BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1975

MÜNCHEN 1976

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Strahl-Partitionen in Gruppen und Geometrie

Von **Georg Aumann**

Robert König zum 90. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Auf die Frage „Was ist ein Punkt?" gibt der Axiomatiker der Euklidischen Geometrie zurecht die farblose Antwort: Ein Punkt ist Element einer Menge, deren Elemente man Punkte nennt. Die Lage ist etwas günstiger in der projektiven Geometrie; dort wird einem wenigstens für die der Anschauung unzugänglichen „unendlich fernen" Punkte eine richtige Definition geboten. Vor dieselbe Frage ist man gestellt, wenn man, ausgehend von einem Vektorraum V, was eine rein algebraische Struktur ist, die zugehörige Punktgeometrie (Affingeometrie) erklären soll. Die übliche Lösung bedient sich der gleichen axiomatischen Unbekümmertheit: Man nehme eine Menge P, deren Elemente p man Punkte nennt, und welche bijektiv auf V bezogen sei durch eine Abbildung $f: P \to V$. Als Verbindungsvektor zweier Punkte p_1 und p_2 erklärt man

$$\overrightarrow{p_1 p_2} := f(p_2) - f(p_1).$$

Bezeichnet p_0 denjenigen Punkt mit $f(p_0) = \bar{o}$, so hat man in der bijektiven Zuordnung $p \mapsto \overrightarrow{p_0 p}$ die gewünschte „Koordinatisierung" des Punktraumes P mit Hilfe des Vektorraumes V (mit p_0 als Ursprung des Koordinatensystems). Ein besonders einfaches Beispiel für die Abbildung f ist $\{x\} \mapsto x$, die der aus einem Vektor $x \in V$ bestehenden Menge $\{x\}$ den Vektor x zuordnet, so daß die Beziehung zwischen den Punkten und den Vektoren die anschauliche Form

$$\overrightarrow{\{x_1\}\{x_2\}} = x_2 - x_1$$

annimmt. Die Versuchung hier ist groß – man gibt ihr oft nach – bei $\{x\}$ auch noch die Klammern wegzulassen, was natürlich einen Mißbrauch darstellt, der, wenn wohlverstanden, harmlos und recht bequem ist. Die Mühelosigkeit dieser Verfahrensweise ist wohl der Grund dafür, daß man sich nicht veranlaßt fühlt, eine Deutung der Punkte zu geben, bei welcher die Abbildung f nicht abstrakt und willkürlich in Erscheinung tritt, sondern in natürlicher Weise aus den Gegebenheiten des Vektorraumes V hervorgeht. Dies ist aber in der Tat möglich durch Benutzung einer Konstruktion, die von jeher bei der Konstruktion des projektiven Raumes angewandt wird (vgl. [1]) und welche zum Begriff der „Strahlpartition" einer Gruppe G und des zugehörigen „Strahlverbandes" $\mathfrak{B}$ verallgemeinert werden kann. Wendet man diese Methode an auf die Permutationsgruppe $\Pi = \Pi_V$ der Parallelismen des Vektorraumes V, d. h. auf das System derjenigen Permutation von V, bei welchen die Differenz von 2 Bildvektoren stets parallel ist zur Differenz der Urbilder, so stellt unter geeigneten Voraussetzungen ein geeignet definierter Strahlverband $\mathfrak{B}_\Pi$ den Teilraumverband einer projektiven Geometrie dar, deren „affiner" Anteil gerade den zu V gehörigen Punktraum P ergibt. Die Punkte von P sind gewisse „minimale" Elemente von $\mathfrak{B}_\Pi$. Auf die üblichen geometrischen Vorstellungen eingehend kann man genauer und einfacher sagen: „Punkt" ist die jedem Vektor $x \in V$ in 1-1-deutiger Weise zugeordnete Gruppe $D(x)$ der Dilatationen δ mit dem Fixvektor x (d. h. $\delta(y) := x + \lambda(y - x)$, $y \in V$, bei jeweils festem $\lambda \in K \setminus \{0\}$, der Multiplikationsgruppe des zu V gehörigen Körpers K). Hier ist $D(x) \mapsto x$ die Koordinatisierung. Zu bemerken ist, daß bei dieser Auffassung das „Verbinden" im Strahlverband sich durch Bildung der baryzentrischen Hülle in V beschreiben läßt, wie man es ja auch erwartet. Es besteht keineswegs die Absicht, diesen einfachen baryzentrischen Kalkül durch ein verbandstheoretisches Rechnen ersetzen zu wollen, vielmehr sollen unsere Ausführungen nur zeigen, daß man sich bei der Frage „Was ist ein Punkt?" bei dem Problem des Übergangs vom Vektorraum zum Affinraum nicht mit der farblosen Antwort des Axiomatikers zu begnügen braucht; im übrigen dürfte das hier Vorgebrachte das große klassische Beispiel zum Thema „Geometrie der Algebren" [3] sein, womit wohl auch seine hier gebotene exemplarische Darstellung gerechtfertigt ist.

