BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1976

MÜNCHEN 1977

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H.Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Über ordnungshomogene Bogen

Von **Otto Haupt** in Erlangen

*Georg Aumann zum 70. Geburtstag in Freundschaft und Dankbarkeit*

## Einleitung

I. In der Ebene $R^2$ sei $\mathfrak{k}^1$ das System der Geraden. Man bezeichnet einen Bogen $B \subset R^2$ als $\mathfrak{k}^1$-ordnungshomogen, wenn alle Teilbogen $T$ von $B$ die gleiche Ordnung $POW(T, \mathfrak{k}^1)$ bezüglich $\mathfrak{k}^1$, kurz $\mathfrak{k}^1$-Ordnung, besitzen. Hierbei gilt (vgl. [1], 3.4.2.): Besitzt $B$ höchstens endliche $\mathfrak{k}^1$-Ordnung $POW(B, \mathfrak{k}^1)$, so ist $B$ $\mathfrak{k}^1$-ordnungshomogen genau dann, wenn $POW(T, \mathfrak{k}^1) = 2$ (für alle $T \subset B$). Da 2 die kleinstmögliche $POW(B, \mathfrak{k}^1)$ ist, hat man den Gleichwertigkeitssatz: $\mathfrak{k}^1$-Ordnungshomogenität ist, im Falle höchstens endlicher $\mathfrak{k}^1$-Ordnung, gleichbedeutend mit lokaler $\mathfrak{k}^1$-Ordnungsminimalität. (Übrigens existieren auch $\mathfrak{k}^1$-ordnungshomogene Bogen der $\mathfrak{k}^1$-Ordnung Unendlich). – Der Gleichwertigkeitssatz gilt ebenso für den Fall, daß $\mathfrak{k}^1$, in der Ebene, ersetzt wird durch das System der Kreise oder gewisser konvexer Kurven mit der Grundzahl 3 (d. h. jede Kurve wird, wie der Kreis, durch je 3 ihrer Punkte eindeutig bestimmt); dem entsprechend hat man in diesen Fällen 3 als Minimalordnung (an Stelle von 2 im Falle von $\mathfrak{k}^1$).

II. In den Sätzen der Ziff. I. sind die betrachteten Bogen $B$, abgesehen von der Endlichkeit der Ordnung, keinen weiteren Forderungen unterworfen. Demgegenüber ist in $R^2$ bei beliebigen Kurvensystemen mit einer Grundzahl $k \geq 3$ der Gleichwertigkeitssatz bisher nur unter zusätzlichen Forderungen an $B$, nämlich unter Differenzierbarkeitsforderungen bewiesen (vgl. [5]). Gleiches gilt für Bogen $B$ im $R^n$, für $n \geq 3$, wenn dabei die Ordnung von $B$ bezüglich des Systems $\mathfrak{k}^n$ der Hyperebenen des $R^n$ definiert wird [6].

III. In der vorliegenden Note werden zunächst (§ 1) die benötigten Hilfsmittel zusammengestellt. Sodann folgt (§ 2) der Beweis des Gleichwertigkeitssatzes (2.6.) für den Fall der Ebene $R^2$ und für Systeme $\mathfrak{k}$ ebener Kurven der Grundzahl $k = 3$, wobei $\mathfrak{k}$ nicht zu den in Ziff. II. genannten Kurvensystemen gehört; die zu Grunde gelegten Bogen $B$ sind bezüglich $\mathfrak{k}$ der folgenden Forderung unterworfen: Zu $x, y \in B$, $x \neq y$, existiert höchstens ein $K \in \mathfrak{k}$ mit $y \in K$ derart, daß $B$ von $K$ in $x$ gestützt wird. Diese zusätzliche Forderung an $B$ ist erheblich schwächer als die bisher (vgl. [5]) in Betracht gezogenen. Schließlich bringt der § 3 den Beweis des Gleichwertigkeitssatzes (3.6.) bezüglich des Systems $\mathfrak{k}$ der Ebenen im $R^3$; dabei sollen die zu Grunde gelegten Bogen $B$ im $R^3$ differenzierbar sein in dem Sinne, daß in jedem Punkt von $B$ genau eine Tangente an $B$ existiert; diese Differenzierbarkeitsforderung bezüglich $B$ ist ebenfalls schwächer als die bislang in Betracht gezogenen. Der Beweis des Satzes in 3.6. wird auf den Satz in 2.6. zurückgeführt.

## § 1. Vorbemerkungen

**1.1.** Unter *Bogen* bzw. Kurven werden topologische Bilder einer (abgeschlossenen) Strecke bzw. einer Kreisperipherie verstanden. Sind $a$, $b$ die Endpunkte des Bogens $B$ (d. h. die Bilder der Endpunkte der Urbildstrecke), so schreiben wir auch $B(a|b)$ statt $B$; ferner sei gesetzt $\underline{B} := \underline{B}(a|b) := B(a|b) \setminus \{a, b\}$. Ist $B$ orientiert, so bezeichnet man $a$ als Anfangspunkt von $B$, weiter $a$ als auf $B$ v o r $b$ gelegen und $b$ als h i n t e r $a$. Dabei bezeichnet $A \setminus B$ das *Komplement* von $B$ bezüglich $A$.

**1.1.1.** Für eine beliebige Menge $M \neq \emptyset$ bezeichne $POW(M)$ die Mächtigkeit von $M$. Ist $\mathfrak{s}$ irgend ein Mengensystem und ist $POW(M \cap S) < +\infty$ für jedes $S \in \mathfrak{s}$, so sagen wir, $M$ besitze bezüglich $\mathfrak{s}$ h ö c h s t e n s e n d l i c h e n P u n k t o r d n u n g s w e r t $POW(M, \mathfrak{s})$. Existiert sogar max. $\{POW(M \cap S) : S \in \mathfrak{s}\} = m < +\infty$, so sagen wir, $M$ besitze den b e s c h r ä n k t e n $POW(M; \mathfrak{s}) = m$.

Sind $M$ und die $S \in \mathfrak{s}$ Teilmengen eines topologischen Raumes, so ist, bei höchstens endlichem $POW(M, \mathfrak{s})$, die Menge $M$ darstellbar als in $M$ abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von ordnungshomogenen Teilmengen $M'$ (vgl. [3]); dabei heißt $M'$ o r d n u n g s h o m o g e n b e z ü g l i c h $\mathfrak{s}$, kurz $\mathfrak{s}$-o.h., wenn für $x \in M'$

alle hinreichend kleinen Umgebungen $U(x)$ in $M'$ von $x$ einen für alle $x$ konstanten $POW(U(x), \mathfrak{f})$ besitzen, den wir als den lokalen $POW(x, B, \mathfrak{f})$ von $M'$ bezeichnen.

Ist $M$ ein Bogen, so sind in den von uns betrachteten Fällen die $M'$ Teilbogen von $B$. Es existieren also stets $\mathfrak{k}$-o. h. Teilbogen eines Bogens $B$. Und das in der Einleitung angesprochene Problem läuft hinaus auf die *Bestimmung aller lokalen* $POW$, die bei o.h. Teilbogen von $B$ auftreten können bezüglich des jeweils zu Grunde liegenden $\mathfrak{f}$.

Im § 2 wird gezeigt, daß für die betrachteten $B$ und $\mathfrak{f}$ *die lokalen* $POW$ $+\infty$ *und* 3 *die einzig möglichen sind*, daß sich also jedes $B$ aus o.h. Bogen dieser lokalen $POW$ „zusammensetzt".

1.2. Es sei $E$ topologisches Bild einer abgeschlossenen Kreisscheibe und $\underline{E}$ das der zugehörigen offenen Kreisscheibe. In $E$ sei ein System $\mathfrak{k}$ von sogen. Ordnungscharakteristiken, kurz OCh, im Sinne von [1], 1.1.1., gegeben mit der Grundzahl $k = k(\mathfrak{k}) = 3$; dabei sind also die OCh Bogen oder (und) Kurven, die mit $E \setminus \underline{E}$ genau ihre zwei Endpunkte oder (und) höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Ferner ist jede OCh $K$ durch beliebige 3 ihrer Punkte eindeutig bestimmt und hängt stetig von ihnen ab. Ist $x_i \in K$, $i = 1, \ldots, r \geq 1$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, so schreiben wir $K(x_1, \ldots, x_r)$. Gilt also $x_\varkappa := \lim_m x_{\varkappa m}$, $\varkappa = 1,2,3$ mit $x_\varkappa \neq x_\tau$ für $\varkappa \neq \tau$, und existieren die $K_m := K(x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}) \in \mathfrak{k}$, so existiert auch $K := \lim_m K_m = K(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{k}$. Es soll keine allen OCh gemeinsamen Punkte geben.

