$-Paratingente P konvergieren, von der $\underline{C}_\nu$ in x_ν geschnitten wird. Wegen der Einzigkeit der $\mathfrak{k}(i)$-Paratingente in x_ν an $\underline{C}_\nu$ ist daher $P = K^\nu$, im Widerspruch damit, daß $\underline{C}_\nu$ in x_ν von K^ν gestützt wird. (3.3.2.).

(II) Die gleichen Überlegungen wie in Ziff. (I), angewandt jetzt auf $\underline{Z}'_\nu$ bezüglich $\mathfrak{k}(2', 3')$ sowie auf $\underline{C}_{\nu+1}$ bezüglich $\mathfrak{k}(3', 4')$

ergeben: Es existiert ein $x_{\nu,\nu+1} \in \underset{\sim}{Z}'_\nu$ mit $\mathrm{POW}(x_{\nu,\nu+1};\ \mathfrak{k}(2')) = \mathrm{POW}(x_{\nu,\nu+1};\ \mathfrak{k}(3')) = 2$ und mit $\operatorname{sgn} x_{\nu,\nu+1} = \alpha$. Ferner existiert ein $x_{\nu+1} \in \underset{\sim}{C}_{\nu+1}$ mit $\mathrm{POW}(x_{\nu+1};\mathfrak{k}(3')) = \mathrm{POW}(x_{\nu+1};\ \mathfrak{k}(4')) = 2$ und mit $\operatorname{sgn} x_{\nu+1} = -\alpha$.

4.2.3.2. (I) Gemäß 4.2.3.1. existieren x'_ν, $x_{\nu,\nu+1} \in \underset{\sim}{C}_\nu \cup \{2\nu\} \cup \underset{\sim}{Z}'_\nu =: \underset{\sim}{T}'_\nu$ mit $\mathrm{POW}(x_\nu;\ \mathfrak{k}(2')) = \mathrm{POW}(x_{\nu,\nu+1};\ \mathfrak{k}(2')) = 2$ und $\operatorname{sgn} x_\nu = -\alpha$, $\operatorname{sgn} x_{\nu,\nu+1} = \alpha$. Wir zeigen: *Auf* $\underset{\sim}{T}'_\nu$ *liegt zwischen* x_ν *und* $x_{\nu,\nu+1}$ *(mindestens) ein* $\mathfrak{k}(2')$*-Scheitel* x'_ν, *und zwar mit* $\mathrm{POW}(x'_\nu;\ \mathfrak{k}(2')) = 3$, *und mit* $\operatorname{vsgn} x'_\nu = -\alpha$.

In der Tat: Wenn kein $x'_\nu \in \underset{\sim}{C}_\nu(x_\nu \mid x_{\nu,\nu+1})$ mit $\mathrm{POW}(x'_\nu;\ \mathfrak{k}(2')) \geq 3$ existiert, dann ist $C(x_\nu \mid x_{\nu,\nu+1})$ Teil eines lokal $\mathfrak{k}(2')$-regulären offenen Teilbogens von C und, wegen $\mathrm{POW}(x_\nu;\ \mathfrak{k}(2')) = 2$, daher $\operatorname{vsgn} x_\nu = \operatorname{vsgn} x_{\nu,\nu+1} = -\alpha$ (gemäß 2.1.4.). Widerspruch. – Es sei x'_ν der am nächsten bei x_ν auf $\underset{\sim}{C}(x_\nu \mid x_{\nu,\nu+1})$ gelegene Punkt mit $\mathrm{POW}(x'_\nu;\ \mathfrak{k}(2')) = m'_\nu \geq 3$. Im Falle $m'_\nu > 3$ wäre aber (vgl. 4.2.3.1., Bew. (I) betr. $m_\nu < 4$) die (eindeutig bestimmte) $\mathfrak{k}(2')$-Paratingente $P := P(x'_\nu;\ C;\ \mathfrak{k}(2'))$ zugleich $\mathfrak{k}$-Scheitelparatingente, auf welcher $2'$ liegt. Widerspruch. – Schließlich ist $\operatorname{vsgn} x'_\nu = -\alpha$; denn wegen der lokalen $\mathfrak{k}$-Normalität von C folgt aus $\mathrm{POW}(x'_\nu;\ \mathfrak{k}(2')) = 3$, daß x'_ν isolierter $\mathfrak{k}(2')$-Scheitel (2.3.1.) und mithin eine vordere Umgebung von x'_ν auf C $\mathfrak{k}(2')$-regulär ist, woraus $\operatorname{vsgn} x_\nu = \operatorname{vsgn} x'_\nu = -\alpha$ folgt (2.1.4.).