2. Strahlverbände in einer Gruppe

2.1. Es sei G eine Gruppe mit Einselement 1. Eine Menge $\mathfrak{S}$ von Untergruppen $S \neq \{1\}$ von G heißt eine „*Strahlpartition*" *von* G, wenn 1. $G = \bigcup \{S \vdots S \in \mathfrak{S}\}$ und 2. je zwei verschiedene $S \in \mathfrak{S}$ bis auf 1 disjunkt sind; die Untergruppen $S \in \mathfrak{S}$ heißen die „*Strahlen*" der Strahlpartition $\mathfrak{S}$. Unter einer „$\mathfrak{S}$-*Gruppe*" U verstehen wir eine Untergruppe von G mit der Eigenschaft, daß jedes $S \in \mathfrak{S}$ entweder mit U nur 1 gemein hat oder ganz in U enthalten ist. $\{1\}$, jedes $S \in \mathfrak{S}$ und G sind z. B. $\mathfrak{S}$-Gruppen.

Satz. *Das System* $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(G, \mathfrak{S})$ *aller* $\mathfrak{S}$-*Gruppen bildet mit der Ordnung* $\subset$ *einen atomaren, vollständigen und induktiven Verband mit* $\{1\}$ *als kleinstem und* G *als größtem Element. Für irgend eine Menge* $\mathfrak{U} := (U_i)_i$ *von* $\mathfrak{S}$-*Gruppen* U_i *gilt dabei:*

$$\inf \mathfrak{U} = \bigcap {}_i U_i \text{ und } \sup \mathfrak{U} = \inf \{U \vdots U \in \mathfrak{V} \wedge \bigwedge{}_i U_i \subset U\}.$$

Beweis. Jedes $S \in \mathfrak{S}$ ist minimal in $\mathfrak{V} \setminus \{1\}$ und die S sind die Atome von $\mathfrak{V}$, und für jede $\mathfrak{S}$-Gruppe U gilt $U = \bigcup \{S \vdots S \in \mathfrak{S} \wedge S \subset U\} = \sup \{S \vdots S \in \mathfrak{S} \wedge S \subset U\}$, d. h. jedes $U \in \mathfrak{V}$ ist das Supremum der in ihm enthaltenen Atome. $\bigcap_i U_i$ ist offensichtlich eine $\mathfrak{S}$-Gruppe $\subset U_i$ für alle i und zwar die größte derartige. Analog erklärt sich die Gleichung für $\sup \mathfrak{U}$. Schließlich ist $\mathfrak{V}$ induktiv. Dies drückt sich in folgender Formel aus:

Ist $\ldots \subset U_\alpha \subset \ldots \subset U_\beta \subset \ldots$ eine „Kette" von $\mathfrak{S}$-Gruppen, so gilt:

$$\sup \{\ldots, U_\alpha, \ldots, U_\beta, \ldots\} = \ldots \cup U_\alpha \cup \ldots \cup U_\beta \cup \ldots .$$

In der Tat bezeichnet L bzw. R die linke bzw. rechte Seite dieser Gleichung, so folgt aus der Definition von sup einmal $L \supset R$; andererseits ist R eine $\mathfrak{S}$-Gruppe $\supset U_\alpha$ für alle α, also ist auch $R \supset L$.

Es sei $\sup \{U, V\} = [U, V]$ gesetzt.

2.2. Unsere Absicht geht dahin, Fälle zu erhalten, in welchen der Strahlverband $\mathfrak{V}$ ein geometrischer Verband ist. Wir gehen gleich etwas weiter und definieren [2]:

Ein Verband $\mathfrak{V}$ heißt eine (verallgemeinerte) „*projektive Geometrie*", wenn $\mathfrak{V}$ atomar, vollständig, induktiv, komplementär und nach oben semimodular ist.

