BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1977

MÜNCHEN 1978

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Affinzusammenhänge in symplektischen Räumen[1]

K. Buchner

Inhalt

Einleitung und Zusammenfassung 13
Voraussetzungen und Bezeichnungen 16
§ 1 Metrische symmetrische Zusammenhänge 16
§ 2 Halbmetrische symmetrische Zusammenhänge 23
§ 3 Der allgemeine Fall 26
Vergleich mit der Riemannschen und der Riemann-Cartanschen Geometrie 31
§ 4 Integrierbarkeit 32
4.1. Integrierbarkeit der Gleichung (3.1) 32
4.2 Symplektische Strukturen 35
§ 5 Singuläre Räume 38
§ 6 Anwendungen 43
6.1 Lösungen der Einstein-Strausschen Feldgleichungen 43
6.2 Spinordarstellungen der Lorentzgruppe 45
Literatur 48

Einleitung und Zusammenfassung

Ein symplektischer Raum ist eine n-dimensionale ($n \in \boldsymbol{N}$) reelle differenzierbare Mannigfaltigkeit M^n, in der ein antisymmetrisches, 2-fach kovariantes Tensorfeld k_{ij} definiert ist. k_{ij} wird häufig auch Metrik genannt.

Die Theorie dieser Räume fand in den letzten Jahren ein lebhaftes Interesse (siehe z. B. [1]–[6]), das zum Teil mit der Ent-

[1] Beim Fachbereich Mathematik der Technischen Universität München eingereichte Habilitationsschrift

wicklung des Cartanschen Differentialformenkalküls gekoppelt ist. Über die Affinzusammenhänge in diesen Räumen ist bisher jedoch nur wenig bekannt. Zu erwähnen sind lediglich einige Ergebnisse von G. Vranceanu [1], die in einer Reihe von Fällen die Existenz eines Affinzusammenhangs garantieren.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß zu jedem Tensorfeld k_{ij} mit vorgegebener kovarianter Ableitung $k_{ij|l}$ ein Affinzusammenhang existiert. Er ist allerdings nicht eindeutig bestimmt: Zu einem gegebenen Zusammenhang Γ^i_{kl} kann noch ein beliebiger Tensor T^i_{kl} addiert werden, der die Gleichung $k_{sj}\, T^s_{kl} - k_{sk}\, T^s_{jl} = 0$ erfüllt. Diese Unbestimmtheit ermöglicht es, Forderungen an die Gestalt des Krümmungstensors zu stellen. Außerdem werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines torsionsfreien Affinzusammenhangs angegeben.

In § 1 wird der Fall betrachtet, daß der Zusammenhang Γ^i_{kl} torsionsfrei und mit der Metrik verträglich ist (d. h. $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$; $k_{ij|l} = 0$). Es zeigt sich, daß die innere Geometrie der Mannigfaltigkeit M^n dann im wesentlichen durch einen einzigen Vektor l_i beschrieben wird. Die Metrik k_{ij} läßt sich in diesem Fall in der Form[1] $l_{[i,j]}$ darstellen, während in die Formel für den Affinzusammenhang auch die 2. Ableitung von l_i und eine beliebige, voll symmetrische Matrix A_{ikl} eingehen. Der Krümmungstensor besitzt nur eine Kontraktion, und diese kann zusammen mit l_i auf der gesamten Mannigfaltigkeit beliebig vorgegeben werden.

Man beachte den Unterschied dieser Ergebnisse in symplektischen Räumen zu den Verhältnissen in Riemannschen Räumen. In den Riemannschen Räumen sind die Christoffelsymbole ebenfalls symmetrisch und mit der Metrik verträglich und es existieren zu jeder Metrik $g_{ij} = g_{ji}$ die Christoffelsymbole eindeutig. In symplektischen Räumen gibt es dagegen einen Affinzusammenhang mit den genannten Eigenschaften nur, falls sich die Metrik in der Form $k_{ij} = l_{[i,j]}$ schreiben läßt. Ist diese Bedingung er-

---

[1] Runde Klammern bezeichnen den symmetrischen Teil, eckige den antisymmetrischen. Ein Komma vor einem Index bedeutet partielle Differentiation. Für kovariante Ableitungen wird ein senkrechter Strich verwendet.

füllt, existiert eine $\frac{1}{6}\, n(n+1)\,(n+2)$-parametrige Schar von Zusammenhängen.

In § 2 wird die allgemeine Lösung der halbmetrischen Gleichung

$$k_{ij,l} - \Gamma^s_{il}\, k_{sj} - \Gamma^s_{jl}\, k_{is} = k_{ij}\, \Phi_l;\ \Gamma^s_{(kl)} = \Gamma^s_{kl} \tag{0.1}$$

kurz diskutiert, wobei $\Phi_l \in T(M^n)$ ein beliebiges Vektorfeld ist. Es wird ein Lösbarkeitskriterium angegeben und gezeigt, daß Γ^i_{kl} und Φ_l durch k_{ij} und eine beliebige, voll symmetrische Matrix A_{ikl} festgelegt werden. Eine Ausnahme bilden die 2-dimensionalen symplektischen Räume, in denen (0.1) immer lösbar und Φ_l beliebig ist.