1.2.1. Neben $\mathfrak{k}$ wird zu Grunde gelegt ein fester (Grund-)Bogen $B \subset E$, welcher mit $E \setminus \underline{E}$ genau seine Endpunkte gemeinsam hat. Die beiden Komponenten von $\underline{E} \setminus B$ bezeichnen wir als die *Seiten* $B(\pm)$ von $B$.

Es heißt $B$ normal zu $\mathfrak{k}$, kurz $\mathfrak{k}$-*normal*, wenn für jedes $K \in \mathfrak{k}$ mit $POW(B \frown K) \geq 3$ die einer Orientierung von $B$ entsprechende Reihenfolge der Punkte von $B \frown K$ auf $B$ gleich ist auf $K$ der einer Orientierung von $K$ entsprechenden ([1], 2.3.1.); dabei wird $POW(B; \mathfrak{k})$ als *höchstens endlich* vorausgesetzt (ev. nur für einen Teilbogen von $B$). Besitzt jeder Punkt von $B$ eine $\mathfrak{k}$-normale Umgebung auf $B$, so werde B als *lokal* $\mathfrak{k}$-normal bezeichnet.

1.2.2. Es sei $z \in \underline{B} \frown K$, $K \in \mathfrak{k}$. Es heißt $z$ Schnitt- oder Stützpunkt von $B$ und $K$, je nachdem bei orientiertem $K$ eine vordere und eine hintere Umgebung von $z$ auf $K \setminus \{z\}$ auf verschiedenen oder auf der gleichen Seite von $B$ liegen; es heißt $z$ Stützpunkt aus $B(\pm)$, wenn eine Umgebung von $z$ auf $K \setminus \{z\}$ in $B(\pm)$ liegt.

Unter einer ($\mathfrak{k}$-)Sekante von $K$ werde verstanden ein $K \in \mathfrak{k}$ mit lauter Schnittpunkten in $\underset{\sim}{B} \cap K \neq \emptyset$, wobei $B \cap K = \underset{\sim}{B} \cap K$ sein möge. In beliebiger Nähe einer (jeden) $\mathfrak{k}$-Sekante $K$ von $B$ gibt es in $\mathfrak{k}$ offene Mengen $\mathfrak{v}$ derart, daß jedes $K' \in \mathfrak{v}$ Sekante von $B$ ist und daß $\underset{\sim}{B} \cap K'$ mindestens ebensoviele Schnittpunkte enthält wie $\underset{\sim}{B} \cap K$ (vgl. [1], 1.4.2., Satz 1). Für irgend zwei OCh $K', K''$ mit $K' \neq K''$ ist $POW(K' \cap K'') \leq 2$ und $POW(K' \cap K'') = 1$ jedenfalls dann, wenn $K' \cap K''$ einen Stützpunkt enthält.

1.2.3. Ist $x,y \in B$ mit $x \neq y$ und existiert $K(x,y) \in \mathfrak{k}$ mit $y$ als Stützpunkt aus $B(\pm)$, so werde $K(x,y)$ als StützOCh $T(x,y, \pm)$ in $y$ von $x$ aus (auch „durch $x$") bezeichnet und $B$ als $\pm$-stützbar aus $x$ in $y$ und zwar *eindeutig*, wenn es keine zwei verschiedenen $T(x,y,+)$ bzw. $T(x,y,-)$ gibt. Übrigens *können* $T(x,y,+)$ *und* $T(x,y,-)$ *nicht gleichzeitig existieren* (denn anderenfalls existieren etwa zu $T(x,y,-)$ beliebig benachbarte OCh $K$ mit $POW(T(x,y,+) \cap K) \geq 3$).

Schließlich heiße $B$ höchstens eindeutig stützbar (+ bzw. — bezüglich $\mathfrak{k}$), kurz $T$-Bogen, wenn gilt:

(I) Für alle $x,y \in B$, $x \neq y$, existiert höchstens ein $T(x,y,+)$ bzw. höchstens ein $T(x,y,-)$.

(II) Es seien $x,y,y_m \in B$, $m = 1, 2, \ldots$, mit $y = \lim_m y_m$, $x \neq y$. Es existiere $T_m := T(x,y_m,+)$ und $L := \lim_m T_m$. Dann soll $L \in \mathfrak{k}$ sein. Und Entsprechendes soll bezüglich $T(x,y_m,-)$ gelten.

Folgerung. Existiert $L = \lim_m T(x,y_m,+) \in \mathfrak{k}$ sowie eine Umgebung $U$ von $y$ in $E$ mit $(T(x,y_m,+) \setminus B) \cap U \subset B(+)$ für alle $m$, so ist $L = T(x,y,+)$.

Anmerkung. Beispiele von OCh-Systeme $\mathfrak{k}$ mit $T$-Bogen werden geliefert etwa von den Graphen (in einer $(\xi, \eta)$-Ebene) der Polynome von höchstens dem Grade zwei; dabei sind $\xi$, $\eta$ reelle Zahlen.

Als $\underline{E}$ wählt man dabei etwa die (in der $(\xi,\eta)$-Ebene) offene Punktmenge $\underline{E} := \{(\xi, \eta) : \xi \in \underline{J} \wedge \eta \in R\}$ mit $J := [\alpha; \beta]$, und dann $E = \{(\xi, \eta) : \xi \in J \wedge -\infty \leq \eta \leq +\infty\}$. Als Bogen $B$ wählen wir die Graphen $B := \{(\xi, \eta) : \xi \in J \wedge \eta = f(\xi)\}$ mit stetigem $f|J$. Es ist $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}' \cup \mathfrak{k}''$; dabei bezeichnet $\mathfrak{k}'$ bzw. $\mathfrak{k}''$ das System der Durchschnitte von $E$ mit den Graphen aller Polynome vom Grade Null und Eins bzw. vom Grade Zwei. Ist dann $POW(B; \mathfrak{k})$ höchstens endlich, so auch $POW(B; \mathfrak{k}')$ und daher $B$ abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen Konvexbogen ([1], 3.4.2., Satz 3.). Bei Behandlung der Frage nach den $\mathfrak{k}$-o.h.-Bogen von höchstens endlichem $POW$ kann man sich daher auf Konvexbogen $B$ beschränken. Hat ein solcher überall eine Tangente, so ist er ein $T$-Bogen (bezüglich $\mathfrak{k}$), wobei keine Stütz-OCh eine Strecke ist. Weitere hierhergehörige Bemerkungen finden sich in 2.6. – Anderen Beispielen werden wir in 3.5. begegnen.

1.3. Für den $\mathfrak{k}$-normalen Bogen $B$ gilt der *Monotoniesatz:* Es sei $K$ eine $\mathfrak{k}$-Sekante mit $\underset{\smile}{B} \cap K = (x_1, \ldots, x_r)$, $r \geq 4$, wobei also die Reihenfolge $x_1, \ldots, x_r$ auf $B$ der Orientierung von $B$ entspricht und zugleich einer Orientierung von $K$. O. B. d. A. kann angenommen werden (vgl. 1.2.2.), daß jedes zu $K$ hinreichend benachbarte $K' \in \mathfrak{k}$ ebenfalls Sekante, sogar mit $POW$ $(\underset{\smile}{B} \cap K') = r$ ist ([1], 1.4.2.). Hält man nun irgend zwei der $x_\varrho$ fest und läßt ein drittes $x_\varrho$ sich monoton auf $B$ bewegen, so bewegen sich alle übrigen Schnittpunkte der zugehörigen $\mathfrak{k}$-Sekanten $K'$ ebenfalls monoton auf $B$ und zwar je zwei auf $B$ benachbarte im entgegengesetzten Sinn (vgl. [1].2.3.). Dies gilt entsprechend auch für OCh-Systeme $\mathfrak{k}'$ mit der Grundzahl $k = k(\mathfrak{k}') = 2$, wenn nur ein Punkt festgehalten wird. Beispiele solcher $\mathfrak{k}'$ liefern die Systeme $\mathfrak{k}(p)$ der, einen festen Punkt $p$ enthaltenden OCh $K(p) \in \mathfrak{k}$.