Wir wollen uns zunächst der letzten Eigenschaft zuwenden.

2.2.1. **Semimodularität.** Betrachten wir die Angelegenheit gleich am Beispiel von $\mathfrak{V}$. Gilt für zwei $\mathfrak{S}$-Gruppen U, V, sowohl $U \subsetneqq V$ als auch $\bigwedge_{W \in \mathfrak{V}} U \subset W \subset V \succ W = U \vee W = V$, so heißt U ein „*unterer Nachbar*" von V, in Zeichen $U \subset_0 V$.

Wenn $U \subset_0 V$, so gilt $V = [U, S]$, für $S \in \mathfrak{S}$ mit $S \not\subset U$ und $S \subset V$; denn $U \neq [U, S]$ und $U \subset [U, S] \subset V$, also $[U, S] = V$. Wir wollen für den Fall, daß auch umgekehrt jedes $[U, S]$ mit $S \not\subset U$ das U zum unteren Nachbar hat, eine Kennzeichnung von $\mathfrak{V}$ angeben. Zu diesem Zweck definieren wir:

$\mathfrak{V}$ heißt „*nach oben semimodular*", wenn

$$\bigwedge_{U, V, W \in \mathfrak{V}} U \subset_0 V \wedge U \subset_0 W \wedge V \neq W \succ V \subset_0 [V, W].$$

Es gilt nun der

Satz. *Es ist $\mathfrak{V}$ nach oben semimodular dann und nur dann, wenn* (m) $\bigwedge_{U, V \in \mathfrak{V}} U \subset_0 V \curlyveeuparrow\!\!\!\curlywedgedownarrow \bigvee_{S \in \mathfrak{S}} S \not\subset U \wedge V = [U, S]$.

Beweis. Für „dann". Es sei $U \subset_0 V$ und $U \subset_0 W$ und $V \neq W$, also $V = [U, S_1]$, $W = [U, S_2]$ mit gewissen $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$. Dann ist $[V, W] = [[U, S_1], [U, S_2]] = \sup\{U, S_1, S_2\} = [[U, S_1], S_2] = [V, S_2]$: dabei ist $S_2 \not\subset V$, weil sonst $U \subset W \subset V$, also $W = V$ wäre. Damit ist $V \subset_0 [V, W]$ und somit $\mathfrak{V}$ semimodular nach oben. –

Für „nur dann". Es sei jetzt $\mathfrak{V}$ nach oben semimodular.

1. Für $S_0 \neq S'$ ist $\{1\} \subset_0 S_0$ und $\{1\} \subset_0 S'$, also $S_0 \subset_0 [S_0, S']$.

2. Es sei für ein $k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ erwiesen, daß für jedes $U := \sup\{S_0, \ldots, S_k\}$ und jedes $S_{k+1} \not\subset U$ gelte: $U \subset_0 [U, S_{k+1}]$. Ist nun $U_1 := \sup\{S_0, \ldots, S_k, S_{k+1}\} \not\supset S_{k+2}$ vorgegeben, dann ist nach Induktionsvoraussetzung $U \subset_0 U_1$ und $U \subset_0 U_2 := \sup\{S_0, \ldots, S_k, S_{k+2}\}$ und $U_1 \neq U_2$, also $U_1 \subset_0 [U_1, U_2] = [U_1, S_{k+2}]$. Damit ist allgemein gezeigt, daß für jedes $k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, jedes $U := \sup\{S_0, \ldots, S_k\}$ und jedes $S' \not\subset U$ gilt: $U \subset_0 [U, S']$.

3. Nun sei μ eine unendliche Ordinalzahl und für jedes $\mu' < \mu$, jedes $U' := \sup \{S_\alpha \,\vdots\, \alpha < \mu'\}$ und jedes $S' \not\subset U'$ gelte: $U' \subset_0 [U', S']$. Wir wollen zeigen, daß dies auch noch für $\mu' = \mu$ zurecht besteht.