Der allgemeine Fall

$$k_{ij,l} - \Gamma^s_{il}\, k_{sj} - \Gamma^s_{jl}\, k_{is} = Q_{ijl}, \tag{0.2}$$

wobei $Q_{ijl} = -Q_{jil}$ ein beliebiges Tensorfeld ist, wird in § 3 behandelt. Hier kann k_{ij}, Q_{ijl} und $\Gamma^s_{(kl)}$, oder k_{ij}, Q_{ijl} und eine Kontraktion des Krümmungstensors frei gewählt werden. Einige dieser Ergebnisse lassen sich auf die Spinordarstellungen der Lorentzgruppe übertragen.

Die Integrierbarkeit der Gleichung (0.2) wird in § 4 untersucht. Dabei sind die 2-dimensionalen symplektischen Räume mit halbmetrischem Zusammenhang bemerkenswert, für die sich eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung ergibt. Anschließend wird gezeigt, daß zwar zu jedem Riemannschen, aber nicht zu jedem Riemann-Cartanschen[1] Raum eine symplektische Struktur[2] existiert. Dagegen läßt sich in jedem Riemann-Cartan-Raum die Riemannsche Metrik und die symplektische Struktur vorgeben, wenn die Torsion des Raumes geeignet gewählt wird.

Bei den bisher erwähnten Untersuchungen wurde vorausgesetzt, daß der Rang der Metrik k_{ij} maximal ist, was zur Folge hat, daß die Dimension n gerade ist. In § 5 werden alle Affinzusammenhänge mit singulärer Metrik angegeben. Ferner wird

---

[1] Ein Riemann-Cartanscher Raum ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Metrik und einem mit dieser Metrik verträglichen Zusammenhang, der nicht notwendig torsionsfrei ist [7].

[2] Eine symplektische Struktur ist eine nicht entartete alternierende 2-Form a mit $d \wedge a = 0$ [2], [4], [5].

gezeigt, daß eine singuläre Metrik reduzibel-singulär ist, falls ein Zusammenhang existiert, der die Gleichung (0.1) erfüllt.

Als Anwendungen werden im § 6 zwei Beiträge zur Einsteinschen Einheitlichen Feldtheorie bzw. zur Einstein-Schrödinger-Geometrie gegeben: Die Ergebnisse des § 1 ermöglichen es, alle antisymmetrischen Metriken anzugeben, die Lösungen der Einstein-Strausschen Feldgleichungen sind. Außerdem werden die torsionsfreien Lösungen diskutiert. Eine Fortsetzung dieser Untersuchungen läßt weitere interessante Ergebnisse erwarten.

Im zweiten Teil des § 6 wird gezeigt, daß bei den Spinordarstellungen der Lorentzgruppe das Argument des metrischen Spinors beliebig wählbar ist. Das gilt auch für Spinorfelder auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, so daß die Existenz einer Abelschen Yang-Mills-Gruppe folgt.

Voraussetzungen und Bezeichnungen

Sei M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \boldsymbol{N}$. Auf ihr sei ein antisymmetrisches Tensorfeld k_{ij} gegeben. Mit Ausnahme von § 5 und § 6 wird Rang $(k_{ij}) = n$ für alle Punkte $p \in M^n$ vorausgesetzt. Dann existiert das inverse Tensorfeld k^{ij}

$$k_{si}\, k^{sj} = k_{is}\, k^{js} = \delta_i^j.$$

Für die Metrik k_{ij} wird die bei Spinoren übliche Konvention [8] verwendet, wonach Indizes durch Kontraktion mit dem 1. Index von k_{si} gesenkt und durch Kontraktion mit dem 2. Index von k^{is} gehoben werden, z. B.

$$A_i = k_{si} A^s; \qquad A^k = k^{ks}\, A_s.$$

Soweit nicht ausdrücklich etwas anderes vorausgesetzt wird, sind M^n und k_{ij} aus C^3. Man beachte jedoch, daß für die Lösung von (0.1) und (0.2) die Differenzierbarkeit von k_{ij} ausreicht.