## § 2. Bestimmung der $\mathfrak{k}$-ordnungshomogenen $T$-Bogen im Falle einer Grundzahl $k = 3$.

Es sei $\mathfrak{k}$ wie in 1.2. erklärt. Ferner sei $B$ ein $\mathfrak{k}$-normaler Bogen (in $E$) von höchstens endlichem $POW(B; \mathfrak{k})$. Da ein solches $B$, wenn $POW(B; \mathfrak{k}) = 4$, nicht $\mathfrak{k}$-o.h. ist (vgl. [1], 4.1.3.) und ein $B$ mit $POW(B; \mathfrak{k}) = 3$ trivialerweise o.h. ist, machen wir die Annahme, daß der $T$-Bogen $B$ ein o.h.-Bogen mit höchstens endlichem $POW(B, \mathfrak{k}) \geq 5$ sei. Wir wollen zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt, womit der Gleichwertigkeitssatz im Sinne der Einleitung bewiesen ist.

2.1. Zu jedem Teilbogen $W$ des o.h.-Bogens $B$ mit höchstens endlichem $POW(B, \mathfrak{k}) \geq 5$ existiert eine $\mathfrak{k}$-Sekante $K$ mit $\underset{\sim}{B} \cup K = \{x_1, \ldots, x_r\}, r \geq 5$, wobei $x_\varrho$ auf $B$ (und $K$) vor $x_{\varrho+1}$ liegt. Es liegt dann eine vordere Umgebung von $x_1$ oder von $x_2$ auf $K \setminus \{x_1, x_2\}$ in $B(+)$ und entsprechend eine vordere Umgebung von $x_2$ bzw. von $x_1$ auf $K \setminus \{x_1, x_2\}$ in $B(-)$.

Es liege etwa eine vordere Umgebung $V(x_1) \subset K \setminus \{x_1\}$ von $x_1$ in $B(-)$. Dann gilt $\underset{\sim}{K}(x_1|x_2) \cup \underset{\sim}{K}(x_3|x_4) \subset B(+)$.

Nun wenden wir auf das 4-tupel $x_1, x_2, x_3, x_4$ den Monotoniesatz (1.3.) an, indem wir $x_1$ und $x_4$ festhalten und $x_2, x_3$ kontrahieren, d. h. $x_2, x_3$ monoton gegeneinander (von $x_1$ und $x_4$ fort) bewegen. Bei Fortsetzung dieser Kontraktion (bei welcher Gewinne und Verluste von Punkten des Durchschnittes von $B$ mit den jeweils auftretenden OCh stattfinden können) gelangt man zu dem

**Lemma.** Bei festen $x_1, x_4$ und hinreichend weit getriebener Kontraktion der jeweils am nächsten bei $x_1$ bzw. $x_4$ gelegenen Schnittpunkte von $B$ mit den jeweils entsprechenden OCh $K$ erhält man ein $\tilde{K} \in \mathfrak{k}$ mit folgender Eigenschaft: Ist $B(x_1 \mid x_4) \cap \cap \tilde{K} = \{x_1, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r, x_4\}, r \geq 1$, wobei die Reihenfolge $x_1, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r, x_4$ der Orientierung von $B$ und einer von $\tilde{K}$ entspricht, so gilt

(1) alle $\tilde{x}_\varrho$ sind Stützpunkte von $B$ und $\tilde{K}$ aus $B(+)$, also $\tilde{K}((x_1|x_4) \setminus B \subset B(+)$, d. h.
$\underset{\sim}{\tilde{K}}(x_1|\tilde{x}_1) \cup \underset{\sim}{\tilde{K}}(\tilde{x}_\varrho|x_{\varrho+1}) \cup \underset{\sim}{\tilde{K}}(\tilde{x}_r|\tilde{x}_4) \subset B(+)$.

(2) Es sind $x_1, x_4$ Schnittpunkte in $B \cap \tilde{K}$; eine vordere bzw. hintere Umgebung von $x_1$ bzw. von $x_4$ auf $\tilde{K} \setminus B$ liegt in $B(-)$.

**Zusatz.** (1) Das Lemma gilt auch bei Vertauschung von $B(+)$ mit $B(-)$. – (2) Daß $B$ ein $T$-Bogen sei, wird beim Beweise des Lemmas (noch) nicht benutzt.

Beweis. *Betr. Beh.* (1) Bei der Kontraktion von $x_2$ und $x_3$ können Gewinne und dann (erst) Verluste nur in $\underset{\sim}{B}(x_2|x_3)$ auftreten; genauer: Es bezeichne $K' := K(x_1, x_2', x_3', x_4)$ die bei der Kontraktion jeweils auftretende OCh, wobei $x_2'$ bzw. $x_3'$ der jeweils am nächsten bei $x_1$ bzw. bei $x_4$ gelegene Schnittpunkt in $B \frown K'$ sein soll (soweit solche Schnittpunkte – und dann stets in gerader Anzahl – noch vorhanden sind). „Gewinn“ in $y_2' \in \underline{B}(x_2'|x_3')$ besagt: Ein sich monoton verkleinernder Teilbogen $B(y_1'|y_3') = B(y_1'|y_2') \cup B(y_2'|y_3') \subset B(x_2'|x_3')$ spaltet sich in $y_2'$ in zwei fremde, sich verkleinernde Teilbogen $B(z_1''|z_2'')$ und $B(z_3''|z_4'')$ von $B(x_2'|x_3')$; dabei vergrößert sich dann $B(z_2''|z_3'')$. Demgegenüber besagt ein Verlust in $y_2'$: Zwei sich vergrößernde Bogen $B(y_1'|y_2')$ und $B(y_2'|y_3')$ vereinigen sich in $y_2'$ zu einem sich vergrößernden Bogen $B(y_1''|y_3'')$. Wie („analytische“) Induktion zeigt, führt der Kontraktionsprozeß schließlich zu einem $\underline{\tilde{K}}$ gemäß Beh. (1).

*Betr. Beh.* (2) Gewinne können in den beim Kontraktionsprozeß sich vergrößernden Bogen $B(x_1|x_2)$ und $B(x_3|x_4)$ nicht auftreten. Außerdem ist z. B. $x_1$ Schnittpunkt von $K = K(x_1, x_2, x_3, x_4)$ mit $\tilde{K}$. Wäre nun $x_1$ Stützpunkt von $B$ und $\tilde{K}$, so läge (wegen $\underline{\tilde{K}}(x_1|\tilde{x}_1) \subset B(+)$) eine hintere Umgebung von $x_1$ auf $\tilde{K} \setminus \{x_1\}$ in $B(+)$, also (weil $x_1$ Schnittpunkt von $K$ und $\tilde{K}$) im Innern des von $B(x_1|x_2) \cup K(x_1|x_2)$ begrenzten Gebietes $G$. Und da $\tilde{x}_1 \in \tilde{K}$ auf $B$ hinter $x_2$, also außerhalb $G$ liegt und $\underline{B}(x_1|\tilde{x}_1) \frown \tilde{K} = \emptyset$ ist, wäre $\underline{K}(x_1|x_2) \frown \underline{\tilde{K}}(x_1|\tilde{x}_1) \neq \emptyset$, also $POW(K \wedge \tilde{K}) \geq 3$. Widerspruch mit $K, \tilde{K} \in \mathfrak{k}$ und $K \neq \tilde{K}$.

2.2. Von jetzt ab sei $B$ ein $T$-Bogen (1.2.3.). Außerdem (vgl. 2.1., Lemma) sei $B(x_1|x_4) \frown \tilde{K} = \{x_1\ \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r, x_4\}$ mit $\tilde{K}(x_1|x_4) \setminus \setminus B \subset B(+)$, insbesondere also seien alle $\tilde{x}_\varrho$ Stützpunkte aus $B(+)$. Gemäß 1.2.3., (I), ist daher $\tilde{K}$ die Stütz-OCh $T(x_1, \tilde{x}_\varrho, +) = T(x_4, x_\varrho, +)$, $\rho = 1, \ldots, r$.