(a) Es sei μ eine Anfangszahl, $U := \sup \{S_\alpha \,\vdots\, \alpha < \mu\}$ und $S' \not\subset U$. Dann ist $U = U_0 \cup \ldots \cup U_\alpha \cup \ldots (\alpha < \mu)$ mit $U_\alpha := \sup \{S_\beta \,\vdots\, \beta \leq \alpha\}$, also $[U, S'] = [U_0, S'] \cup \ldots \cup [U_\alpha, S'] \cup \ldots$ (denn die rechte Seite der letzten Gleichung ist eine $\mathfrak{S}$-Gruppe $\supset U \cup S'$ und zudem $\subset [U, S']$). Angenommen, U wäre nicht unterer Nachbar von $[U, S']$. Dann gibt es ein $S'' \subset [U, S']$ mit $S'' \not\subset U$, so daß $U \subsetneqq [U, S''] \subsetneqq [U, S']$. Weiter gibt es ein $\alpha < \mu$, so daß $S'' \subset [U_\alpha, S']$. Da $U_\alpha = \sup \{S_\beta \,\vdots\, \beta < \alpha + 1\}$ mit $\alpha + 1 < \mu$ (weil μ unendliche Anfangszahl ist) und $S'' \not\subset U_\alpha$, so folgt nach Induktionsvoraussetzung $U_\alpha \subset_0 [U_\alpha, S'']$. Ebenso ist $U_\alpha \subset_0 [U_\alpha, S']$. Falls also $[U_\alpha, S'] \neq [U_\alpha, S'']$, so folgt wegen der Semimodularität $U_\alpha \subsetneqq [U_\alpha, S''] \subset_0 [[U_\alpha, S'], [U_\alpha, S'']] = [U_\alpha, S']$ (Widerspruch!). Daher ist $[U_\alpha, S''] = [U_\alpha, S']$. Diese Gleichung gilt aber auch für jedes größere α und daher ist $[U, S''] = [U, S']$ (Widerspruch!). Somit gilt $U \subset_0 [U, S']$.

(b) Es sei jetzt μ unendlich, aber keine Anfangszahl und $U := \sup \{S_\alpha \,\vdots\, \alpha < \mu\}$. Dann ist $\mu = \mu_0 + n$, wobei μ_0 Anfangszahl und $n \in \boldsymbol{N}$. Wir schreiben nun die Ordnung der S_α um in: $S_{\mu_0}, S_{\mu_0+1}, \ldots, S_{\mu_0+n-1}, S_0, \ldots, S_\beta, \ldots (\beta < \mu_0)$ und setzten $S'_\beta := S_{\mu_0+\beta}$ für $\beta = 0, \ldots, n-1$, $= S_{\beta-n}$ für $\beta = n, n+1, \ldots (\beta < \omega)$, und $= S_\beta$ für $\omega \leq \beta < \mu_0$. Dann ist $U = \sup \{S'_\alpha \,\vdots\, \alpha < \mu_0\}$, so daß wir auf den Fall (a) zurückgekommen sind.

2.2.2. Komplementarität.

Satz. *Wenn B nach oben semimodular ist, so besitzt jedes* $U \in \mathfrak{B}$ *mindestens ein Komplement* $U^+ \in \mathfrak{B}$, *d.h. mit den Eigenschaften, daß* $[U, U^+] = G$ *und* $U \frown U^+ = \{1\}$.

Beweis. Es sei $U \in \mathfrak{B}$ und $\{1\} \neq U \neq G$. Die Menge $\mathfrak{S}^+$ der Strahlen S mit $U \frown S = \{1\}$ ist nicht leer. Man konstruiert eine aufsteigende wohlgeordnete Kette $U_0 \subset \ldots \subset U_\beta \subset \ldots (\beta < \mu)$

von $\mathfrak{S}$-Gruppen U_β, für deren jede $U_\beta \cap U = \{1\}$ gilt und deren Vereinigung ein Komplement von U ist. Von einer näheren Beschreibung der transfinit-induktiven Konstruktion der U_β sei hier abgesehen.