(II) Wie in Ziff. (I) bezüglich x_ν und $x_{\nu,\nu+1}$ und $\underset{\sim}{T}'_\nu$, so schließt man bezüglich $x_{\nu,\nu+1}$ und $x_{\nu+1}$: *Auf* $\underset{\sim}{T}''_\nu := \underset{\sim}{Z}'_\nu \cup \{2\nu+1\} \cup \underset{\sim}{C}_{\nu+1}$ *liegt zwischen* $x_{\nu,\nu+1}$ *und* $x_{\nu+1}$ *(mindestens) ein* $x'_{\nu+1}$ *mit* $\mathrm{POW}(x'_{\nu+1};\ \mathfrak{k}(3')) = 3$ *und mit* $\operatorname{vsgn} x'_{\nu+1} = \alpha$.

4.2.3.3. (I) Für die in 4.2.3.2. gefundenen x'_ν und $x'_{\nu+1}$ (in $\underset{\sim}{T}_\nu$ (vgl. 4.2.2.)) gilt zunächst:

(I a) Es ist $\mathrm{POW}(x'_\nu;\ \mathfrak{k}) = 3$ (und dazu $\operatorname{vsgn} x'_\nu = -\alpha$). – In der Tat: Wegen $\mathfrak{k}(2') \subset \mathfrak{k}$ ist $\mathrm{POW}(x'_\nu;\ \mathfrak{k}) \geq 3 = \mathrm{POW}(x'_\nu;\ \mathfrak{k}(2'))$. Ferner ist (wegen der Eindeutigkeit der Paratingenten) $P(x'_\nu;\ C;\ \mathfrak{k}) = P(x'_\nu;\ C;\ \mathfrak{k}(2')) =: P$, also $2' \in P$. Daher kann x'_ν nicht $\mathfrak{k}$-Scheitel sein, woraus $\mathrm{POW}(x'_\nu;\ \mathfrak{k}) = 3$ folgt.

(I b) Entsprechend wie in (I a) ergibt sich: $\mathrm{POW}(x'_{\nu+1};\ \mathfrak{k}) = 3$ (mit $\operatorname{vsgn} x'_{\nu+1} = \alpha$).

(II) In 4.2.3.2. konnte aus der Existenz und der $\mathfrak{k}(2')$-Regularität von x_ν und $x_{\nu,\nu+1}$ sowie aus vsgn $x_\nu = -$ vsgn $x_{\nu,\nu+1} = -\alpha$ auf die Existenz eines $\mathfrak{k}(2')$-singulären $x'_\nu \in \underset{\sim}{C}(x_\nu \mid x_{\nu,\nu+1})$ mit vsgn $x'_\nu = -\alpha$ geschlossen werden. Entsprechend ergibt sich jetzt aus $\mathrm{POW}(x'_\nu; \mathfrak{k}) = \mathrm{POW}(x'_{\nu+1}; \mathfrak{k}) = 3$, also aus der $\mathfrak{k}$-Regularität von x'_ν und $x'_{\nu+1}$, sowie aus vsgn $x'_\nu = -\alpha$ und vsgn $x'_{\nu+1} = \alpha$, die Existenz eines (nach Voraussetzung (4.2.1.)) isolierten $\mathfrak{k}$-Scheitels $s_\nu \in \underset{\sim}{T}_\nu$, also mit $\mathrm{POW}(s_\nu; \mathfrak{k}) = 4$, und mit vsgn $s_\nu = -\alpha$.

4.2.3.4. Aus 4.2.3.3. ergibt sich die Behauptung in 4.2.2., wenn gezeigt wird:

Bei geeigneter Fortsetzung der Konstruktion (von s_ν in $\underset{\sim}{T}_\nu$) auf $\underset{\sim}{T}_{\nu+1} := \underset{\sim}{C}_{\nu+1} \cup C(2\nu+2 \mid 2\nu+3) \cup \underset{\sim}{C}_{\nu+2}$ kann ein $\mathfrak{k}$-Scheitel $s_{\nu+1} \in \underset{\sim}{T}_{\nu+1}$ mit vsgn $s_{\nu+1} = -\alpha$ gewonnen werden derart, daß s_ν *auf* C *vor* $s_{\nu+1}$ *liegt.*