2.2.1. Es sei $\tilde{K}$ wie in 2.2. erklärt. Zufolge der Stetigkeitseigenschaft der OCh (vgl. 1.2.) gibt es (hinreichend kleine) Umgebungen $U_1'$, $U_1$ von $x_1$ in $E$ mit $U_1' \subset U_1$ und dazu Umgebungen $\tilde{U}_1$, $U_4$ in $E$ von $\tilde{x}_1$ bzw. $x_4$ mit disjunkten abgeschlossenen Hüllen der $U_1$, $\tilde{U}_1$, $U_4$ und außerdem mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist $B \frown U_1 \frown (\tilde{K} \setminus \{x_1\}) = \emptyset$ (erzwingbar, weil $POW$ $(B, \mathfrak{k})$ höchstens endlich);

(2) Im Falle $r \geq 2$ ist $\tilde{x}_\varrho \in U_4$ für $2 \leq \rho \leq r$;

(3) Es sei $K'' := K(u, \tilde{x}_1, x_4) \in \mathfrak{k}$ mit $x_1 \neq u \in B \frown U_1'$ und $x$ der auf dem (zu $x_4$ fremden) Teilbogen $B(u|\tilde{x}_1)$ von $B$ am näch-

sten bei $B \setminus \bar{U}_1$ gelegene *Schnitt*punkt von $B$ mit $K^u$; bei hinreichend kleinem $U_1'$ (und festem $U_1$) gilt $x \in B \cap U_1$, was von jetzt ab angenommen wird. Es ist dann $K(u, \tilde{x}_1, x_4) = K(x, \tilde{x}_1, x_4) = K^u =: K^x$; zu verschiedenen $x$, etwa $x' \neq x''$, gehören verschiedene $K^{x'}, K^{x''}$. Nun ist $\tilde{x}_1$ Schnittpunkt (nicht nur von $\tilde{K}$ und $K^x$ sondern auch) von $B$ und $K^x$; denn anderenfalls wäre $\tilde{x}_1$ Stützpunkt von $B$ und $K^x$ und zwar (wie aus (4a) folgt) aus $B(+)$, sodaß $\tilde{K} = T(x_4, \tilde{x}_1) = T(x, \tilde{x}_1)$ (weil $B$ $T$-Bogen), mithin $x \in \tilde{K}$ im Widerspruch zu (1);

(4) Es habe $x$ die in (3) verabredete Bedeutung, es sei also $x \in B \cap U_1 \setminus \{x_1\}$. Liegt dann $x$ auf $B \cap U_1$ vor bzw. hinter $x_1$, so gilt

(4a) $\underline{K}^x(x \,|\, \tilde{x}_1) \subset B(+)$ bzw. $\underline{K}^x(\tilde{x}_1 | x_4) < B(+)$;

(4b) $\underline{K}^x(\tilde{x}_1 \,|\, \tilde{x}_4) \setminus (\bar{U}_1 \cup U_4) \subset B(+)$ bzw. $(\underline{K}^x(x \,|\, \tilde{x}_1) \setminus (\bar{U}_1 \cup \cup B)) \subset B(+)$;

(5) *Es sei $y(x)$ der in $B \cap \bar{U}_1 \cap \underline{K}^x(\bar{x}_1 | x_4)$* bzw. *in $B \cap \bar{U}_1 \cap \cap K^x(x | \bar{x}_1)$ am weitesten von $x_1$ entfernte bzw. am nächsten bei $x_1$ gelegene Schnittpunkt von $B$ und $K^x$, je nachdem $x$ auf $B \cap U_1$ vor bzw. hinter $x_1$ liegt.* Dann gilt

(5a) $K^x(y(x) \,|\, x_4) \setminus (U_4 \cup B) \subset B(+)$ bzw. $K^x(x \,|\, y(x) \setminus B \subset \subset B(+)$. (Es gelten (4)–(5a), wenn bzw. weil $U_1'$ hinreichend klein, also $K^x$ beliebig benachbart zu $\tilde{K}$ ist). Aus (4)–(5a) folgt schließlich

(6) Es ändert sich $y(x)$ antiton mit $x$ auf $B$. (Denn $\tilde{x}_1$ ist Schnittpunkt auch von $K^{x'}$ und $K^{x''}$ für $x' \neq x''$).

2.2.2. Es seien $x', x'' \in \underline{B} \cap U_1 \setminus \{x_1\}$ Punkte $x$ im Sinne von 2.2.1., (3); dabei liege $x'$ vor und $x''$ hinter $x_1$ auf $B$. Es sind dann $y(x')$ bzw. $y(x'')$ die zu $x = x'$ bzw. $x = x''$ im Sinne von 2.2.1., (5), zugehörigen $y(x)$. Bei festen $x', x_4$ bzw. $x'', x_4$ kontrahieren wir die zu $x'$ bzw. $x''$ fremden Teilbogen $B(\tilde{x}_1 | y(x'))$ bzw. $B(y(x'') \,|\, \tilde{x}_1)$ von $B$. Entsprechend wie in 2.1. bei der Kontraktion von $x_2$ und $x_3$ mit festem $x_1, x_4$ erhalten wir, mit der Abkürzung $T(x,y)$ statt $T(x,y,+)$, ein $T(x', y_1') = T(x_4, y_1') = K(x', y_1', \ldots, y_r', x_4) \in \mathfrak{k}$ bzw. $T(x'', y_1'') = T(x_4, y_1'') = K(x'', y_1'', \ldots, y_t'', x_4) \in \mathfrak{k}$ der folgenden Art:

Die Reihenfolge $x', y_1', \ldots, y_r', x_4$ bzw. $x'', y_1'', \ldots, y_t'', x_4$ entspricht auf $B$ der (gleichen) Orientierung von $B$, sodaß $y_1'$ bzw. $y_1''$

der auf $\underline{B}(x'|x_4)$ bzw. $\underline{B}(x''|x_4)$ am nächsten bei $x'$ bzw. $x''$ gelegene Punkt von $B \frown T(x', x_4)$ bzw. $B \frown T(x''|x_4)$ ist; alle $y'_\varrho$ und alle $y''_\tau$ sind Stützpunkte aus $B(+)$. Und aus 2.2.1., (4)–(6) folgt

(i) $\underline{B}(x'|x_4) \frown T(x', y'_1) \setminus U_4 = \{y'_1, \ldots, y'_r\}$ bzw. $\underline{B}(x''|x_4) \frown T(x'', y''_i) = \{y''_1, \ldots, y''_i\}$;

(ii) $\underline{T}(x'|y'_1) \subset B(+)$ bzw. $\underline{T}(x''|y''_1) \subset B(+)$;

(iii) $T(y'_1|y_4) \setminus (B \smile U_4) \subset B(+)$ bzw. $T(y''_1|y_4) \setminus B \subset B(+)$.

Außerdem liegt $y'_1$ auf $B \frown \bar{U}_1$ hinter $y''_i$ (weil $x'$ vor $x''$).

Anmerkung zu (ii). Es liegt $\underline{T}(x'|y'_1)$ ganz auf der einen Seite von $B(x_1|y'_1)$.

2.3. Es sollen $\bar{x} := x_1$ und $\bar{y} := \bar{x}_1$ die in 2.2. gebrauchte Bedeutung besitzen. Weiter bezeichnen wir mit $V$ bzw. $H$ diejenige Operation, vermöge deren wir in 2.2.2. von $\bar{K} = K(\bar{x}, \bar{y}, x_4)$, kurz von $\bar{y}$, zu $K(x', y'_1, x_4) = T(x', y'_1)$, kurz zu $y'_1$, bzw. zu $K(x'', y''_1, x) = T(x'', y''_1)$, kurz zu $y''_1$, gelangt waren. Einer auf $B$ monoton von vorn gegen $\bar{x}$ konvergenten Folge $(x'_k)_k$ entspricht dann vermöge $V$, angewandt auf $\bar{y}$, eine auf $B$ von hinten monoton gegen $\bar{y}$ konvergierende Folge $(y'_{1k})_k$; die zugehörigen $T(x'_k, y'_{1k}) = T(x_4, y'_{1k})$ konvergieren gegen $T(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{K}$. Entsprechendes gilt für die Anwendung von $H$ auf $\bar{K} = T(\bar{x}, \bar{y})$.

2.3.1. Es sei jetzt $Y \subset B' := B(\bar{y}|y(x')) \subset B \frown \bar{U}_1$ die Menge aller $y_1 \in B'$ derart, daß $T(x_4, y_1) \in \mathfrak{k}$ existiert mit folgender Eigenschaft: Es ist $T := T(x, y_1) = T(x_4, y_1)$, sodaß $x$ Schnittpunkt von $T$ mit $B \frown U_1$; alle Punkte von $(\underline{B}(x|x_4) \setminus U_4) \frown T$ sind Stützpunkte aus $B(+)$ und liegen in $B \frown \bar{U}_1$; dabei ist $y_1$ der auf $\underline{B}(x, x_4)$ am nächsten bei $x$ gelegene Stützpunkt, also $\underline{T}(x|y_1) \subset B(+)$ und $(\underline{T}(x, x_4) \setminus (U_4 \smile B)) \subset B(+)$.