§ 1. Metrische symmetrische Zusammenhänge

In diesem Paragraphen werden differenzierbare Mannigfaltigkeiten M^n untersucht, auf denen der Zusammenhang Γ^s_{kl} mit der Metrik verträglich ist: $k_{ij|l} = 0$. Dann ist die kovariante Ab-

leitung mit dem Heben und Senken der Indizes vertauschbar und es entstehen zahlreiche Vereinfachungen im Kalkül. Die Bedingung $k_{ij|l} = 0$ bedeutet keine Einschränkung, da zu jedem Affinzusammenhang eine Schar von metrischen Affinzusammenhängen existiert (siehe Gleichung (3.4) und Satz 3.2). Wird jedoch wie in der Riemannschen Geometrie zusätzlich Torsionsfreiheit gefordert:

$$k_{ij|l} = k_{ij,l} - \Gamma^s_{il}\, k_{sj} - \Gamma^s_{jl}\, k_{is} = 0; \qquad \Gamma^s_{kl} = \Gamma^s_{lk}, \tag{1.1}$$

so ergeben sich Bedingungen für k_{ij} und Γ^s_{kl}; (1.1) läßt sich in k_{ij} und Γ^s_{kl} vollständig lösen:

Satz 1.1

Die vollständige Lösung von (1.1) lautet:

$$\Gamma^i_{kl} = k^{ti}\,(l_{t,k,l} + A_{tkl}), \tag{1.2}$$

wobei k_{ij} die Gleichung

$$k_{ij} = l_{i,j} - l_{j,i} \tag{1.3}$$

erfüllt; l_i ist ein beliebiges C^2-Vektorfeld und A_{ikl} ein beliebiges voll symmetrisches Matrizenfeld.

Beweis

1. Vertauscht man in (1.1) i, k und l zyklisch und addiert die so entstehenden Gleichungen, ergibt sich

$$k_{ik,l} + k_{li,k} + k_{kl,i} = 0.$$

Hieraus folgt (1.3).[1]

2. Eine spezielle Lösung von (1.1) ist

$$\Gamma^i_{kl} = k^{ti}\, l_{t,k,l},$$

wie man leicht nachrechnet. Es muß also nur noch die allgemeine Lösung $\overline{\Gamma}^i_{kl}$ der homogenen Gleichung

$$\overline{\Gamma}^s_{il}\, k_{sj} + \overline{\Gamma}^s_{jl}\, k_{is} = 0 \tag{1.4}$$

gefunden werden.

3. Statt (1.4) betrachten wir die einfachere Gleichung

[1] Für kontrahierbare Mannigfaltigkeiten M folgt (1.3) auch unmittelbar aus dem Lemma von Poincaré. Ein etwas allgemeiner Beweis wurde von Vranceanu ([1] S. 142) gegeben. Vgl. Abschn. 4.2 dieser Arbeit.

$$M_i^s\, k_{sj} - M_j^s\, k_{si} = 0. \tag{1.5}$$

Der Koeffizient von M_r^s in der durch das Indexpaar i, j gekennzeichneten Zeile dieses Gleichungssystems ist

$$\delta_i^r\, k_{sj} - \delta_j^r\, k_{si}.$$

Wegen der Antisymmetrie in i und j ist der Rang seiner Koeffizientenmatrix höchstens $n(n-1)/2$. Zur Untersuchung der linearen Unabhängigkeit betrachtet man:

$$\sum_{\substack{i,j \\ i>j}} \alpha_{ij} (\delta_i^r\, k_{sj} - \delta_j^r k_{si}) = 0.$$

Hier muß $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ gesetzt werden; daher vereinfacht sich diese Beziehung zu:

$$\sum_j \alpha_{rj}\, k_{sj} = 0.$$

Weil der Rang von k_{ij} maximal ist, folgt $\alpha_{ij} = 0$ und damit die Unabhängigkeit der $n(n-1)/2$ Gleichungen von (1.5).

4. Das System hat also $n(n+1)/2$ unabhängige Lösungen. Es läßt sich leicht nachrechnen, daß sie sich in der Form $M_i^s = P_{it}\, k^{ts}$ darstellen lassen, wobei P_{it} eine beliebige symmetrische Matrix ist. Die allgemeine Lösung von (1.4) ergibt sich somit als

$$\overline{\Gamma}_{il}^s = A_{ilt}\, k^{ts}; \qquad A_{ilt} = A_{(ilt)}.$$

W. Z. Z. W.

In Satz 1.1 wurde nur $l_i \in C^2$ verlangt. Man beachte jedoch, daß im Abschnitt „Voraussetzungen und Bezeichnungen" $k_{ij} \in C^3$ gefordert wurde (siehe § 4).

Wegen der vollständigen Symmetrie der Matrix A_{ikl} verschwindet ihr Beitrag zu

$$\Gamma_{(sk)}^s = (ln \sqrt{|\det k_{lm}|})_{,k}.$$

Damit erhält man das

Korollar

Sei V^i ein differenzierbarer Vektor und $B^{ik\ldots l}$ ein differenzierbarer Tensor, der vollständig antisymmetrisch ist. Dann sind die kovarianten Divergenzen $V^s{}_{|s}$ und $B^{ik\ldots s}{}_{|s}$ unabhängig von A_{lmn}.