2.2.3. Die vorausgehenden Sätze lassen es zweckmäßig erscheinen, für die Ermittlung von $[U, S]$ eine bequeme Berechnung zu haben. Hierzu definieren wir:

Wir nennen die Strahlpartition $\mathfrak{S}$ „*quasimultiplikativ*“, wenn

$$\bigwedge\nolimits_{U\in\mathfrak{B},\, S\in\mathfrak{S}} \bigvee\nolimits_{S'\in\mathfrak{S}} [U, S] = [U, S'] = US'$$
$$(:= \{us' \,\vdots\, u \in U \wedge s' \in S'\}).$$

Nun gilt der

Satz. *Ist* $\mathfrak{S}$ *quasimultiplikativ, so ist* $\mathfrak{B}$ *nach oben semimodular.*

Beweis. Wir zeigen, daß aus der Quasimultiplikativität die Aussage (m) von Satz 2.2.1. folgt. Es genügt die Teilaussage mit „$<$“ zu betrachten. Angenommen, es wäre $V = US'$ mit $S' \not\subset U$ und $U \subset_0 V$ nicht erfüllt. Dann gibt es ein $W \in \mathfrak{B}$ mit $U \subsetneqq W \subsetneqq V$, weiter ein $S_0 \subset W$ mit $S_0 \not\subset U$ und $[U, S_0] = US'' \subset W$; dabei ist $S'' \neq S'$. Es gibt ein $s'' \in S''$ mit $s'' \neq 1$, und weil $s'' \in V$, gibt es $u \in U$, $s' \in S'$ mit $s'' = us'$; dabei ist $u \neq 1$, weil sonst $S'' = S'$ wäre. Es folgt $s' = u^{-1} s'' \in US''$, also $S' \subset US''$, also $V = US' \subset US'' \subset W$, ein Widerspruch. Also gilt stets $U \subset_0 [U, S]$ für $S \not\subset U$.

Bemerkungen. 1. Wenn $[U, S'] = US'$, dann gilt auch $US' = S'U$. (Beweis. Einerseits ist $S'U \subset [U, S'] = US'$. Andererseits $w \in US' > w^{-1} \in US'$, also $w^{-1} = us'$ mit $u \in U$, $s' \in S'$, also $w = s'^{-1} u^{-1} \in S'U$.) –

2. Quasimultiplikativität von $\mathfrak{S}$ liegt insbesondere dann vor, wenn (*) $\bigwedge_{S, S'\in\mathfrak{S}} [S, S'] = SS'$; dann gilt nämlich $SS' = S'S$, so daß für $U = \bigcup_i S_i$ gilt $U = \bigcup_i S_i S$, was eine $\mathfrak{S}$-Gruppe $\supset$ $\supset U_i$ für alle i. Also ist $[U, S] = US$. Im Falle (*) nennen wir $\mathfrak{S}$ „*multiplikativ*“.

2.2.4. In Zusammenfassung der vorausgehenden Betrachtungen erhalten wir den

Satz. *Ist G eine Gruppe und $\mathfrak{S}$ eine quasimultiplikative Strahlpartition von G, so ist der Verband $\mathfrak{V}(G, \mathfrak{S})$ aller $\mathfrak{S}$-Gruppen von G eine verallgemeinerte projektive Geometrie.*

Dieses Ergebnis wirft *zwei Probleme* auf,

1. die Frage: Wie muß eine Gruppe G beschaffen sein, damit sie eine nicht-triviale, quasimultiplikative Strahl-Partition zuläßt?
2. die Frage: Von welcher Art sind verallgemeinerte projektive Geometrien, wenn sie von einer quasimultiplikativen Strahl-Partition einer Gruppe herrühren?

Wir verfolgen diese Frage hier nicht weiter, sondern werden den obigen Satz anwenden auf den klassischen Fall der Parallelismengruppe eines Vektorraumes.

3. Der einem Vektorraum zugeordnete Punktraum und Affinraum

3.1. Die Gruppe der Parallelismen eines Vektorraumes.

Es bezeichne V einen Vektorraum über dem Körper K. Wir definieren: Unter einem *Parallelismus* π von V versteht man jede Abbildung der Form $\pi(x) := \pi_{x_0, \lambda}(x) := x_0 + \lambda x, x \in V$, wobei $x_0 \in V$ und $\lambda \in K \setminus \{0\}$ jeweils fest sind.

