BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1975

MÜNCHEN 1976

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Das Existenzproblem der Möbius-, Laguerre- und Minkowski-Erweiterungen endlicher affiner Ebenen

Von **Werner Heise** und **Hans Seybold** in Freising/Obb.

Vorgelegt von F. L. Bauer am 8. November 1974

$n > 1$ sei eine natürliche Zahl und Σ ein *Steinersystem* mit den Parametern $t = 2$, $k = n$ und $v = n^2$, d. h. eine $v = n^2$-elementige *Punkte*-Menge P mit einem ausgezeichneten System $\mathfrak{B}$ von $k = n$-elementigen Teilmengen von P, den *Blöcken* von Σ, in dem zu je $t = 2$ verschiedenen Punkten genau ein Block existiert, der diese Punkte enthält. $B \in \mathfrak{B}$ sei ein Block und $p \in P \setminus B$ ein nicht mit B inzidenter Punkt. Dann liegen auf den n Verbindungsblöcken von p mit den Punkten von B gerade $n^2 - (n - 1)$ Punkte. Der Verbindungsblock von p mit einem beliebigen noch nicht erfaßten Punkt von P besteht also aus p und den restlichen $n - 1$ Punkten von P. Damit ist das euklidische Parallelenaxiom bewiesen, mit anderen Worten: Σ ist eine endliche affine Ebene der Ordnung n. Umgekehrt ist offensichtlich jede endliche affine Ebene der Ordnung n ein Steinersystem mit den Parametern $t = 2$, $k = n$ und $v = n^2$.

Entfernt man aus einer projektiven Ebene eine Gerade und alle mit ihr inzidenten Punkte, so erhält man eine affine Ebene. Die Struktur dieser abgeleiteten affinen Ebene hängt wesentlich von der Auswahl der entfernten projektiven Geraden ab. Jede affine Ebene läßt sich als Ableitung einer geeigneten projektiven Ebene betrachten; denn durch eine Umkehrung des Ableitungsprozesses kann man jede affine Ebene projektiv abschließen: Man erklärt die Parallelbüschel der affinen Ebene zu (uneigentlichen) Punkten und faßt diese zu einer (uneigentlichen) Geraden zusammen. Im Fall einer endlichen affinen Ebene der Ordnung n entsteht als projektiver Abschluß damit ein Steinersystem mit den Parametern $t = 2$, $k = n + 1$ und $v = n^2 + n + 1$.

Entfernt man aus einer affinen Ebene ein Parallelbüschel, so bezeichnet man die verbleibende Struktur als *dualaffine Ebene*.

Zu jeder Primzahlpotenz $n = p^q$ gibt es eine dualaffine Ebene: In der Punktemenge $P = K \times K$ mit $K = GF(n)$ lassen sich durch die Gleichungen $y = ax + b$ die benötigten Geraden definieren. Durch Hinzufügen der Geraden $x = \text{const}$ wird aus dieser dualaffinen Ebene eine affine Ebene der Ordnung n. Ist $q \geq 2$, $n \geq 9$, so läßt sich die Multiplikation in K vermöge seiner Automorphismen so abändern, daß auf die beschriebene Weise nichtisomorphe Ebenen entstehen; vgl. etwa [17, 47].

Das angegebene Konstruktionsverfahren läßt sich verallgemeinern: Γ sei eine scharf zweifach transitive Menge von Permutationen γ, die auf einer n-elementigen Menge K operiert. O. B. d. A. können wir $id \in \Gamma$ annehmen. Wir setzen $P = K \times K$ und bezeichnen die Lösungsmengen der Gleichungen $y = x^\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, als Geraden. Eine mit diesem Verfahren gewonnene Geometrie bezeichnen wir als 2-*Struktur* [42]. Fügen wir die Geraden $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ zu dieser 2-Struktur hinzu, so entsteht ein Steinersystem mit den Parametern $t = 2$, $k = n$ und $v = n^2$, also eine affine Ebene der Ordnung n; vergl. etwa [49].

Umgekehrt kann man – allerdings nicht eindeutig – zu jeder affinen Ebene eine sie koordinatisierende scharf zweifach transitive Permutationsmenge finden. Die Existenz einer endlichen affinen Ebene der Ordnung n ist demnach gleichbedeutend mit der Existenz einer scharf 2-fach transitiven Menge von Permutationen vom Grad n.

Im Gegensatz zu den projektiven Erweiterungen affiner Ebenen betrachten wir hier die geometrischen Strukturen, aus denen man durch einen geeigneten Ableitungsprozeß zwar stets auch eine, aber nicht jede affine Ebene erhält: die „*Möbius-m-Strukturen*", das sind im endlichen Fall die Steinersysteme mit den Parametern $t = m + 2$, $k = n + m$ und $v = n^2 + m$, also Erweiterungen der affinen Ebene der Ordnung n, die „*Laguerre-m-Strukturen*" bzw. die „*Minkowski-m-Strukturen*", das sind im endlichen Fall Erweiterungen endlicher dualaffiner Ebenen bzw. endlicher 2-Strukturen.

In diesen Strukturen können je $m + 2$ verschiedene Punkte durch höchstens einen Block verbunden werden. Durch m-maliges Ableiten (Definition s. S. 48) einer m-Struktur der Ordnung n erhält man – gegebenenfalls durch anschließende Hinzunahme eines oder zweier Parallelbüschel – eine affine Ebene der Ordnung n. Das Existenzproblem für m-Strukturen einer vorgegebenen Ordnung ist damit negativ gelöst, wenn bekannt ist, daß es keine entsprechende affine Ebene gibt.