Aus der Definition von $Y$ und aus 2.2.2. folgt:

(I) $\bar{y}, y(x') \in \underline{Y}$, ferner $\underline{Y} := \underline{B}' \frown Y \neq \emptyset$. – Denn $\bar{y}$ ist hinterer und $y(x')$ vorderer Häufungspunkt, kurz HP, von $Y$.

(II) Jedes $y_1 \in \underline{Y}$ ist sowohl hinterer als vorderer HP von $Y$.

(III) Jedes $z \in \underline{B}'$, welches hinterer HP von $Y$ ist, gehört zu $Y$.

In der Tat: Es sei $z = \lim_k y_{1k}$ mit $y_{1k} \in Y \frown \underline{B}'(z|y(x'))$, sodaß $T := T(x_4, y_{1k}) \in \mathfrak{k}$ existiert. Die Folge der Kompakta $T_k \subset E$ enthält eine, wieder mit $(T_k)_k$ zu bezeichnende konvergente Teilfolge. Ist $P := \lim_k T_k$, so gilt $P \in \mathfrak{k}$ (vgl. 1.2.); denn $T_k = T(x_k, y_{1k}) = K(x_k, y_{1k}, x_4)$ mit $x_k \in B \cap U_1$, sodaß die Existenz von $\lim_k x_k = x$ erzwingbar ist (durch Übergang zu einer Auswahlfolge) und $P = \lim_k K(x_k, y_{1k}, x_4)$ mit $\lim_k x_k \neq \lim_k y_{1k} \neq x_4$. – Es ist aber $P = T(x, z) = T(x_4, z)$ (vgl. 1.2.3., Folgerung); dabei ist $z$ der am nächsten bei $x$ gelegene Stützpunkt in $B \cap \underset{\sim}{T}(x|x_4)$, also $z$ ein $y_1$, wozu bemerkt sei, daß $x$, soweit nicht am nächsten bei $z$ gelegener Schnittpunkt aus $B \cap U_1 \cap P$, durch einen solchen ersetzbar ist (weil $P$ hinreichend benachbart zu $\tilde{K}$).

(IV) Aus (I)–(III) folgt: Es ist $Y$ dicht in $B'$. Andernfalls nämlich existiert ein Teilbogen $F := B(a|b)$ von $B'$ mit $\underset{\sim}{F} \cap Y = \emptyset$. Da $y(x')$ vorderer HP von $Y$ ist, kann $b$ als hinterer HP von $Y$ angenommen werden, sodaß $b \in Y$ (gemäß (III)). Wegen $\underset{\sim}{F} \cap Y = \emptyset$ ist andererseits $b \in Y$ nicht vorderer Häufungspunkt von $Y$ im Widerspruch zu (II).

(V) Gemäß (IV) ist jedes $z \in \underset{\sim}{B}'$ hinterer HP des in $B'$ dichten $Y$, also $B' = Y$.

(VI) Aus (V) folgt noch: Jedes $T := T(x_4, y_1) = T(x, y_1)$ mit $y_1 \in \underset{\sim}{Y}$ enthält genau einen Stützpunkt in $B(x|x_4) \setminus U_4$, nämlich nur $y_1$ (und kein weiteres $y_2$).

In der Tat: Existiert hinter $y_1$ noch ein zu $y_1$ auf $B$ unmittelbar benachbarter Stützpunkt $y_2 \in B \cap T \setminus U_4$, so liegt der Teilbogen $\underset{\sim}{T}(y_1|y_2)$ von $T$ in $B(+)$. Wegen $y_1 \in \underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{B}'$ gibt es $z \in \underset{\sim}{Y} \cap \underset{\sim}{B}(y_1|y_2)$ und $x^+ \in B \cap U_1$ derart, daß $T^+ := T(x^+, z) = T(x_4, z) = T(x^+, z, +) \neq T$ existiert mit $T^+(z|x_4) \setminus (U_4 \cup B) \subset B(+)$. Nun liegen aber einerseits $x^+ \in B$ und $x_4 \in B$ außerhalb des von $B(y_1|y_2) \cup T(y_1|y_2)$ begrenzten Gebietes $G^+$. Andererseits kann $T^+$ das $G^+$ nur über $\underset{\sim}{T}(y_1|y_2)$ verlassen (wegen $T^+(z|x_4) \setminus (U_4 \cup B) \subset B(+)$). Daher gibt es $u^+ \in \underset{\sim}{T}^+(x^+|z) \cap \underset{\sim}{T}(y_1|y_2)$ und $v^+ \in \underset{\sim}{T}^+(z|x_4) \cap \underset{\sim}{T}(y_1|y_2)$. Und weil auch $x_4 \in T \cap T^+$ und die $u^+$, $v^+$, $x_4$ verschieden sind, wäre $POW(T \cap T^+) \geq 3$ im Widerspruch zu $T$, $T^+ \in \mathfrak{k}$ und $T \neq T^+$.

2.4. Aus 2.3.1. entnimmt man den

**Hilfssatz.** Vor. Es sei $B$ ein $\mathfrak{k}$-normaler $T$-Bogen von höchstens endlichem $POW(B; \mathfrak{k})$. Weiter sei $K \in \mathfrak{k}$-Sekante von $B$

und es seien $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ unmittelbar auf $B$ aufeinanderfolgende Schnittpunkte aus $B \frown K$.

Beh. Es gibt in $E$ Umgebungen $U_1$ von $x_1$ und $U_4$ von $x_4$, ferner einen Teilbogen $B' := B(\tilde{x}|\tilde{y}) \subset \underline{B}(x_2|x_3)$ von $B$ und eine Umgebung $V$ in $E$ von $B'$ mit disjunkten $\bar{U}_1$, $\bar{V}$ und $\bar{U}_4$ von folgender Beschaffenheit: Zu jedem $y_1 \in B'$ existiert $T = T(x_4, y_1) = T(x, y_1) \in \mathfrak{k}$ mit $x \in B \frown U_1 \frown T$. Es enthält $\underline{B}(x|x_4) \setminus U_4$ genau einen Stützpunkt von $B$ mit $T$, nämlich $y_1$. Je nachdem $\underline{K}(x_2|x_3) \subset B(-)$ oder $\subset B(+)$ gilt $\underline{T}(x|x_4) \setminus (U_4 \smile \{y_1\}) \subset \subset B(+)$ oder $\subset B(-)$. Es ändert sich $x$ antiton mit $y_1$. Es ist $x$ Schnittpunkt von $B$ mit $T$.

2.5. Es sei $B$ wieder ein $\mathfrak{k}$-normaler $T$-Bogen mit höchstens endlichem $POW(B; \mathfrak{k})$. Überdies sei jetzt $B$ $\mathfrak{k}$-*ordnungshomogen*. $B_0$ sei ein beliebiger Teilbogen von $B$.

2.5.1. Gemäß 2.1. und 2.4. gibt es

(1) in $\underline{B}_0$ Punkte $x_{11}$, $x_{41}$ und in $E$ Umgebungen $U_{11}$ von $x_{11}$, $U_{41}$ von $x_{41}$ mit $\bar{U}_{11} \frown \bar{U}_{41} = \emptyset$. Ferner gibt es einen zu $\bar{U}_{11} \smile \bar{U}_{41}$ fremden Bogen $B_1 := B(\tilde{x}_1|\tilde{y}_1) \subset \underline{B}(x_{11}|x_{41})$ der folgenden Art: Jedes $y_{11} \in B_1$ liefert ein $T_1 := T(x'_{11}, y_{11}) = T(x_{41}, y_{11}) \in \mathfrak{k}$, wobei $x'_{11} \in B \frown U_{11} \frown T_1$ und $\underline{T}_1(x'_{11}|y_{11}) \subset B(+)$. Es ist $x'_{11}$ Schnittpunkt in $B \frown T_1$.