Das Verhalten von A_{ikl} bei Koordinatentransformationen ist recht kompliziert. Nach Voraussetzung ist l_i ein C^2-Vektorfeld; es genügt also der Transformationsformel $l_{i'} = T^i_{i'}\, l_i$. Nimmt man an, daß $T^i_{i'}$ eine holonome Transformation beschreibt, d. h. daß $T^i_{i',l'} = T^i_{l',i'}$ gilt, so ergibt sich aus (1.2) und dem bekannten Transformationsgesetz für Affintzusammenhänge:

$$A_{i'k'l'} = T^i_{i'}\, T^k_{k'}\, T^l_{l'}\, A_{ikl} - T^k_{k'}\, T^i_{i',l'}\, l_{i,k} - T^i_{i'}\, T^k_{k',l'}\, l_{k,i} - T^l_{l'}\, T^k_{k',i'}\, l_{k,l} - T^k_{k',i',l'}\, l_k. \tag{1.6}$$

Bei holonomen Transformationen bleibt also die Symmetrie von A_{ikl} erhalten. Damit ist gezeigt, daß (1.2) unabhängig vom gewählten Koordinatensystem gilt. (Zum Vergleich: In der Riemannschen Geometrie bleibt die Symmetrie der Christoffelsymbole bei holonomen Transformationen ebenfalls erhalten; es existieren jedoch Koordinatentransformationen, die die Symmetrie zerstören.)

Als nächstes berechnen wir den Krümmungstensor $R^i{}_{klm}$

$$R^i{}_{klm} = \Gamma^i_{km,l} - \Gamma^i_{kl,m} + \Gamma^i_{sl}\,\Gamma^s_{km} - \Gamma^i_{sm}\,\Gamma^s_{kl}.$$

Dafür ist es zweckmäßig, ein Koordinatensystem zu wählen, bezüglich dessen alle Γ^i_{kl} in einem vorgegebenen Punkt p verschwinden. Dann gilt in p:

$$R^i{}_{klm} = \Gamma^i_{km,l} - \Gamma^i_{kl,m} = k^{ti}\,(A_{tkm,l} - A_{tkl,m}). \tag{1.7}$$

Hieraus sieht man sofort, daß R_{iklm} symmetrisch in i und k ist. Diese Symmetrie ist äquivalent zur Integrabilitätsbedingung von (1.1). Aus (1.7) erhält man außerdem

$$R^s{}_{slm} = 0.$$

Die beiden anderen Kontraktionen des Krümmungstensors ergeben sich zu

$$R_{kl} := R^s{}_{kls} = -k^{ts} A_{tkl,s} = R_{lk}$$
$$S_{ik} := k_{ri}\, R^r{}_{kab}\, k^{ab} = (-A_{ikb,a} + A_{ika,b})\, k^{ab} = -2\, R_{ik}.$$

Damit haben wir das wichtige Ergebnis erhalten, daß alle Kontraktionen des Krümmungstensors zueinander proportional sind. Wegen der Symmetrie von R_{ik} verschwindet auch der Krümmungsskalar:

$$R := k^{ij}\, R_{ij} = 0.$$

Die Beziehung

$$R^i{}_{klm} + R^i{}_{mkl} + R^i{}_{lmk} = 0$$

braucht nicht eigens bewiesen zu werden; sie gilt für beliebige symmetrische Affinzusammenhänge ([9], S. 55). Dasselbe trifft für die Bianchi-Identitäten zu. In Riemannschen Räumen konstruiert man aus der Kontraktion dieser Identitäten den Einsteintensor, dessen kovariante Divergenz verschwindet. Ein analoges Verfahren ist bei symplektischen Räumen nicht möglich, da es nur auf den Nulltensor führt.

Wir fassen zusammen:

Satz 1.2

Sei $\Gamma^i_{kl} \in C^2$. Dann besitzt der Krümmungstensor folgende Eigenschaften:

$$R_{iklm} = R_{kilm} \tag{1.8}$$

$$R^i{}_{klm} + R^i{}_{mkl} + R^i{}_{lmk} = 0 \tag{1.9}$$

$$R_{iklm} - R_{lmik} = R_{ilkm} - R_{kmil} \tag{1.10}$$

$$R^i{}_{klm|p} + R^i{}_{kpl|m} + R^i{}_{kmp|l} = 0 \tag{1.11}$$

$$R^s{}_{slm} = 0 \tag{1.12}$$

$$R_{kl} := R^s{}_{kls} = R_{lk} \tag{1.13}$$

$$S_{ik} := R_{ikab}\, k^{ab} = -2\, R_{ik}. \tag{1.14}$$

Der Beweis von (1.10) ergibt sich durch wiederholte Anwendung von (1.8) und (1.9) oder durch direktes Ausrechnen mit Hilfe von (1.7).

Bei vorgegebenem k_{ij} kann nach Satz 1.1 noch die Matrix A_{lmn} beliebig gewählt werden. Dabei stellt sich die Frage, ob es möglich ist, zusätzlich zu k_{ij} auch die Kontraktion R_{kl} des Krümmungstensors vorzugeben und A_{mnp} so zu bestimmen, daß (1.1) erfüllt ist.