Die affinen Ebenen der Ordnung $n = 2, 3, 4, 5, 7, 8$ *sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt,*

vergl. etwa [49, 18, 26, 27]. Der Fall $n = 6$ wurde 1901 von G. Tarry erledigt [53]. Er bewies die Unlösbarkeit des berühmten Eulerschen 36-Offiziere-Problems [22]*). Es gibt also noch nicht einmal 2 „orthogonale lateinische Quadrate" der Seitenlänge 6. Die Existenz einer affinen Ebene der Ordnung n ist aber äquivalent mit der Existenz von $n - 1$ lateinischen Quadraten der Seitenlänge n, vgl. etwa [18, 49]. Die einzige allgemeine Nichtexistenzaussage wurde 1949 von Bruck und Ryser geliefert [9]:

Ist $n \equiv 1, 2$ *mod* 4 *und hat der quadratfreie Faktor von* n *einen Primteiler* $p \equiv 3$ *mod* 4, *so gibt es keine affine Ebene der Ordnung* n.

Die kleinsten Zahlen, für die das Existenzproblem ungelöst ist, sind damit 10, 12, 15, 18, 20, 24, ... Zur Zeit erscheint es hoffnungslos, diese Fälle mit einer Rechenanlage bearbeiten zu wollen.

Benzebenen**

P sei eine Menge, deren Elemente wir *Punkte* nennen, und $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ seien 2 nichtleere Teilmengen der Potenzmenge $\mathfrak{P}(P)$ von P, deren Elemente wir *Geraden* oder *Erzeugende* nennen.

Die unstrukturierte Menge P heißt *Möbius-Gitter*.

* 36 Offiziere aus 6 Chargen und 6 Regimentern, von denen keine 2 demselben Regiment und gleichzeitig derselben Charge angehören, sind so im Quadrat aufzustellen, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte des Quadrats jedes Regiment und jede Charge genau einmal vertreten ist.

** Das klassische Modell der Möbius-Ebene besteht aus den Punkten der Riemannschen Zahlenkugel und deren Kreisen, das der Laguerre-Ebene aus den orientierten Geraden der reellen Ebene als Punkten und den orientierten Kreisen als Kreisen, das der Minkowski-Ebene aus den Punkten der euklidischen Ebene und den Kreisen bezüglich der „Minkowski-Metrik":

$$d((x,y),(x',y')) := (x - x')^2 - (y - y')^2.$$

Das große Interesse, das diese Geometrien in letzter Zeit gefunden haben, geht hauptsächlich auf die grundlegenden Arbeiten von W. Benz zurück. Wir verweisen auf sein Buch „Vorlesungen über Geometrie der Algebren" [6].

Das Paar $(P, \mathfrak{G}_1)$ heißt *Laguerre-Gitter*, wenn es zu jedem Punkt $p \in P$ genau eine Erzeugende aus $\mathfrak{G}_1$ durch p gibt.

Diese Erzeugende werde mit $[p]_1$ bezeichnet.

Das Tripel $(P, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ heißt *Minkowski-Gitter*, wenn $(P, \mathfrak{G}_1)$ und $(P, \mathfrak{G}_2)$ Laguerre-Gitter sind und wenn jede Erzeugende aus $\mathfrak{G}_1$ jede Erzeugende aus $\mathfrak{G}_2$ in genau einem Punkt schneidet.

Je zwei verschiedene Punkte $p, q \in P$ werden *verbindbar* genannt, wenn sie nicht gemeinsam auf einer Erzeugenden liegen.

$G = P$, $(P, \mathfrak{G}_1)$ bzw. $(P, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ sei ein Möbius-, Laguerre- bzw. Minkowski-Gitter und $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{P}(P)$ eine Menge, deren Elemente wir *Kreise* nennen. Die *Kreisstruktur* $\Sigma := (G, \mathfrak{K})$ heißt *Benz-Ebene (Möbius-, Laguerre-* bzw. *Minkowski-Ebene)*, wenn gilt:

(B 1) *Jede Erzeugende trifft jeden Kreis in genau einem Punkt.*

(B 2) *Zu je 3 verbindbaren Punkten gibt es genau einen mit ihnen inzidenten Kreis.*

(B 3) *Zu jedem Kreis K, jedem Punkt $p \in K$ und jedem mit P verbindbaren Punkt $q \notin K$ gibt es genau einen Kreis $L \ni q$, der K in p berührt, d. h. $L \cap K = p$.*

(B 4) *Jeder Kreis enthält mindestens drei Punkte. Es gibt einen Kreis und einen nicht mit ihm inzidenten Punkt.*

Weiterhin bedeutet $\mathfrak{K}(K, p_1, \ldots, p_r)$ die Menge aller Berührkreise von K durch die Punkte $p_1, \ldots p_r$. $\mathfrak{K}(p, q)$ ist das *Kreisbüschel durch die Punkte p und q*; für $p \in K$ ist $\mathfrak{K}(K, p)$ das *Berührbüschel von K in p.*

In einer Benzebene Σ sind alle Kreise gleichmächtig. Die um 1 verminderte Kardinalzahl eines Kreises heißt die *Ordnung von Σ.*

p sei ein Punkt einer Kreisstruktur $\Sigma = (G, \mathfrak{K})$ und P_p die Menge aller mit p verbindbaren Punkte. Dann bildet die Punktmenge P_p mit den Spuren der Erzeugenden von Σ in P_p als Erzeugenden und den Spuren der Kreise aus $\mathfrak{K}(p)$ in P_p als Blöcken die *Ableitung Σ_p von Σ in p.*

Eine Kreisstruktur ist offensichtlich genau dann eine Benz-Ebene, wenn ihre Ableitung in jedem Punkt eine affine Ebene, eine dualaffine Ebene oder eine 2-Struktur ist. Die Ordnung einer Benzebene stimmt mit der Ordnung ihrer Ableitung überein.