(2) gibt es $x_{12}$, $x_{42} \in \underline{B}_1$ und in $E$ Umgebungen $U_{12}$ von $x_{12}$ bzw. $U_{42}$ von $x_{42}$ mit $\bar{U}_{12} \frown \bar{U}_{42} = \emptyset = (\bar{U}_{11} \smile \bar{U}_{41}) \frown \{\bar{U}_{12} \smile \bar{U}_{42}\}$. Dabei ist $(\bar{U}_{12} \smile \bar{U}_{14}) \frown B \subset B_1$. Ferner gibt es einen zu $\bar{U}_{12} \smile \bar{U}_{42}$ fremden Bogen $B_2 \subset \underline{B}(x_{12}|\, x_{42})$, welcher folgende Eigenschaften besitzt: Jedes $y_{12} \in B_2$ liefert ein $T_2 := T(x'_{12}, y_{12}) = T(x_{42}, y_{12}) \in \mathfrak{k}$, wobei $x'_{12} \in B \frown U_{12} \frown T_2$ und $\underline{T}_2(x'_{12}|y_{12}) \subset \subset B(-)$, also auf der entgegengesetzten Seite von $B$ wie $\underline{T}_1(x'_{11}|y_{11})$. Es ist $x'_{12}$ Schnittpunkt in $B \frown T_2$. Überdies kann und soll angenommen werden, daß $x'_{11}$ auf $B$ vor $x'_{12}$ liegt und $x_{12}$ vor $y_{12}$.

Die Operation, welche von (1) zu (2), also von $B_1$ zu $B_2$ führt, sei mit Op bezeichnet.

2.5.2. Wegen $B_2 \subset \underline{B}_1$ existiert (gemäß 2.5.1.) zu jedem $y_{12} \in B_2$ sowohl ein $T_1 := T(x'_{11}, y_{12})$ mit $x'_{11} \in T_1 \frown B \frown U_{11}$ und $\underline{T}_1(x_{11}|y_{12}) \subset B(+)$ als ein $T_2 := T(x'_{12}, y_{12}) \subset B(-)$; dabei gilt $x'_{12} \in \underline{B}(x'_{11}|y_{12})$, es liegt also $x'_{11}$ auf $B$ vor $x'_{12}$ und $x'_{12}$ vor $y_{12}$.

Da $x'_{12}$ Schnittpunkt in $B \frown T_2$ ist, liegt eine vordere Umgebung von $x'_{12}$ auf $T_2 \setminus \{x'_{12}\}$ in $B(+)$, also im Innern des von $T_1(x'_{11}|y_{12}) \smile B(x_{11}|y_{12})$ begrenzten Gebietes $G_1$. Da kein Endpunkt von $T_2$ in $G_1$ liegt, muß $G_1$ von $T_2$ in (mindestens) einem vor $x'_{12}$ auf $T_2$ liegenden Punkt $z$ verlassen werden. Es ist aber $z \in \underline{B}(x'_{11}|x'_{12})$; denn $(T_1 \setminus \{y_{12}\}) \frown (T_2 \setminus \{y_{12}\}) = \emptyset$, weil $T_1 \neq T_2$ und $T_1$, $T_2$ in der Umgebung von $y_{12}$ auf verschiedenen Seiten von $B$ liegen, also $y_{12}$ gemeinsamer Stützpunkt von $T_1$ und $T_2$ ist. Somit ist $POW(B \frown T_2) \geq 3$.

2.5.3. Wenden wir Op auf $B_2$ (statt auf $B_1$) an, so erhalten wir ein $B_3 \subset B_2$ und ein $T_3 \in \mathfrak{k}$, für welche die Betrachtungen in 2.5.2. ergeben: Es ist $POW(B \frown T_3) \geq 4$ (vgl. [4], S. 25, § 5). Fortgesetzte Anwendung von Op führt zu einer antitonen Folge $(B_m)_m$ von Teilbogen von $B$, also zu $D := \bigcap_m B_m \neq \emptyset$. Es gibt also ein $y \in D$ und ein $T := T(x,y) \in \mathfrak{k}$ mit $x \neq y$ und $POW(B \frown T) = +\infty$ im Widerspruch damit, daß $POW(B; \mathfrak{k})$ höchstens endlich ist.

2.6. Aus 2.5.3. ergibt sich somit der

**Satz.** Es sei $B$ ein (lokal) $\mathfrak{k}$-normaler $T$-Bogen, wobei $\mathfrak{k}$ ein System von OCh im Sinne von 1.2. ff. ist. Dann besitzt $B$, falls von höchstens endlichem $POW(B, \mathfrak{k})$ und $\mathfrak{k}$-ordnungshomogen, den lokalen $POW$ Drei. (Als lokale $POW$ kommen also für ($\mathfrak{k}$-ordnungshomogene) $B$ höchstens Drei und Unendlich in Betracht).

Anmerkung. Für das in 1.2.3. mit Hilfe der Polynome höchstens 2. Grades erklärte System $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}' \smile \mathfrak{k}''$ von OCh gilt: Es gibt $\mathfrak{k}$-o.h. $T$-Bogen $B$ vom lokalen $POW$ $t$ *sowohl für* $t = 3$ *als für* $t = +\infty$.-*Betr*, $t = 3$. Zufolge des vorstehenden Satzes genügt es, die Existenz von $T$-Bogen $B$ von höchstens endlichem $POW$ nachzuweisen; denn ein solches $B$ ist abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von $\mathfrak{k}$-o.h. Bogen, deren lokaler $POW$ nach unserem Satz nur Drei sein kann. Aber z. B. $POW(B, \mathfrak{k})$ ist höchstens endlich, wenn $B = \mathrm{Gr}(f)$ (= Graph von $f$) mit analytischem, von den Polynomen verschiedenem $f|J$.-*Betr*. $t = +\infty$. Man wähle $B = \mathrm{Gr}(f)$ mit einem differenzierbaren nirgends (in $J$) monotonem $f|J$ (vgl. [7]). Es sei dann $\mathfrak{b}$ das Büschel der $B$ treffenden Parallelen zur $\xi$-Achse. Weil $f$ nirgends monoton, liegen in $\mathfrak{b}$

diejenigen Geraden dicht, welche Punkte mit maximalen Werten von $f$ enthalten, also Stützpunkte mit $B$. Bekanntlich (vgl. z. B. [1], 1.4.1.) ist dann $POW(B, \mathfrak{b}) = +\infty = POW(B, \mathfrak{k})$, weil $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{k}$. Und da Gleiches für jeden Teilbogen von $B$ gilt, ist $B$ auch $\mathfrak{k}$-o.h. mit $t = +\infty$. – Man bemerke noch, daß die für $t = 3$ und $t = +\infty$ angegebenen Beispiele $T$-Bogen sind, weil die zugehörigen $f$ differenzierbar sind.

## § 3 Ordnungshomogene Bogen mit Tangente im $R^3$

3.1. Mit $\boldsymbol{R}^i$, $i = 1, 2, 3$, sei der euklidische, $i$-dimensionale Raum bezeichnet und mit $\mathfrak{k}^t$ das System der $t$-dimensionalen Unterräume $R^t$ in $\boldsymbol{R}^i$, $1 \leq t \leq i - 1$. Es sei $B \subset \boldsymbol{R}^i$ ein Bogen, $2 \leq i \leq 3$. Ist $B$ orientiert und $x \in B$, so bezeichnet man als vordere bzw. hintere Halbtangente $Th_v(x) = Th_v(x; B)$ bzw. $Th_h(x) = Th_h(x, B)$ den Limes, falls er existiert, der Halbgeraden mit $x$ als Anfangspunkt, welche einen von vorn bzw. von hinten gegen $x$ konvergierenden Punkt $u \in B$ enthalten. Die Trägergerade $T_v(x) = T_v(x, B)$ bzw. $T_h(x) = T_h(x, B)$ von $Th_v(x)$ bzw. von $Th_h(x)$ wird als die vordere bzw. hintere Tangente in $x$ an $B$ bezeichnet.

Hingegen heißt der Limes, falls er existiert, der Geraden durch zwei Punkte $u, v \in B$, die beliebig von vorn bzw. von hinten gegen $x$ konvergieren, die vordere bzw. hintere (1-)Paratingente $P_v(x) = P_v(x, B)$ bzw. $P_h(x) = P_h(x, B)$ in $x$ an $B$. Falls $P_v(x) = P_h(x)$ ist, bezeichnet man diese Gerade als die (1-)Paratingente $P(x) = \mathrm{P}(x, B)$ in $x$ an $B$. – Aus der Existenz z.B. $P_v(x)$ folgt die von $Th_v(x)$, aber nicht umgekehrt.