Satz 1.3

Sei $M^n \in C^\omega$. Ferner seien l_i und R_{jk} beliebig vorgegebene Funktionen der Koordinaten, die in einer Umgebung U eines Punktes p analytisch sind. Dann existieren in einer Umgebung V von p ($V \subset M^n$) analytische Funktionen $A_{lmn} = A_{(lmn)}$ mit der Eigenschaft, daß der zum Zusammenhang

$$\Gamma^i_{kl} = k^{ti}(l_{t,k,l} + A_{tkl})$$

gehörige Ricci-Tensor gleich R_{jk} ist.

Beweis

Es ist das System partieller Differentialgleichungen für A_{lmn} zu lösen, das sich durch Gleichsetzen von

$$R_{kl} = \Gamma^s_{ks,l} - \Gamma^s_{kl,s} + \Gamma^s_{kt}\,\Gamma^t_{sl} - \Gamma^s_{kl}\,\Gamma^t_{st}$$

mit den vorgegebenen Funktionen R_{kl} ergibt. Aus (1.2) folgt:

$$\begin{aligned} R_{kl} = &- k^{ts}\,A_{tkl,s} + k^{ts}{}_{,l}\,l_{t,k,s} \\ &- k^{ts}{}_{,s}\,(l_{t,k,l} + A_{tkl}) + k^{ta}(l_{t,b,l} + A_{tbl}) \\ &\cdot k^{sb}\,(l_{s,k,a} + A_{ska}) - k^{ta}\,(l_{t,k,l} + A_{tkl}) \\ &\cdot k^{sb}\,l_{s,a,b}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Nun wählt man statt x^1 die Variable[1]

$$y := x^1 - x^2 - \ldots - x^n.$$

Dann ist der Koeffizient von $A_{abc,d}$ in der durch das Indexpaar k, l gekennzeichneten Gleichung des Systems (1.15)

$$-\delta^{(b}_k\,\delta^c_l \sum_{d=1}^{n} k^{a)d}.$$

Da Rang $(k^{ij}) = n$ ist, folgt

$$\sum_{d=1}^{n} k^{ad} \neq 0$$

für mindestens ein a. Somit sind die $n(n+1)/2$ verschiedenen Gleichungen (1.15) für $A_{abc,d}$ linear unabhängig. A_{abc} hat wegen seiner Symmetrie $n(n+1)(n+2)/6$ Komponenten. Ergänzt man das System (1.15) noch durch beliebige weitere Gleichungen, so daß die entstehende Koeffizientenmatrix von $A_{abc,d}$ den maximalen Rang hat und die Symmetrie von A_{abc} nicht gestört wird, dann ist der sogenannte Satz von Kowalewski [10] anwendbar und Satz 1.3 bewiesen.

w. z. z. w.

Durch die Vorgabe des C^2-Vektorfeldes l_i und des Ricci-Tensors R_{ik} wird also der auf M^n bestehende Zusammenhang nicht

[1] Die Einführung der Variablen y läßt sich umgehen, wenn man Rang $(k_{ij}) = n$ beachtet; vgl. den Beweis von Satz 3.4.

eindeutig bestimmt. So können auf der Hyperfläche $x^1 = \text{konst}$ noch beliebige Funktionen $\varphi_{abc} = \varphi_{(abc)}$, die in U analytisch sind, als Anfangswerte von $k_{s(i}\Gamma^s_{kl)}$ vorgegeben werden. Außerdem ermöglichen die im Beweis erwähnten $(n^3 - n)/6$ Differentialgleichungen, deren Bestehen noch zusätzlich gefordert werden kann, eine weitere Willkür in der Bestimmung der Affinzusammenhänge Γ^i_{kl}.

Zum Abschluß dieses Paragraphen sei bemerkt, daß sich stets ein Koordinatensystem finden läßt, in dem k_{ij} die kanonische Gestalt annimmt, d. h. alle k_{ij} sind $= 0$, außer $k_{12} = k_{34} = \ldots = k_{n-1\,n} = 1 = -k_{21} = \ldots = -k_{n\,n-1}$. Der Beweis dieser Eigenschaft wird mit Hilfe von (1.1) geführt ([1], S. 143). In einem solchen Koordinatensystem gilt $l_{i,k,l} = 0$. Daraus folgt

Satz 1.4

Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M^n \in C^2$ existiert ein Affinzusammenhang, der (1.1) erfüllt, der einen nicht verschwindenden Krümmungstensor zur Folge hat und $n - 1$ linear unabhängige parallele Vektorfelder gestattet.[1]

Beweis

Nach Formel (1.2) gilt in einem Koordinatensystem mit $l_{i,k,l} = 0$

$$\Gamma^i_{kl} = k^{ti} A_{tkl}.$$

Wählt man etwa A_{ikl} so, daß nur $A_{111} = A_{111}(x^2)$ ungleich Null ist, so sind die einzigen nicht-verschwindenden Komponenten von R_{iklm}:

$$R_{1112} = -R_{1121}.$$

Also gibt es $n - 1$ linear unabhängige Vektorfelder V^s, die die Gleichung

$$V^s R_{islm} = 0 \tag{1.16}$$

erfüllen. Diese Felder können konstant, d. h. unabhängig von x^j, gewählt werden. Ebenso gilt

---

[1] Bei diesem Satz handelt es sich offensichtlich um eine lokale Aussage.

$$V^s{}_{|p} = 0 \text{ und } V^s R_{islm|p} = 0.$$

Hieraus folgt die Behauptung [9], [11].

w. z. z. w.