Zwei Benzebenen sind isomorph, wenn eine Bijektion zwischen den Punkten existiert, die Kreise in Kreise überführt, d. h. jeder Isomorphismus ist streng im Sinne von [6]. Die Erzeugenden lassen sich nämlich als die (nichtleeren) maximalen Punktmengen einer Benzebene definieren, auf denen die symmetrische Relation $\{(p, q) \in P \times P;\ \nexists\, K \in \mathfrak{K} : p, q \in K\}$ transitiv ist. Zur Formulierung des Begriffes „Benzebene" benötigt man also neben der Inzidenz nur die Grundbegriffe „Punkt" und „Kreis", d. h. jede Benzebene Σ kann als Inzidenzstruktur im Sinne von P. Dembowski [18] vollständig beschrieben werden und ist daher durch die Angabe ihrer Punkt- und Kreismenge $\Sigma := (P, \mathfrak{K})$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Wenn wir trotzdem zur Definition der Benzebene die Erzeugenden als weiteren Grundbegriff benutzt haben, so deshalb, weil der logisch einfachere oder konsequentere Weg den geometrischen Hintergrund durch seinen formalen Aufwand verdecken würde.

Eine Benz-Ebene heißt *ovoidal*, wenn sich ihre Punktmenge so in einen dreidimensionalen projektiven Raum einbetten läßt, daß ihre Erzeugenden kollinear sind und die Kreise ebene Schnitte der Punktmenge werden. Die Punktmenge wird dann als *quadratische Menge* [10] bezeichnet. Im Fall der Minkowski-Geometrie ist diese quadratische Menge bereits eine Quadrik [10].

Die Ordnung einer endlichen ovoidalen Benzebene ist eine Primzahlpotenz: Jeder dreidimensionale projektive Raum $PG(3, n)$ der Ordnung n ist desarguessch und daher über einem Galoisfeld $GF(n)$ koordinatisierbar.

Eine ovoidale Benz-Ebene heißt *miquelsch*, wenn die zugehörige quadratische Menge eine Quadrik ist.*

K sei ein Kreis einer Benzebene Σ und p ein nicht mit K inzidenter Punkt. Im projektiven Abschluß von Σ_p bildet die Spur von K vermehrt um die durch die Erzeugenden $[[p]_2 \cap K]_1$ und $[[p]_1 \cap K]_2$ repräsentierten Fernpunkte ein Oval; vgl. etwa [18]. In einer endlichen projektiven Ebene gerader Ordnung inzidieren die $n + 1$ Tangenten dieses Ovals alle mit einem Punkt, dem

* Diese Ebenen sind durch einen Schließungssatz, den Satz von Miquel [56, 41] charakterisiert. Y. Chen hat diese Kennzeichnung für Benz-Ebenen einheitlich durchgeführt [13].

„Knoten“ des Ovals; bei ungerader Ordnung gehen durch jeden Punkt der projektiven Ebene 0 oder 2 Tangenten des Ovals [50].

Für die Benzebenen bedeutet das:

(1) *Berührt ein Kreis K einer Laguerre-Ebene gerader Ordnung 2 Kreise eines Berührungsbüschels, so berührt er auch alle anderen Kreise dieses Büschels. Jedes Büschel durch 2 Punkte enthält genau einen Berührkreis an K. In jeder anderen Benzebene gerader Ordnung gibt es zu jedem Punkt p und jedem nicht mit p inzidenten Kreis K genau einen mit p verbindbaren Punkt q, so daß die Menge aller Berührkreise von K durch p genau das Büschel $\mathfrak{K}(p, q)$ ist. In einer Benz-Ebene ungerader Ordnung enthält kein Büschel $\mathfrak{K}(p, q)$ und kein Berührbüschel in $p \notin K$ mehr als 2 Berührkreise an K.*

Daraus folgt:

(2) *Berührt ein Kreis einer endlichen Benzebene mit Ausnahme der Laguerre-Ebenen gerader Ordnung drei Kreise eines Berührbüschels, so gehört er diesem Büschel an.*

Im Fall der Möbius-Geometrie definiert (2) in [3] die „(F)-Ebenen“.