Satz. Ist $\dim V \geq 2$, so ist eine bijektive Abbildung ϱ von V auf sich genau dann ein Parallelismus von V, wenn für je zwei voneinander verschiedene $v, v' \in V$ gilt:

$$\varrho(v') - \varrho(v) \,||\, v' - v.$$

Beweis. Das ,,dann" ist durch einfaches Ausrechnen zu bestätigen. Um das ,,nur dann" zu beweisen, stellen wir zunächst fest, daß mit ϱ auch $\varrho' := \varrho - \varrho(\bar{o})$ die Parallelitätsbedingung erfüllt, wobei noch $\varrho'(\bar{o}) = \bar{o}$. Insbesondere ist also $\varrho'(v) = \lambda(v)\, v$ für $v \neq \bar{o}$, und weiter $\lambda(v')v' - \lambda(v)v = \lambda' . (v' - v)$, oder $(\lambda(v') - \lambda')v' - (\lambda' - \lambda(v))v = \bar{o}$. Hieraus folgt $\lambda(v') = \lambda(v)$, wenn v und v' linear unabhängig sind. Sind aber etwa v' und v linear abhängig, aber beide $\neq \bar{o}$, so gibt es wegen $\dim V \geq 2$ ein $v'' \in V$, so daß v, v'' und v', v'' je linear unabhängig sind, so daß $\lambda(v) = \lambda(v'') = \lambda(v')$. Also ist λ eine Konstante.

3.2. Die Parallelismen $\pi_{x_0, 1}$ heißen *Translationen* (mit dem Translationsvektor x_0), die Parallelismen $\pi_{x_0, \mu}$ mit $\mu \neq 1$ heißen *Dilatationen*. Jede Dilatation $\pi_{x_0, \mu}$ hat genau einen Fixvektor $x_0^* := (1 - \mu)^{-1} x_0$; man kann sie daher auch in der Form $x \mapsto x_0^* + \mu(x - x_0^*)$ schreiben und als solche bezeichnen wir sie mit $\delta_{x_0^*, \mu}$ $(\mu \neq 0, 1)$.

Die Parallelismen von V bilden eine Permutationsgruppe Π $(= \Pi(V))$ mit dem Verknüpfungsgesetz

$$\pi_{x, \mu} \circ \pi_{x', \mu'} = \pi_{\mu x' + x, \mu\mu'}.$$

Die Translationen bilden eine Untergruppe $\mathfrak{T}$ $(= \mathfrak{T}(V))$ von Π, welche mit $(V, +)$ isomorph ist. Durch die zusätzliche Definition

$$\varrho \pi_{x_0, 1} := \pi_{\varrho x_0, 1}, \; \varrho \in K,$$

wird $\mathfrak{T}$ zu einem K-Vektorraum, den wir mit $\langle \mathfrak{T} \rangle$ bezeichnen und der zum Vektorraum V isomorph ist. Schließlich bezeichnen wir die Menge der Dilatationen $\delta_{x, \mu}$, $x \in V$ und $\mu \in K \setminus \{0, 1\}$ mit $\mathfrak{D}$ $(= \mathfrak{D}(V))$.

3.3. Geometrisches.

Das zunächst rein algebraische Gesicht der Permutationsgruppe Π erfährt eine geometrische Deutung durch Einführung von Gegenständen, welche wir als „geometrisch" bezeichnen; diese Objekte sind die Strahlen einer quasimultiplikativen Strahlpartition $\mathfrak{S}$ von Π, allgemein die Verbandselemente des zugehörigen Strahlverbandes $\mathfrak{V}(\Pi, \mathfrak{S})$.

Definition. 1. Ist $\tau := \pi_{x_0, 1}$ eine Translation mit $x_0 \neq \tilde{0}$, so bezeichnen wir die Gruppe aller Translationen derselben „Richtung", d. h. $\pi_{\varrho x_0, 1}$, $\varrho \in K$, mit $T(\tau)$ und nennen $T(\tau)$ einen „*T-Strahl*". Ist $\delta := \delta_{x, \mu}$ $(\mu \neq 1)$ eine Dilatation, so bezeichnen wir die Gruppe aller Dilatationen mit dem gleichen Fixvektor x mit $D(\delta)$ und nennen $D(\delta)$ einen „*D-Strahl*". $D(\delta)$ besteht also aus allen Abbildungen $y \mapsto x + \mu'(y - x)$, $y \in V$, mit $\mu' \in K \setminus \{0\}$.

Hilfssatz. Ist T ein T-Strahl, S ein T- oder D-Strahl, so gilt $[T, S] = TS = ST$.