Für beliebige, affin zusammenhängende Räume der Dimension n kann es höchstens $n - 1$ linear unabhängige parallele Vektorfelder geben, ohne daß $R^i{}_{klm}$ identisch verschwindet (vgl. (1.16)). Diese Maximalzahl wird in unserem Fall tatsächlich erreicht.

§ 2. Halbmetrische symmetrische Zusammenhänge

Halbmetrische (oder rekurrente) Zusammenhänge wurden zuerst von H. Weyl [12] in Verallgemeinerung der Riemannschen Räume eingeführt. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß die kovariante Ableitung der Metrik k_{ij} proportional zu k_{ij} ist:

$$k_{ij|l} = k_{ij} \Phi_l.$$

Hierfür ist eine einfache geometrische Deutung möglich (vgl. [13], [14] für Räume mit symmetrischer Metrik): Seien zwei Vektoren v^i und w^i entlang einer beliebigen C^1-Kurve parallelverschoben. Ist der Zusammenhang halbmetrisch, so ist das Differential der Invariante $I := v^i k_{ik} w^k$ proportional zu I. Umgekehrt folgt aus dieser Proportionalität bei beliebigen C^1-Kurven, daß der Zusammenhang halbmetrisch ist.

Halbmetrische symplektische Räume spielen auch in den Anwendungen eine Rolle. Dies gilt besonders für die Spinordarstellungen der Lorentzgruppe, auf die sich viele Eigenschaften symplektischer Räume übertragen lassen (siehe § 3). In der physikalischen Interpretation beschreibt der Vektor Φ_l gewöhnlich das elektromagnetische Feld.

Wir wollen uns in diesem Paragraphen auf symmetrische Zusammenhänge beschränken, da der allgemeine Fall leicht durch Spezialisierung der Ergebnisse des § 3 behandelt werden kann:

$$k_{ij,l} - \Gamma^s_{il} k_{sj} - \Gamma^s_{jl} k_{is} = k_{ij} \Phi_l; \qquad \Gamma^s_{(il)} = \Gamma^s_{il}. \tag{2.1}$$

Bevor wir die allgemeine Lösung dieser Gleichung angeben, beweisen wir

Hilfssatz 2.1

Es gilt:

$$(n-2)\,\Phi_l = k_{rs,\,l}\,k^{rs} + 2\,k_{lr,\,s}\,k^{rs}. \tag{2.2}$$

Beweis

Durch Überschieben von (2.1) mit k^{jl} entsteht:

$$k_{lr,\,s}\,k^{rs} + \Gamma^s_{ls} = -\,\Phi_l.$$

Ebenso durch Überschieben mit k^{ij}:

$$k_{ij,\,l}\,k^{ij} - 2\,\Gamma^s_{sl} = n\,\Phi_l;$$

(2.2) ist eine Linearkombination dieser Gleichungen.

w. z. z. w.

Satz 2.2

Für die Lösbarkeit von (2.1) nach Γ^i_{kl} ist die Bedingung

$$k_{ik,\,l} + k_{li,\,k} + k_{kl,\,i} = k_{ik}\,\Phi_l + k_{li}\,\Phi_k + k_{kl}\,\Phi_i \tag{2.3}$$

notwendig und hinreichend. Die allgemeine Lösung lautet:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{3}\,k^{ti}(k_{tk,\,l} + k_{tl,\,k}) - \frac{1}{3}\,(\delta^i_k\,\Phi_l + \delta^i_l\,\Phi_k) + k^{ti}\,A_{tkl}. \tag{2.4}$$

A_{ikl} ist eine beliebige voll symmetrische Matrix. Für $n > 2$ wird Φ_l durch (2.2) bestimmt; für $n = 2$ ist Φ_l ein frei wählbares Vektorfeld.

Beweis

1. Vertauscht man in (2.1) die Indizes i, j und l zyklisch und addiert die so entstehenden Gleichungen, erhält man (2.3). Somit ist diese Gleichung notwendig.

2. Eine spezielle Lösung von (2.1) ist:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{3}\,k^{ti}\,(k_{tk,\,l} + k_{tl,\,k}) - \frac{1}{3}\,(\delta^i_k\,\Phi_l + \delta^i_l\,\Phi_k),$$

wie man unter Verwendung von (2.3) leicht bestätigt. Da der homogene Teil von (2.1) identisch mit dem von (1.1) ist, lassen sich die Überlegungen zum Beweis von Satz 1.1 übertragen. Damit ist gezeigt, daß (2.3) hinreichend ist und (2.4) die allgemeine Lösung darstellt.