Von Benz [3, 6], Ewald [23], Dembowski und Hughes [17] wurden verschiedene Orthogonalitätsrelationen in Benzebenen betrachtet. Für unsere Untersuchungen verwenden wir die von Dembowski und Hughes für Möbiusebenen eingeführte Orthogonalität:

Eine Benzebene trägt eine Dembowski-Hughes-Orthogonalität (=: D. H.-Orthogonalität), falls auf der Kreismenge eine symmetrische Relation $\perp$ erklärt ist, die den folgenden beiden Axiomen genügt:

(01) *Zu jedem Kreis K, jedem Punkt $p \in K$ und jedem mit p verbindbaren Punkt q gibt es genau einen Kreis $L \in \mathfrak{K}(p, q)$ mit $K \perp L$.*

(02) *Sind p und q zwei verbindbare Punkte, sind $K, L \in \mathfrak{K}(p, q)$ mit $K \neq L$ und ist $M \in \mathfrak{K}$ mit $M \perp K, L$, dann gilt $M \perp X$ für alle $X \in \mathfrak{K}(p, q)$.*

Weiterhin bedeutet $O(K_1, \ldots, K_r; p_1, \ldots, p_s)$ die Menge aller zu $K_1, \ldots, K_r$ orthogonalen Kreise, die mit den Punkten $p_1, \ldots, p_s$ inzidieren.

Ein zu sich selbst orthogonaler Kreis heißt *isotrop*.

Zwei Kreise einer Minkowski-Ebene heißen *symmetrisch*, wenn mit jedem Punkt $p \in K$ auch der zu p in bezug auf L symmetrische Punkt $p_L := [[p]_1 \cap L]_2 \cap [[p]_2 \cap L]_1$ auf K liegt [36].

Eine Minkowski-Ebene heißt symmetrisch, wenn jeder Kreis, der ein Paar bezüglich eines anderen Kreises symmetrischer Punkte enthält, zum anderen Kreis symmetrisch ist [5].

Im folgenden betrachten wir endliche Benzebenen mit D. H.-Orthogonalität. Dabei können wir die Beweise von [17] teilweise übernehmen. In einigen Fällen benötigen wir allerdings stärkere Reichhaltigkeitsvoraussetzungen, was aber deshalb nicht stört, weil die Benzebenen bis zur Ordnung 7 bekannt sind [60, 31, 12, 19, 20, 14].* Beweise geben wir nur an, wenn oder insoweit die in [17] für Möbiusebenen formulierten Beweise für allgemeine endliche Benzebenen nicht gelten.

(3) *Eine endliche Möbius- oder Minkowski-Ebene gerader Ordnung gestattet genau eine D. H.-Ortogonalität, nämlich:*

$$K \perp L \Leftrightarrow K = L \quad \textit{oder} \quad |K \cap L| = 1$$

Beweis: Die Beweise zu (2.11), ..., (2.15) von [17] gelten auch für diese Benz-Ebenen mit Ausnahme des 2. Teiles des Beweises von (2.12). Zu zeigen bleibt also:

Ein isotroper Kreis hat mit einem zu ihm orthogonalen Kreis einen nichtleeren Durchschnitt.

Unter der Annahme $K \perp K$, $K \perp L$, $K \cap L = \emptyset$ gibt es nach (2) einen Kreis X mit $|X \cap K| = 1$, d. h. nach (01) $X \perp K$, mit $X \cap L = \{p, q\}$. Dann ist nach (02) $K \in O(\mathfrak{K}(p, q))$, d. h.

* Jede Laguerre- oder Minkowski-Ebene Σ, die in einem Punkt p eine desarguessche Ableitung besitzt, ist miquelsch, wenn ihre Kreise in Σ_p Kegelschnitte sind. Dann ist nämlich jeder Kreis durch 3 Punkte und sein Schnittverhalten mit der Ferngeraden als Kegelschnitt eindeutig bestimmt. Aus der Eindeutigkeit der affinen Ebene einer Ordnung ≤ 7 und der Tatsache, daß in einer desarguesschen Ebene ungerader Ordnung jedes Oval ein Kegelschnitt ist, folgt die Eindeutigkeit der kleinen Laguerre- und Minkowski-Ebenen.

Für die Möbius-Geometrie ist uns eine ähnliche einfache Argumentation nicht bekannt.

$|K \cap X| \leq 1$ für alle $X \in \mathfrak{K}(p, q)$. Nach (1) enthält aber $\mathfrak{K}(p, q)$ höchstens 2 oder nur Berührkreise von K.

(4) *Eine endliche Laguerre-Ebene ungerader Ordnung gestattet keine D. H.-Orthogonalität.*

Beweis: Nach (01) und (2.13) von [17] gilt für jeden Kreis K und jeden nicht mit ihm inzidenten Punkt p einer endlichen Benz-Ebene ungerader Ordnung: $|O(K; p) \cap K| \equiv 0 \mod 2$. In einer endlichen Laguerre-Ebene ungerader Ordnung liegt aber auf jedem Kreis eine ungerade Anzahl von Punkten, die mit p verbindbar sind.

In jeder endlichen Möbius- oder Minkowski-Ebene gilt (2.16) von [17]:

(B) *Zu jedem Kreis K und jedem nicht mit ihm inzidenten Punkt p gibt es in einer endlichen Möbius- oder Minkowski-Ebene mit D. H.-Orthogonalität genau einen mit p verbindbaren Punkt q mit $O(K; p) = \mathfrak{K}(p; q)$.*

Satz 1 von [17] lautet:

(5) *Eine endliche Möbius-Ebene ist genau dann ovoidal, wenn sie eine D.H.-Orthogonalität gestattet.*

Zusammen mit (3) folgt daraus Satz 3 von [17]:

(6) *Eine Möbius-Ebene gerader Ordnung ist ovoidal, insbesondere ist ihre Ordnung eine Potenz von 2.*