Beweis. Falls S ein T-Strahl, so haben wir es mit einer leicht zu erledigenden Situation im Vektorraum $\langle\mathfrak{T}\rangle$ zu tun; es sei also S ein D-Strahl mit dem Fixvektor x_0 und T mit einem Translationsvektor $v \neq \bar{o}$. Dann besteht ST aus den Abbildungen $x \mapsto x_0 + \varrho(x + \lambda v - x_0)$ und TS aus $x \mapsto x_0 + \varrho'(x - x_0) + \lambda' v$ mit $\varrho, \varrho' \in K \setminus \{o\}$ und $\lambda, \lambda' \in K$. Die beiden Abbildungen sind gleich genau dann, wenn $\varrho' = \varrho$ und $\lambda' = \varrho\lambda$; dadurch sind die Paare (ϱ, λ) und $\varrho', \lambda')$ 1—1-deutig aufeinander bezogen, also $ST = TS$. Für $\varrho \neq 1$ stellt die erste Abbildung (z. B.) eine Dilatation dar mit dem Fixvektor $x_1 := x_0 + \mu v$ mit $\mu := (1 - \varrho)^{-1}\lambda$. Hält man μ fest und läßt $\varrho \in K \setminus \{o\}$ beliebig variieren, so erhält man mit $\mu = \lambda(1 - \varrho)$ alle Dilatationen mit dem Fixvektor x_1. In ähnlicher Weise rechnet man nach, daß das Produkt von zwei Dilatationen mit Fixvektoren der Form x_1 entweder wieder eine derartige Dilatation ist oder eine Translation aus T, woraus dann folgt, daß ST eine $\mathfrak{S}$-Gruppe ist.

Unsere Bezeichnungen rechtfertigen sich durch folgenden

Satz. *Das System $\mathfrak{S}_{\mathfrak{T}}$ aller T-Strahlen ist ein multiplikative Strahlpartition der Gruppe $\mathfrak{T}$ aller Translationen von Π; das System $\mathfrak{S}_{\Pi}$ aller T- und D-Strahlen ist eine quasimultiplikative Strahlpartition von Π.*

Beweis. Betr. $\mathfrak{S}_{\mathfrak{T}}$. Behauptung folgt direkt aus der Vektorraumeigenschaft von $\langle\mathfrak{T}\rangle$. – **Betr.** $\mathfrak{S}_{\Pi}$. Es sei $U \in \mathfrak{B}$ und $S \in \mathfrak{S}$. Besteht U nur aus T-Strahlen, $U = \bigcup_i T_i$, so gilt nach dem Hilfssatz $US = \bigcup_i T_i S = \bigcup_i [T_i, S] = \bigcup_i S T_i = SU$, so daß US die $\mathfrak{S}$-Gruppe $[U, S]$ ist. Analoge Überlegungen gelten für den Fall, daß S ein T-Strahl ist. Für den Fall, daß S ein D-Strahl mit dem Fixvektor x_0 ist und U einen D-Strahl D mit dem Fixvektor $x_1 \neq x_0$ enthält, zeigt sich, daß $SDS \subset [U, S]$ den T-Strahl mit dem Translationsvektor $x_1 - x_0$ enthält, so daß $[U, S] \supset [U, T] = UT$; andererseits ist, wenn τ die Translation mit dem Translationsvektor $x_1 - x_0$ bezeichnet

$$\tau^{-1} D \tau = S,$$

so daß $S \subset [U, T]$, also $[U, S] \subset [U, T] = UT$, und somit $[U, S] = UT$.

3.3.2. Die nachfolgenden Begriffe und Aussagen haben den Zweck, die aus der analytischen Geometrie ([4]) bekannten Zusammenhänge zwischen Vektorraum, dem zugehörigen Affinraum und dessen projektiven Erweiterung noch enger in Verbindung zu bringen mit den im vorausgehenden entwickelten Vorstellungen; auf entsprechende Beweise, die nur elementare Rechnungen im Vektorraum verlangen, gehe ich nicht weiter ein.