3. (2.2) entsteht aus (2.3) durch Überschieben mit k^{ik}. Ist $n = 2$, so ist die letztere Gleichung identisch erfüllt. Es läßt sich also keine Bedingung für Φ_l ableiten.

w. z. z. w.

Im zweidimensionalen Fall ist nach Satz 2.2 sowohl k_{ij} als auch Φ_l ohne Einschränkung wählbar. Die Gleichung (2.4) führt daher auf das folgende

Korollar

In einem zweidimensionalen symplektischen Raum, in dem (2.1) gilt, sind die Geodätischen unabhängig von Φ_l.

Zum Beweis erinnert man sich lediglich, daß die allgemeinste Transformation eines symmetrischen Affinzusammenhangs, die die Geodätischen ungeändert läßt, von der Form

$$\Gamma^i_{kl} \to \Gamma^i_{kl} + \delta^i_k \Psi_l + \delta^i_l \Psi_k$$

ist.

Man beachte, daß nicht-holonome Koordinatentransformationen existieren, unter denen (2.3) nicht form-invariant ist. Nach dem Satz von Ehresmann und Libermann [1] existiert für alle Metriken k_{ij}, die (2.1) genügen, ein Koordinatensystem, in dem

$$k_{ij,l} = k_{ij} \Phi_l \tag{2.5}$$

gilt. Damit ist (2.3) identisch erfüllt; zu beachten bleibt nur die Integrabilitätsbedingung von (2.5)

$$\Phi_{l,m} = \Phi_{m,l}.$$

Ist $\overset{\circ}{k}_{ij} = -\overset{\circ}{k}_{ij}$ ein beliebiger konstanter Tensor vom Rang n, so lautet die Lösung von (2.5)

$$k_{ij} = \overset{\circ}{k}_{ij} e^{\Psi}; \qquad \Phi_l = \Psi_{,l}.$$

Aus (2.4) erhält man

$$\Gamma^i_{kl} = k^{ti} A_{tkl}. \tag{2.6}$$

Daraus folgt, daß die kovariante Ableitung von k_{ij} gleich der gewöhnlichen ist.

Die Gleichung (2.6) ist ein Spezialfall von (1.2).

Daher gilt

Satz 2.3

Erfüllt ein Affinzusammenhang die Gleichung (2.1), so gelten für ihn die Sätze 1.2, 1.3 und 1.4.

§ 3. Der allgemeine Fall

In den beiden vorausgehenden Paragraphen wurden symmetrische Affinzusammenhänge vorausgesetzt, die mit der Metrik k_{ij} verträglich bzw. halbmetrisch sind. Läßt man diese Beschränkungen fallen, erhält man die Gleichung

$$k_{ij,l} - \Gamma^s_{il}\, k_{sj} - \Gamma^s_{jl}\, k_{is} = Q_{ijl}, \tag{3.1}$$

in der Q_{ijl} ein beliebiges, in i und j antisymmetrisches Tensorfeld ist. Im folgenden sei Q_{ijl} aus der Klasse C^2; für die Sätze 3.1 bis 3.3 sind jedoch keine Differenzierbarkeitsvoraussetzungen nötig.

Offensichtlich können in (3.1) die Metrik und der Affinzusammenhang beliebig vorgegeben werden. In § 4 wird die Frage diskutiert, welchen Einschränkungen die Felder Γ^s_{il} und Q_{ijl} unterliegen, wenn (3.1) nach k_{ij} auflösbar sein soll. Zunächst untersuchen wir jedoch die weitere Möglichkeit, Γ^i_{kl} als Funktion von k_{ij}, $k_{ij,l}$ und Q_{ijl} anzugeben.

Satz 3.1

In (3.1) sind k_{ik}, Q_{ikl} und $\Gamma^i_{(kl)}$ beliebig wählbar. Der Torsionstensor $S^i_{kl} := \Gamma^i_{[kl]}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} S^i_{kl} = {} & \frac{1}{2}\, k^{is}\,(k_{kl,s} - k_{sk,l} - k_{ls,k} - Q_{kls} + Q_{skl} + Q_{lsk}) \\ & - k^{is}\,(\Gamma^t_{(ks)}\, k_{tl} + \Gamma^t_{(ls)}\, k_{kt}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Beweis

In (3.1) seien die Gleichungen durch das Index-Tripel i, j, l gekennzeichnet, wobei i und j immer antisymmetrisch auftreten. Das System (3.1) hat also $n^2(n-1)/2$ Gleichungen. Der Koeffizient von Γ^a_{bc} in der i,j,l-ten Gkeichung ist $2\,k_{a[i}\,\delta^b_{j]}\,\delta^c_l$. Da k_{ij} den maximalen Rang n hat, sind also die Gleichungen (3.1) linear unabhängig.