Fellegara hat mit Hilfe einer Rechenanlage gezeigt, daß es in PG (3, 8) genau 2 quadratische Mengen gibt [24], deren Ebenen-Schnitt-Geometrien nicht isomorphe Möbius-Ebenen liefern. Damit gibt es genau 2 Möbius-Ebenen der Ordnung 8. Die von Segre [52] konstruierte nicht-miquelsche Ebene gehört einer von Tits [54, 55] entdeckten Klasse ovoidaler Möbius-Ebenen an, auf denen die einfachen Gruppen von Suzuki als Automorphismengruppen scharf zweifach transitiv operieren. Nach Barlotti [2] und Panella [44] ist die zu einer ovoidalen Möbius-Ebene ungerader Ordnung gehörende quadratische Menge ein Ellipsoid.* Damit gilt:

---

* Diese Tatsache folgt unmittelbar aus dem unten zitierten Ergebnis von Segre [51], weil eine quadratische Menge, deren Ebenenschnitte Kegelschnitte sind, offensichtlich eine Quadrik ist.

(7) *Jede endliche ovoidale Möbius-Ebene ungerader Ordnung ist miquelsch.*

B. Segre bewies, daß jedes Oval in einer desarguesschen projektiven Ebene ungerader Ordnung ein Kegelschnitt ist [51]. Im Gegensatz dazu bilden z. B. in der projektiven Ebene der Ordnung 8 die Punkte eines nicht ausgearteten Kegelschnitts auch nach dem Austausch eines seiner Punkte gegen den Knoten ein Oval. Dieses Oval hat mit dem Ausgangskegelschnitt 8 Punkte gemeinsam und ist deshalb kein Kegelschnitt. Damit gibt es mindestens 2 nicht-isomorphe Laguerre-Ebenen der Ordnung 8.

(8) *In einer endlichen Minkowski-Ebene sind die Relationen „symmetrisch" und „D.H.-orthogonal" identisch.*

Beweis: Nach (B) ist nur zu zeigen: $q = p_K$. Wäre $q \neq p_K$, so gäbe es durch die mit q nicht verbindbaren Punkte von K Orthogonalkreise durch p zu K, die nach (B) mit q inzidieren müßten.

R. Artzy hat den folgenden Satz bewiesen [1]:

(9) *Jede symmetrische Minkowski-Ebene ist ovoidal.*

Mit (3) ergibt sich damit [32]:

(10) *Jede Minkowski-Ebene gerader Ordnung ist ovoidal.*

Nach [10] ist die zugehörige quadratische Menge eine nicht ausgeartete Regelfläche 2. Ordnung im $PG(3, n)$. Die Minkowski-Ebene ist also eindeutig und ihre Ordnung ist eine Potenz von 2.

Wie die 2-Strukturen durch scharf zweifach transitive, so lassen sich die Minkowski-Ebenen durch scharf dreifach transitive Permutationsmengen, die die Identität enthalten, koordinatisieren [5, 36]. Eine solche Permutationsmenge ist genau dann eine Gruppe, wenn in der zugehörigen Minkowski-Ebene das „Rechtecksaxiom" gilt:

(R) *Sind* p_i, $i = 1, \ldots, 4$, 4 *verschiedene konzyklische Punkte, so sind für beliebige Kreise* K, L *auch die Punkte* $[(p_i K)]_2 \frown [(K p_i)]_1$ *konzyklisch.*

Nach (10) ist jede scharf dreifach transitive Permutationsmenge vom ungeraden Grad $n + 1$ isomorph zur Gruppe der gebrochen linearen Transformationen über $GF(n)$ [33].

Im Gegensatz zu Möbius- und Laguerre-Ebenen sind nicht ovoidale Minkowski-Ebenen ungerader Ordnung bekannt. Es gibt nämlich scharf dreifach transitive Permutationsgruppen von geradem Grad, die nicht als Gruppe der gebrochen linearen Transformationen auf einem Körper operieren [61]. Diese Gruppen stehen im Zusammenhang mit gewissen Dicksonschen Fastkörpern. Das kleinste Beispiel einer nicht ovoidalen Minkowski-Ebene erhält man für die Ordnung $n = 9$ [45].

Ob es im Endlichen scharf dreifach transitive Permutationsmengen gibt, die nicht schon Nebenklasse einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe sind, ist im Gegensatz zum transfiniten Fall [38] ungeklärt.

Erweiterungen von Benzebenen

G sei ein Möbius-, Laguerre- oder Minkowski-Gitter mit der Punktmenge P und $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{P}(P)$ eine Menge, deren Elemente wir *Ketten* nennen, m eine natürliche Zahl oder 0. Das Paar $\Sigma = (G, \mathfrak{K})$ heißt *Möbius-*, *Laguerre-* bzw. *Minkowski-m-Struktur*, wenn die Ableitung Σ_p für jeden Punkt $p \in P$ eine Möbius-, Laguerre- bzw. Minkowski-$(m - 1)$-Struktur ist. Die Möbius-, Laguerre- bzw. Minkowski-0-Strukturen sind die affinen Ebenen, die dualaffinen Ebenen bzw. die 2-Strukturen.

Den Fall $m = 1$ haben wir im vorigen Abschnitt behandelt. Den Axiomen (B 1), . . ., (B 4) entsprechende lassen sich zur Kennzeichnung der m-Strukturen für $m > 1$ heranziehen.