Wir nennen die D-Strahlen die „*eigentlichen Punkte*", die T-Strahlen die „*uneigentlichen Punkte*", und allgemein die $\mathfrak{S}$-Gruppen die „*geometrischen Untergruppen*" von Π. Der Verband $\mathfrak{V}(\Pi, \mathfrak{S}_\Pi)$ der geometrischen Untergruppen U von Π heißt die *projektive Einbettung* von V. Die Zerlegung $\Pi = \mathfrak{T} \cup \mathfrak{D}$ von Π in Translationen und Dilatationen bewirkt in jeder geometrischen Untergruppe U die bis auf ι (= identische Abbildung von V = Einselement von Π) disjunkte Darstellung

$$U = U_\mathfrak{t} \cup U_\mathfrak{d}$$

mit $U_t := U \cap \mathfrak{T}$ und $U_\mathfrak{d} = U \cap \mathfrak{D} \cup \{\iota\}$, wobei $U_\mathfrak{d} = \bigcup_i D_i$, Vereinigung von lauter verschiedenen D-Strahlen D_i ist. Bezeichnen wir für eine Menge A, welche Vereinigung von bis auf ι disjunkten $\mathfrak{S}$-Strahlen ist, mit A^* die Menge dieser $\mathfrak{S}$-Strahlen, so nennen wir, wenn U eine geometrische Untergruppe mit Dilatationen bezeichnet, das Paar $(U_\mathfrak{d}{}^*, < U_\mathfrak{t} >)$ den „*Affinraum zu*" U mit dem (eigentlichen „*Punktraum*" $U_\mathfrak{d}{}^*$ und dem *Vektorraum* $<U_\mathfrak{t}>$; indem dabei jedem (eigentlichen) Punkt $S_i{}^* \in U_\mathfrak{d}^*$ 1—1-deutig der Fixvektor x_i von S_i zugeordnet ist (Koordinatisierung von $U_\mathfrak{d}{}^*$) liefert

$$\overrightarrow{S_i^* S_j^*} = x_j - x_i \in V_U$$

die Beziehung zwischen den Punkten und den Vektoren des Affinraumes; V_U ist ein zu $<U_\mathfrak{t}>$ isomorpher Teilvektorraum von V. Ferner ist der Punktraum $U_\mathfrak{d}$ „*baryzentrisch stabil*", d. h. ist $S_0, S_1 \subset U_\mathfrak{d}$ mit den Fixvektoren x_0, x_1, so gehört auch S zu $U_\mathfrak{d}$ soferne der Fixvektor x von S baryzentrische Linearkombination von x_0 und x_1 ist (d. h. $\bigvee_{\lambda \in K} x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_0$); allgemein vollzieht sich das „Verbinden" im Punktraum, d. h. die Bildung von sup $\{S_i : i \in J\}_\mathfrak{d}^*$, worin die S_i eigentliche Punkte sind, durch Bildung der „baryzentrischen Hülle", wie man es ja auch erwartet. Schließlich sei noch bemerkt: Ist U eine geometrische Untergruppe, so ist für die zum Vektorraum $<U_t>$ gehörige Parallelismengruppe $\Pi_1 := \Pi(<U_t>)$ die projektive Einbettung $\mathfrak{B}(\Pi_1, \mathfrak{S}_{\Pi_1})$ verbandsisomorph zu dem in U von $\mathfrak{B}(\Pi, \mathfrak{S}_\Pi)$ induzierten Unterverband.

4. Der hier vorgeführte Aufbau einer projektiven Geometrie aus einem Vektorraum mittels einer rein gruppentheoretischen Methode ist mir weder in einer Monographie noch in einem Lehrbuch begegnet; ich hielt es daher für nützlich die zugrunde liegende Idee einmal allgemein und exemplarisch am klassischen Beispiel der Parallelismen eines Vektorraumes darzustellen. Daß nach unserer Definition Punkte Mengen sind, also Teile haben – was einen natürlich in formalen Widerspruch zur euklidischen Erklärung eines Punktes bringt – ist wahrlich nichts Neues. Schließlich waren es gerade Vorstellungen dieser Art, womit die Geometer dem Siegeszug der projektiven Geometrie freie Bahn schafften.

Literatur

[1] R. Baer, Gruppentheoretische Begründung der Geometrie, Vorlesung gehalten in Tübingen (1953), Ausarbeitung von H. Salzmann.

[2] G. Birkhoff, Lattice Theory (3. Aufl.), 1967.

[3] W. Benz, Geometrie der Algebren, 1973.

[4] G. Pickert, Analytische Geometrie (3. Aufl.), 1958.