Zum *Beweis* werde zunächst bemerkt: O.B.d.A. kann V''_ν und $V'_{\nu+1}$ (vgl. 3.3.2.) ersetzt werden durch $V_{\nu+1} := V''_\nu \cap V'_{\nu+1}$; und zwar gleich allgemein für jedes $\nu = 1, \ldots, n-1$, falls C Bogen ist; falls C Kurve ist, hat man $s_{\nu+n} := s_\nu$ zu setzen für $\nu = 1, \ldots, n$; und entsprechend für V'_ν usw. – Unter Berücksichtigung dieser Definition für $V_{\nu+1}$ usw. lassen wir in den Konstruktionen und Beweisen der Nummern 4.2.3.1.–4.2.3.3. an Stelle von C_ν, Z'_ν, $C_{\nu+1}$ treten: $C_{\nu+1}$, $Z'_{\nu+1}$, $C_{\nu+2}$ und an Stelle von $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ treten $3' \in \underset{\sim}{V}_\nu$, $4'$, $5' \in \underset{\sim}{V}_{\nu+1}$ sowie $6' \in \underset{\sim}{V}_{\nu+2}$. Es wird also $3'$, $4'$ beibehalten und demgemäß die Konstruktion von $x_{\nu+1} \in \underset{\sim}{C}_{\nu+1}$ als $\mathfrak{k}(3', 4')$-Scheitel; hinzu kommt ein $\mathfrak{k}(4', 5')$-Scheitel $x_{\nu+1,\nu+2} \in \underset{\sim}{Z}'_{\nu+1}$ und ein $\mathfrak{k}(5', 6')$-Scheitel $x_{\nu+2} \in \underset{\sim}{C}_{\nu+2}$. Durch die gleiche Konstruktion wie die des $\mathfrak{k}$-Scheitels $s_\nu \in \underset{\sim}{C}(x_\nu \mid x_{\nu+1})$ erhält man einen $\mathfrak{k}$-Scheitel $s_{\nu+1} \in \underset{\sim}{C}(x_{\nu+1} \mid x_{\nu+2})$ mit sgn $s_{\nu+1} = -\alpha =$ sgn x_ν. Wegen $\underset{\sim}{C}(x_\nu \mid x_{\nu+1}) \cap \underset{\sim}{C}(x_{\nu+1} \mid x_{\nu+2}) = \emptyset$ folgt, daß s_ν auf C vor $s_{\nu+1}$ liegt. Induktive Fortsetzung der Konstruktion ergibt die Beh. in 4.2.2., und damit den Satz in 4.1. für *Bogen.* Ist aber *C Kurve*, so folgt der Satz jedenfalls dann, wenn K_0 Kurve ist; diese Forderung beinhaltet indes keine Beschränkung der Allgemeinheit, da sich ein Bogen K_0 stets durch Hinzufügung eines Teilbogens des Randes von G zu einer Kurve ergänzen läßt.

Anmerkung. Der vorstehende Beweis des Satzes in 4.1. (vgl. speziell 4.2.3.1 (I) und (II)) beruht wesentlich auf dem Umstand, daß $k = 3$ ungerade ist (vgl. 1.4.1.). Für gerades k versagt er, zwar nicht für Bogen, aber für Kurven.

4.2.4. Betr. Beispiele. Aus dem Satz in 4.1. folgt der Satz von Herrn Jackson. Wir haben es nämlich dabei zu tun mit dem System $\mathfrak{k}$ der Geraden und Kreise (in der Ebene) und mit stetig gekrümmten Kurven C. Ein solches C ist zunächst $\mathfrak{k}$-ordinär (weil durch beliebige 3 Punkte der Ebene genau eine Gerade oder ein Kreis geht). Ferner ist C lokal $\mathfrak{k}$-normal (gemäß [5], Nr. 4.1., Lemma). Weiter existiert (bei stetig gekrümmtem C) in jedem $x \in C$ genau ein Schmiegkreis, das ist die $\mathfrak{k}$-Paratingente. Zudem gibt es in jedem $x \in C$ genau eine $\mathfrak{k}(x')$-Paratingente an C, nämlich einen Kreis durch x' ($\neq x$), welcher C in x berührt; dies folgt schon daraus, daß C in x eine (freie, nämlich) stetige Tangente besitzt (vgl. [5] a.a.O.). Auch im übrigen sind die Vor. des Satzes in 4.1. erfüllt. –

Analoge Bemerkungen gelten für den Fall der hyperbolischen ebenen Geometrie.

Literatur

[1] Jackson, S. B., Vertices of plane curves. Bull. Amer. math. Soc. 50 (1944), 564–578.

[2] Haupt-Künneth, Geometrische Ordnungen. Berlin-Heidelberg 1967.

[3] Haupt-Künneth, Bemerkungen zu Sätzen von Herrn S. B. Jackson. Bayer. Akad. d. Wiss., Sitz.-Ber. math.-naturw. Kl. 1971, 1–11.

[4] Haupt-Künneth, Über einen $2n$-Scheitelsatz. Bayer. Akad. d. Wiss., Sitz.-Ber. math.-naturw. Kl. 1974, 59–72.

[5] Haupt, Bemerkungen zum Kneserschen Vierscheitelsatz. Abh. math. Seminar Univ. Hamburg 31 (1967), 218–238.

[6] Mukhopadhyaya, S., Extended Minimum-Number Theorems of Cyclic and Sextactic Points on a plane Convex Oval. Math. Zeitschr. 33 (1931), 648–662.