Ist Σ eine Möbius- oder Laguerre-2-Struktur der Ordnung n und $p \in P$ ein Punkt, für den die Benzebene Σ_p ovoidal ist, dann gibt es $n + 2$ Punkte in $PG(3, n)$, von denen keine 4 komplanar sind. Für $n \geq 4$ existieren solche $(n + 2)$-elementigen Mengen aber nicht [25]. Aus der Eindeutigkeit der Möbius- und Laguerre-Ebenen der Ordnungen 4, 5 und 7 und der Tatsache, daß jede Möbius-Ebene einer geraden Ordnung ovoidal ist (6), folgt damit:

(11) *Für $m > 1$ existiert keine Möbius- oder Laguerre-m-Struktur einer Ordnung $n = 4$, 5 oder 7 und keine Möbius-m-Struktur einer geraden Ordnung $n > 2$.*

Die Anzahl der Ketten einer hypothetischen Möbius-2-Struktur der Ordnung n ist nur dann ganzzahlig, wenn $n + 2$ die Zahl 60 teilt [39], d. h.:

(12) *Abgesehen von den Ordnungen* $n = 2, 3, 13$ *existieren für* $m > 1$ *keine endlichen Möbius-m-Strukturen.*

Für $n = 2$ gibt es für jedes $m \geq 0$ jeweils genau eine Möbius-, Laguerre- oder Minkowski-m-Stuktur, nämlich die Minimalmodelle [46, 47]. Für $n = 3$ und $m = 2, 3$ gibt es genau eine Möbius-m-Struktur [39, 29], das ist jeweils ein Steinersystem, auf dem eine der kleinen Mathieuschen Gruppen operiert. Eine Möbius-4-Struktur der Ordnung 3 oder eine Möbius-3-Struktur der Ordnung 13 existieren nicht, weil die Anzahl der Ketten einer solchen Geometrie nicht ganzzahlig wäre. Nach [25] und [28] ist die Ableitung einer eventuell existierenden Möbius-2-Struktur der Ordnung 13 in jedem Punkt eine nicht ovoidale Möbius-Ebene.

Laguerre-m-Strukturen der Ordnung 3 gibt es für jedes $m \geq 0$ [34]. Diese Geometrien sind eindeutig.

Die Existenz einer Minkowski-m-Struktur der Ordnung n ist zur Existenz einer scharf $(m + 2)$-fach transitiven Permutationsmenge vom Grad $m + n$ äquivalent. Die alternierende Gruppe vom Grad n ist scharf $(n - 2)$-fach transitiv. Die Mathieusche Gruppe vom Grad 11 bzw. 12 ist scharf 4- bzw. scharf 5-fach transitiv. Daraus folgt [34]:

(13) *Zu jedem* $m \geq 0$ *gibt es genau* eine Minkowski-m-Struktur der Ordnung* 2, 3 *und* 4 *und es gibt eine Minkowski-*2- *und eine Minkowski-*3-*Struktur der Ordnung* 9.

(14) *Für* $m = 2$ *gibt es keine Minkowski-m-Struktur der Ordnung* $n = 5$ *oder* $n = 7$.**

---

* Für den Fall der Ordnung $n = 4$ folgt die Eindeutigkeit aus der Tatsache, daß jede scharf $(n - 2)$-fach transitive Permutationsmenge vom Grad n, die die Identität enthält, nur aus geraden Permutationen besteht.

** Wir danken Herrn Dr. H. R. Halder für die Hilfe bei den Rechnungen. Herr Dr. U. Heise bestätigte dieses Ergebnis auf der Rechenanlage CD-6400 der RWTH Aachen.

Beweis: Wegen der Eindeutigkeit der Minkowski-Ebenen der Ordnung $n = 5, 7$ könnte man einer hypothetischen Minkowski-2-Struktur der Ordnung 5 oder 7 eine Permutationsmenge Γ zuordnen, die auf $GF(n) \cup \{u, v\}$ scharf 4-fach transitiv operiert und deren Stabilisator $S(v)$ im Punkt v zur Gruppe $PGL(2, n)$ der gebrochen linearen Transformationen isomorph ist. Insbesondere gäbe es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $0^\gamma = 0$, $1^\gamma = 1$, $2^\gamma = 2$ und $u^\gamma = v$. Die möglichen Werte für x^γ für $x = 3, 4$ bzw. $x = 3, 4, 5, 6$ sind zu überprüfen, v^γ ist dann festgelegt.

Für $n = 5$ gibt es 6 Fälle:

$$(3^\gamma, 4^\gamma) = (3, 4), (3, u), (4, 3), (4, u), (u, 3) \text{ oder } (u, 4).$$

In den Fällen 1, 2 und 6 hätte γ mindestens 4 Fixpunkte. In den Fällen 3, 4 bzw. 5 hätte γ auf jeweils 4 Punkte dieselbe Wirkung wie die in Matrix-Schreibweise und Zykel-Darstellung gegebenen Permutationen aus $S(v)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ u)(3\ 4), \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = (2\ 3\ 4\ u) \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0\ 4\ 3\ u).$$

Das wäre ein Verstoß gegen die scharf 4-fache Transitivität von Γ. Für $n = 7$ findet man analog durch (ziemlich mühsames) Nachrechnen, daß jede der 120 zu prüfenden Permutationen auf mindestens 4 Punkte dieselbe Wirkung hätte wie eine Permutation aus $S(v)$.