3.2. Für $\boldsymbol{R}^2$ ist bekannt, daß die Konvexbogen, also die $B$ mit $POW(B, \mathfrak{k}^1) = 2$, die einzigen $\mathfrak{k}^1$-o.h.-Bogen von höchstens endlichem $POW(B, \mathfrak{k}^1)$ sind ([1], 3.4.2., Satz 2). Außerdem wurden für den Fall des $\boldsymbol{R}^2$ $\mathfrak{k}^1$-o.h. und sogar differenzierbare Bogen vom lokalen $POW$ $+\infty$ angegeben (2.6.)

Im $\boldsymbol{R}^3$ gibt es $\mathfrak{k}^2$-o.h.-Bogen vom lokalen $POW\, t$ sowohl für $t = 3$ als für $t = +\infty$. Man betrachte beispielsweise $B := \{(x, y, z)$: $x = s \wedge y = s^2 \wedge z = f(s) \wedge s \in J := [0; 1]\}$. Ist $f(s) := s^3$, so liefert der Durchschnitt eines beliebigen Teilbogens $B'$ von $B$ mit einer geeigneten Ebene (vermöge einer Gleichung 3. Grades in $s$)

maximal 3 Punkte. Es besitzt also $B$ den lokalen $POW$ 3 und ist überdies differenzierbar, d. h. $B$ benutzt in jedem Punkt genau eine Tangente. – Wählt man andererseits als $f|J$ eine differenzierbare, nirgends monotone Funktion, so folgt, daß die Projektion von $B$ in die $x, z$-Ebene differenzierbar ist, also, weil gleiches für die Projektion in die $x, y$-Ebene gilt, daß auch $B$ differenzierbar ist. Ferner ist $B$ bezüglich des Büschels der zur $x, y$-Ebene parallelen Ebenen vom lokalen $POW$ $+\infty$ (wie aus 2.6. folgt), also erst recht bezüglich $\mathfrak{k}^2$.

3.3. Festsetzung. Von jetzt ab wird jeder Bogen $B$ im $\boldsymbol{R}^2$ bzw. $\boldsymbol{R}^3$ als von höchstens endlichem $POW(B, \mathfrak{k}^1)$ bzw. $POW$ $(B, \mathfrak{k}^2)$ angenommen.

3.3.1. Im $\boldsymbol{R}^3$ sei $E$ eine Ebene, $C$ ein Konvexbogen in $E$ (ohne Teilstrecken), ferner sei $e \in \boldsymbol{R}^3 \setminus E$ ein Punkt und $\mathfrak{K} := \mathfrak{K}(e, C)$ das, als Konvexkegelsektor bezeichnete Stück der Kegelfläche zwischen $e$ und $E$ ($e$ ist Scheitel von $\mathfrak{K}$). Außerdem sei $\mathfrak{k} := \{\mathfrak{K} \frown H : H \in \mathfrak{k}^2 \wedge H \frown U^+ = \emptyset\}$, wobei $U^+$ eine feste Umgebung von $e$ in $\boldsymbol{R}^3$ mit $U^+ \frown E = \emptyset$. Jeder Bogen $B \subset \mathfrak{K} \setminus (\bar{U}^+ \smile E)$, welcher sich aus $e$ schlicht auf $C$ projiziert, ist dann $\mathfrak{k}$-normal. Überdies geht durch beliebige 3 Punkte von $B$ genau ein $K \in \mathfrak{k}$; denn wegen der Konvexität von $C$ hat $B$ mit jeder Geraden des $\boldsymbol{R}^3$ höchstens 2 Punkte gemeinsam.

3.4. Ein Bogen $B = \bar{B} \subset \boldsymbol{R}^3$ ist, weil beschränkt, enthalten im Innern eines abgeschlossenen Simplexes $S$. Sind $e'$, $e''$ Eckpunkte von $S$, so sei $\mathfrak{b}$ das Ebenenbüschel im $\boldsymbol{R}^3$ mit der Verbindungsgeraden $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(e' e'')$ als Achse; es ist also $B \frown \mathfrak{A} = \emptyset$. Mit $POW(B, \mathfrak{k}^2)$ ist auch $POW(B, \mathfrak{b})$ höchstens endlich. Daher gibt es Teilbogen $W = \overline{W}$ von $B$ mit $POW$ $(W, \mathfrak{b}) = 1$ ([1], 7.8.4.). Es sei nun $\mathfrak{P}$ eine zu $S$ fremde, zu $\mathfrak{A}$ parallele Ebene (im $\boldsymbol{R}^3$), für welche $W$ zwischen $\mathfrak{P}$ und der zu $\mathfrak{P}$ parallelen, $\mathfrak{A}$ enthaltenden Ebene liegt; außerdem sei $p' : W \rightarrowtail \mathfrak{P}$ bzw. $p'' : W \rightarrowtail \mathfrak{P}$ die Zentralprojektion von $W$ in $\mathfrak{P}$ aus dem Zentrum $e'$ bzw. $e''$. Wegen $POW(B, \mathfrak{b}) = 1$ sind $p'(W)$ und $p''(W)$ topologische Bilder von $W$ also $W' := p'(W)$ und $W'' : p''(W)$ Bogen in $\mathfrak{P}$, wobei $W' \frown W'' = \emptyset$ und wobei für jede Parallele $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{A}$ gilt: $POW(W' \frown \tilde{\mathfrak{A}}) =$ $= POW(W'' \frown \tilde{\mathfrak{A}}) = 0$ oder $= 1$.

3.4.1.. Weil $POW(W, \mathfrak{k}^2)$ höchstens endlich ist (3.3.), gilt dies auch für $POW(W', \mathfrak{k}^1)$ und $POW(W'', \mathfrak{k}^1)$ (in $\mathfrak{P}$). Gemäß 3.2. gibt es daher einen konvexen Teilbogen $W'_1$ von $W'$, welchem dann eindeutig ein Teilbogen $W_1$ von $W$ entspricht. Auf $W''_1 := p''(W_1)$ läßt sich der gleiche Schluß anwenden, wie auf $W'$. Man gelangt so zu einem Teilbogen von $W$, den wir wieder mit $W$ bezeichnen, für den $C' := p'(W)$ und $C'' := p''(W)$ beide Konvexbogen (in $\mathfrak{P}$) sind.

3.4.2. Jeder Konvexbogen $C$ (in $\boldsymbol{R}^2$) besitzt in jedem Punkt genau eine vordere und eine hintere (1-)Paratingente, in den Endpunkten je nur eine hintere bzw. vordere (vgl. 3.1.); übrigens fallen diese in jedem Punkt bis auf abzählbar viele Ausnahmen zusammen, liefern also dort die (einzige) (1-)Paratingente, die zugleich Tangente an $C$ und Stützgerade an $C$ ist, welch letzteres auch für die einseitigen (1-)Paratingenten gilt (vgl. [1], 3.1.6.).

Die am Ende von 3.4.1. erklärten Konvexbogen $C'$, $C'' \subset \mathfrak{P}$ besitzen keine zu $\mathfrak{A}$ parallele Stützgeraden; denn anderenfalls gibt es zu $\mathfrak{A}$ parallele Sekanten $\mathfrak{A}^+$ mit $POW(C' \frown \mathfrak{A}^+) = 2$ usw., im Widerspruch zu $POW(C' \frown \mathfrak{A}^+) \leq 1$ usw. (vgl. 3.4.). O. B. d. A. können wir (vermöge Übergang zu einem abgeschlossenen Teilbogen von $W$) annehmen, daß weder $C'$ noch $C''$ eine zu $\mathfrak{A}$ parallele Paratingente besitzen. Ist speziell $x' = p'(x)$, $x'' = p''(x)$ für ein $x \in W$, so entsprechen z.B. $P_v(x', C')$ und $P_v(x'', C'')$ einander ein-eindeutig. Und da $P_v(x', C')$ und $P_v(x'', C'')$ nicht parallel zu $\mathfrak{A}$ sind, so ist die Schnittgerade der (Projektions-) Ebenen durch $P_v(x', C')$ und $e'$ bzw. durch $P_v(x'', C'')$ und $e''$ eine $P_v(x, W)$, und zwar die einzige. Entsprechend für $P_h(x, W)$. Wir erhalten so:

(I) Sind die Projektionen $C' = p'(W)$ und $C'' = p''(W)$ von $W$ in $\mathfrak{P}$ beide konvex, so existiert in jedem $x \in W$ (bei hinreichend kleinem $W$) sowohl die vordere als die hintere (1-)Paratingente (in den Endpunkten nur je eine) $P_v(x, W)$ bzw. $P_h(x, W)$. Außerdem gibt es eine abzählbare Teilmenge $A$ von $W$ derart, daß, für jedes $x \in W \setminus A$, $P(x, W) = P_v(x, W) = P_h(x, W)$ existiert.