U. Heise hat nach derselben Methode mit Hilfe einer Rechenanlage gezeigt, daß die symmetrischen Minkowski-Ebenen der Ordnungen 9 und 11 nicht zu Minkowski-2-Strukturen erweiterbar sind.*

In der folgenden Tabelle geben wir eine Übersicht über den heutigen Stand der Lösung des Existenzproblems für Möbius-, Laguerre- und Minkowski-m-Strukturen der endlichen Ordnung n:

---

* Nachtrag bei der Korrektur: Inzwischen zeigte U. Heise die Nichtexistenz von Minkowski-2-Strukturen der Ordnung 8.

n	m	Anzahl der nicht isomorphen Möbius-	Laguerre-	Minkowski- m-Strukturen der Ordnung n
2	≥ 0	1	1	1
3	0, 1, 2, 3	1	1	1
	≥ 4	0	1	1
4	0, 1	1	1	1
	≥ 2	0	0	1
5, 7	0, 1	1	1	1
	≥ 2	0	0	0
8	0	1	1	1
	1	2	≥ 2	1
	≥ 2	0	?	?
9	0, 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1
	2, 3	0	?	≥ 1
	≥ 4	0	?	?
13	≥ 3	0	?	?
$\equiv 1, 2 \bmod 4$ $\neq a^2 + b^2$	≥ 0	0	0	0
$\equiv 0 \bmod 2$ $\neq 2^q$	≥ 1	0	?	0
$2^q \geq 8$	1	≥ 1	≥ 1	≥ 1
2^q; $1 < q \equiv 1 \bmod 2$	1	≥ 2	≥ 2	1
p^q, p prim	0, 1	≥ 1	≥ 1	≥ 1

Literatur:

Neben den hier angegebenen Arbeiten verweisen wir auf die ausgezeichneten Bibliographien in Benz [6], Dembowski [17] und Doyen und Rosa [21].

[1] R. Artzy: A Pascal theorem applied to Minkowski geometry. J. Geometry 3 (1973) 93–102, 103–105.

[2] A. Barlotti: Un' estensione del teorema di Segre – Kustaanheimo. Boll. Un. Mat. Ital. 10 (1955), 498–506.

[3] W. Benz: Über Möbiusebenen. Ein Bericht. Jber. Deutsch. Math. Ver. 63 (1960), 1–27.

[4] W. Benz: Über die Grundlagen der Geometrie der Kreise in der pseudoeuklidischen (Minkowskischen) Geometrie. J. reine angew. Math. 232 (1968) 41–76.

[5] W. Benz: Permutations and plane sections of a ruled quadric. Symposia Mathematica 5 (1970) 325–339.

[6] W. Benz: Vorlesungen über Geometrie der Algebren. Berlin-Heidelberg-New York. Springer 1973.

[7] W. Benz, W. Leißner und H. Schaeffer: Kreise, Zykel, Ketten. Zur Geometrie der Algebren. Ein Bericht. Jber. Deutsch. Math. Verein. 74 (1972) 107–122.

[8] W. Benz und H. Mäurer: Über die Grundlagen der Laguerre – Geometrie. Ein Bericht. Jber. Deutsch. Math. Ver. 67 (1964) 14–42.

[9] R. H. Bruck und H. J. Ryser: The non-existence of certain finite projective planes. Can. J. Math. 1 (1949), 88–93.

[10] F. Buekenhout: Ensembles quadratiques des éspaces projectifs. Math. Z. 110 (1969) 306–308.

[11] F. Buekenhout: Characterizations of semi quadrics – a survey. Preprint. Université libre de Bruxelles 1974.

[12] Y. Chen: The Steiner system S (3, 6, 26). J. Geometry 2 (1972) 7–28.

[13] Y. Chen: A characterization of some geometries of chains. Can. J. Math. 26 (1974) 257–272.

[14] Y. Chen und G. Kaerlein: Eine Bemerkung über endliche Laguerre- und Minkowski-Ebenen. Geometriae Dedicata 2 (1973) 193–194.

[15] P. Dembowski: Inversive planes of even order. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) 850–854.

[16] P. Dembowski: Möbiusebenen gerader Ordnung. Math. Ann. 157 (1964) 179–205.

[17] P. Dembowski und D. R. Hughes: On finite inversive planes. J. London Math. Soc. 40 (1965) 171–182.

[18] P. Dembowski: Finite Geometries. Berlin-Heidelberg-NewYork. Springer 1968.

[19] R. H. F. Denniston: Uniqueness of the inversive plane of order 5. Manuscr. math. 8 (1973) 11–19.

[20] R. H. F. Denniston: Uniqueness of the inversive plane of order 7. Manuscr. math. 8 (1973) 21–26.

[21] J. Doyen und A. Rosa: A bibliography and survey of Steiner systems. Boll. Un. Mat. Ital. 7 (1973) 392–419.

[22] L. Euler: Recherches sur une nouvelle espèce des quarrées magiques. Verh. Zeeuwsch. Genootsch. Wetensch. Vlissingen 9 (1782) 85–239.

[23] G. Ewald: Begründung der Geometrie der ebenen Schnitte einer Semiquadrik. Arch. Math. 8 (1957) 203–208.

[24] G. Fellegara: Gli ovaloidi in uno spazio tridimensionale di Galois di ordine 8. Atti Accad. Naz. Lincei Rendic. 32 (1962) 170–176.

[25] H. R. Halder und W. Heise: On the existence of finite chain – m – structures and k – arcs in finite projective spaces. Ersch. demn. in Geometriae Dedicata.

[26] M. Hall, Jr.: Uniqueness of the projective plane with 57 points. Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953) 912–916; 5 (1954) 994–997.

[27] M. Hall, J. D. Swift und R. J. Walker: Uniqueness of the projective plane of order eight. Math. Tables Aids comput. 10 (1956) 186–194.

[28] U. Heise, W. Heise und H.-J. Kroll: Über die Existenz endlicher Möbius-m-Strukturen. Rend. Ist. di Matem. Univ. di Trieste 3 (1971) 135–139.

[29] W. Heise: Bericht über $\varkappa$-affine Geometrien. J. Geometry 1 (1971) 197 bis 224.

[30] W. Heise: On finite Möbius-m-structures. Atti Conv. Geom. Comb. Appl. Perugia 1971, 257–258.

[31] W. Heise: Es gibt keine 4-affine Ebene der Ordnung 4. Journ. für reine u. angew. Math. 252 (1972) 104–106.

[32] W. Heise: Minkowski-Ebenen gerader Ordnung. J. Geometry 5 (1974) 83.

[33] W. Heise: A combinatorial characterization of PGL $(2, 2^q)$. Erscheint demnächst, in Abh. Math. Sem. Univ. Hamb.

[34] W. Heise und H. Karzel: Laguerre und Minkowski-m-Strukturen. Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste 4 (1972) 139–147.

[35] W. Heise und H. Karzel: Eine Charakterisierung der ovoidalen Kettengeometrien. J. Geometry 2 (1972) 69–74.

[36] W. Heise und H. Karzel: Symmetrische Minkowski-Ebenen. J. Geometry 3 (1973) 5–20.

[37] W. Heise und H. Karzel: Vollkommen fanosche Minkowski-Ebenen. J. Geometry 3 (1973) 21–29.

[38] W. Heise und K. Sörensen: Scharf n-fach transitive Permutationsmengen. Ersch. in Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 43 (1975).

[39] W. Heise und J. Timm: $\varkappa$-affine Räume. Manuscr. math. 4 (1971) 31–37.

[40] D. R. Hughes: On t-designs and groups. Amer. J. Math. 87 (1965) 761–778.

[41] G. Kaerlein: Der Satz von Miquel in der pseudoeuklidischen (Minkowskischen) Geometrie. Diss. Bochum 1970.

[42] H. Karzel: Zusammenhänge zwischen Fastbereichen, scharf zweifach transitiven Permutationsgruppen und 2-Strukturen mit Rechtecksaxiom. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 32 (1968) 191–206.

[43] H. Karzel, K. Sörensen und D. Windelberg: Einführung in die Geometrie. Göttingen 1973.

[44] G. Panella: Caratterizzazione delle quadriche di un spazio (tri-dimensionale) lineare sopra un corpo finito. Bol. Un. Mat. Ital. 10 (1955) 507–513.

[45] M. Percsy: Géométrie des quadriques réglées. Mémoire de Licencié. Université Libre de Bruxelles. Année acad. 1973–1974.

[46] R. Permutti: Una generalizzazione dei piani di Möbius. Le Matema tiche 22 (1967) 360–374.

[47] R. Permutti: Sulle m-strutture ovoidali di Möbius. Le Matematiche 23 (1968) 50–59.

[48] R. Permutti: Recenti risultati sulle m-strutture di Möbius. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 42 (1972) 95–109.

[49] G. Pickert: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer 1955.

[50] B. Qvist: Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane. Ann. Acad. Sci. Fenn. 134 (1952) 1–27.

[51] B. Segre: Ovals in a finite projective plane. Canad. J. Math. 7 (1955) 414–416.

[52] B. Segre: On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two. Acta Arithm. 5 (1959) 315–332.

[53] G. Tarry: Le problème des 36 officiers. C. R. Assoc. Franc. Avanc. Sci. nat. 1 (1900) 122–123; 2 (1901) 170–203.

[54] J. Tits: Les groupes simples de Suzuki et de Rée. Seminaire Bourbaki. 3ième année 210 (1960).

[55] J. Tits: Ovoides et groupes de Suzuki. Arch. Math. 13 (1962) 187–198.

[56] B. L. v. d. Waerden und L. J. Smid: Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerre-Geometrie. Math. Ann. 110 (1935) 753–776.

[57] R. Wille: On incidence geometries of grade n. Atti Conv. Geom. Comb. Appl. Perugia 1971, 421–426.

[58] R. Wille: Verbandstheoretische Charakterisierung n-stufiger Geometrien. Arch. Math. 18 (1967) 465–468.

[59] E. Witt: Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 12 (1938) 256–264.

[60] E. Witt: Über Steinersche Systeme. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 12 (1938) 265–275.

[61] H. Zassenhaus: Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen. Abh. Math. Sem. Hamburg 11 (1934) 17–40.

[62] M. Percsy: A characterization of classical Minkowski planes over a perfect field of characteristic two. J. Geometry 5 (1974) 191–204.

[63] W. Heise und H. Kunde: On the number of derangements of a sharply k-ply transitive set of permutations. Ersch. demnächst in Aequationes math.

[64] W. Heise und H. R. Halder: Einführung in die Kombinatorik. Carl Hanser Verlag. In Vorbereitung.