(II) Stetigkeitseigenschaften der 1-Paratingenten an $W$ (im $\boldsymbol{R}^3$): Es sei $x \in W$ und $x = \lim {}_r x_r$, wobei alle $x_r \in W$ vor bzw. alle hinter $x$ liegen sollen; dann ist $P_v(x, W) = \lim {}_r \tilde{P}(x_r, W)$ bzw. $P_h(x, W) = \lim {}_r \tilde{P}(x_r, W)$, wobei $\tilde{P}(x_r, W)$ irgend eine, insbesondere vordere oder hintere, (1-)Paratingente bedeute. Speziell ist das auf $W \setminus A$ eindeutige $P(x, W)$ stetig auf $W \setminus$ A.

(III) Für alle $x \in W$ und alle (1-)Paratingenten $\tilde{P}(x, W)$, speziell also auch für alle vorderen bzw. hinteren (1-)Paratingenten, in $x$ an $W$ gilt $\tilde{P}(x, W) \frown (W \setminus \{x\}) = \emptyset$.

Denn dies gilt für die beiden (konvexen) Projektionen von $W$.

3.5. Gemäß 3.4. und 3.4.1. betrachten wir einen Bogen $W \subset \boldsymbol{R}^3$, welcher sich aus einem Punkt $e \in \boldsymbol{R}^3$ in eine Ebene $\mathfrak{P}$ topologisch als Konvexbogen $C$ projiziert; o. B. d. A. wird dabei $C$ (und damit $W$) so klein angenommen, daß die Halbtangenten in den Endpunkten von $C$ an $C$ sich in der (euklidischen) Ebene $\mathfrak{P}$ schneiden, sodaß $C$ in dem von der Verbindungsstrecke der beiden Endpunkte von $C$ und von Teilstrecken der Halbtangenten begrenzten Dreieck liegt. Da $W$ zwischen $\mathfrak{P}$ und der zu $\mathfrak{P}$ parallelen Ebene durch $e$ liegen sollte (vgl. 3.4.), liegt $W$ auf einem Teilbereich $E$ des Konvexkegelsektors $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(e, C)$ (vgl. 3.3.1.), wobei die Begrenzung von $E$ enthalten sein soll in den Mantellinien von $\mathfrak{K}$ durch die Endpunkte von $W$ und in den Schnitten von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{P}$ und dem Schnitt von $\mathfrak{K}$ mit einer zu $\mathfrak{P}$ parallelen Ebene $\mathfrak{P}'$ zwischen $W$ und $e$. Daher ist $E$ topologisches Bild einer abgeschlossenen Kreisscheibe. Außerdem bilden die Schnitte von $E$ mit den zu einer Umgebung von $e$ im $\boldsymbol{R}^3$ fremden Ebenen $H$ des $\boldsymbol{R}^3$ ein OCh-System $\mathfrak{k}$ in $E$ mit der Grundzahl $k = k(\mathfrak{k}) = 3$. Schließlich ist $W$ normal zu $\mathfrak{k}$, weil die Projektion eines jeden $K \in \mathfrak{k}$ aus $e$ in $W$ injektiv ist. Auch ist $POW(W, \mathfrak{k}_2) = POW(W, \mathfrak{k})$.

Daß die Durchschnitte $K = E \frown H$ evtl. in (höchstens) zwei (Konvex-)Bogen zerfallen, ist für die Ausführungen in 3.5.1. ff. ohne Belang; denn durch Hinzunahme eines Teilbogens $B$ der Begrenzung $E_g$ von $E$, wobei $B$ keine Strecke ist, läßt sich $K$ zu einem Bogen in $E$ ergänzen, dessen Endpunkte in $E_g$ liegen. (Dies folgt u. a. daraus, daß $H$ mit jeder Erzeugenden der Kegelfläche höchstens einen Punkt gemeinsam hat) (vgl. auch [1], 4.2.1.)

3.5.1. Von dem in 3.5 betrachteten Bogen $W \subset \boldsymbol{R}^3$ wird jetzt *zusätzlich* gefordert, daß an $W$ (im $\boldsymbol{R}^3$) in jedem $x \in W$ (*genau*) *eine Tangente* (also eine (1-)Paratingente) *existiert*, d. h. es sei $A = \emptyset$, vgl. 3.4.2.). Wir behaupten: Es ist $W$ in $E$ bezüglich $\mathfrak{k}$ ein $T$-Bogen (vgl. 1.2.3.). In der Tat: Ist $x \in W \frown K$ mit $K \in \mathfrak{k}$ und wird $W$ in $y \in W \setminus \{x\}$ von $K$ gestützt, so ist in der dem $K$ entsprechenden Ebene $H$ (also $K = E \frown H$) die Tangente an $W$ in $y$ (im $\boldsymbol{R}^3$) enthalten. Denn es gibt zu $H$ beliebig benachbarte $x$

enthaltende Ebenen $H''$, welche mit $W$ mindestens 2 zu $y$ beliebig benachbarte Punkte, etwa $u''$, $v'' \in W$, gemeinsam haben; läßt man $H''$ gegen $H$ konvergieren, so konvergiert die Verbindungsgerade (in $\boldsymbol{R}^3$) von $u''$ und $v''$ gegen die (1-)Paratingente $P(y, W)$, also gegen die Tangente in $y$ an $W$. Da aber gemäß 3.4.2., (III), $P(y, W) \cap (W \setminus \{y\}) = \emptyset$ ist, wird $H$ durch $x$ und $y$ eindeutig bestimmt und damit auch $K$ durch $x$ und den Stützpunkt $y$.

3.6. Aus 2.6., 3.5. und 3.5.1. folgt nun der in Aussicht genommene

**Satz.** *Die einzigen bezüglich des Systems $\mathfrak{k}^2$ der Ebenen des $\boldsymbol{R}^3$ ordnungshomogenen Bogen $B \subset \boldsymbol{R}^3$ von höchstens endlichem $POW(B, \mathfrak{k}^2)$, für welche überdies in jedem $x \in B$ eine Tangente an $B$ existiert, sind die $B$ von lokalen $POW$ 3.*

1. Anmerkung. Aus der Existenz der Tangente in $x \in B$ an $B$ folgt noch nicht die Existenz der Schmiegebene an $B$ in $x$, d. h. die Eindeutigkeit des Limes der Ebenen durch 3 beliebig gegen $x$ konvergierende Punkte von $B$.

2. Anmerkung. Im $\boldsymbol{R}^3$ gibt es ordnungshomogene Bogen $B$ der lokalen Ordnung Unendlich, derart daß $B$ in jedem Punkt genau eine Tangente besitzt.

## Literatur


[1] Kaupt-Künneth, Geometrische Ordnungen. Heidelberg-New York 1967.

[2] Haupt, Zur Differentialgeometrie der Kurven und Flächen. Journ. r. u. angew. Math. **169** (1933), 137–185.

[3] Haupt, Zum Verteilungssatz der Strukturtheorie reeller Gebilde. Monatsh. f. Math. u. Physik **46** (1937), 84–92.

[4] Haupt, Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen. Journ. r. u. angew. Math. **178** (1938), 14–28; und **180** (1939) 44–72.

[5] Haupt, Über die Existenz ordnungshomogener Bogen in der Ebene bezüglich vorgegebener Ordnungscharakteristiken, Bull. Soc. Royale Sci. Liège **30** (1961), 195–209.

[6] Haupt, Über ordnungshomogene Bogen im projektiven n-dimensionalen Raum bezüglich der Hyperebenen als Ordnungscharakteristiken. Bull. Soc. Royale Sci. **31** (1962), 321–333.

[7] Vgl. A. Köpke, Math. Ann. **34** (1889), 161–171, und Math. Ann. **35** (1890), 104–109. Weitere Literatur bei A. Schönfließ, Bericht über die Mengenlehre, Jahresber. d. d. Math. Ver. **8** (1900).