Daher existieren $n^2(n+1)/2$ unabhängige Lösungen. Daß diese sich in der Form (3.2) schreiben lassen, bestätigt man leicht durch Einsetzen in (3.1).

w. z. z. w.

Satz 3.2

Die Lösungen der Gleichung (3.1) lassen sich in der Form

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} k^{ti} (k_{tk,l} - Q_{tkl}) + A^i{}_{kl} \tag{3.3}$$

darstellen, wobei A_{ikl} eine beliebige in den ersten beiden Indizes symmetrische Matrix ist.

Beweis

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} k^{ti} (k_{tk,l} - Q_{tkl})$$

ist eine spezielle Lösung von (3.1). Ferner ist $A^i{}_{kl} = A^i_{kl}$ eine Lösung des homogenen Gleichungssystems (vgl. Beweis zu Satz 1.1). Diese Matrix hat $n^2(n+1)/2$ unabhängige Komponenten. Dies ist aber nach Satz 3.1 die Zahl der unabhängigen Lösungen von (3.1).

w. z. z. w.

Formel (3.3) hat gegenüber (3.2) den Vorteil, daß sie auch für die Spinordarstellungen der Lorentzgruppe (Weyl-Spinoren) gilt. Hier läßt sich eine zu (3.1) analoge Gleichung anschreiben, bei der lediglich zu beachten ist, daß sich die Indizes i, j und s nicht auf die Koordinaten der Mannigfaltigkeit, sondern auf den Spinorraum beziehen. Da in (3.3) die verschiedenen Arten von Indizes nicht vermischt werden, ist diese Formel auf Spinorräume anwendbar.[1]

Korollar

Durch die Vorgabe von k_{ij} und Q_{ijl} werden weder die Parallelverschiebung noch die Geodätischen eindeutig bestimmt. Bei der Transformation $Q_{ijl} \to Q_{ijl} + k_{ij}\Phi_l$ ändert sich der Affinzusammenhang derart, daß parallele Richtungen in parallele Richtungen übergehen.

---

[1] Ein Spezialfall der Formel (3.3) wurde in [8], Gleichung I.8.109, für Spinorräume bewiesen.

Zum Beweis beachtet man lediglich, daß der für die Geodätischen maßgebliche symmetrische Teil von Γ^i_{kl} nach Satz 3.1 frei wählbar ist; $\Gamma^i_{(kl)}$ beeinflußt auch die Parallelverschiebung.

Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus Satz 3.2, wenn man berücksichtigt, daß die allgemeinste Transformation von Γ^i_{kl}, die den Parallelismus erhält, von der Form

$$\Gamma^i_{kl} \to \Gamma^i_{kl} + \delta^i_k a_l.$$

ist [9], [15].

Die zweite Aussage des Korollars läßt sich auch ohne Verwendung von Satz 3.2 beweisen:

Erfüllt der Zusammenhang Γ^i_{kl} die Gleichung (3.1), so ist

$$\Delta^i_{kl} := \Gamma^i_{kl} + \frac{1}{2} k^{li} Q_{lkl} \tag{3.4}$$

mit der Metrik verträglich. Daraus folgt wieder

$$\Delta^i_{kl} \to \Delta^i_{kl} + \frac{1}{2} \delta^i_k \Phi_l.$$

w. z. z. w.

Bemerkungen:

1. Bei halbmetrischen Räumen besagt dieses Korollar, daß die Parallelverschiebung entlang einer gegebenen Kurve unabhängig vom Proportionalitätsvektor Φ_l ist.

2. Aus den Sätzen 3.1 und 3.2 lassen sich keine speziellen Eigenschaften des Krümmungstensors folgern, da der Affinzusammenhang in keiner Weise mit der Metrik k_{ij} verbunden ist. Es gelten also nur die Beziehungen für den Krümmungstensor, die sich ganz allgemein in affin zusammenhängenden Räumen ableiten lassen (siehe z. B. [9]).

Satz 3.3

Für die Existenz eines symmetrischen Affinzusammenhanges Δ^i_{kl}, der (3.1) erfüllt, ist die Bedingung

$$k_{[ik,l]} = Q_{[ikl]}$$

notwendig und hinreichend. Ist sie erfüllt, so ergibt sich die allgemeine symmetrische Lösung von (3.1) zu

$$\Delta^i_{kl} = \frac{1}{3} k^{ti} (k_{tk,l} + k_{tl,k} - Q_{tkl} - Q_{tlk}) + A^i_{kl},$$

wobei A_{ikl} eine voll symmetrische Matrix ist.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Beweis von Satz 2.2. Hier kann wieder die Frage gestellt werden, welche Kontraktionen des Krümmungstensors gleichzeitig mit k_{ij} und Q_{klm} vorgegeben werden können:

Satz 3.4

Sei $M^n \in C^\omega$. Ferner seien die Komponenten von k_{ij}, Q_{ijl} und einem der folgenden Tensoren

$$R_{(lm)} := R^s{}_{(lm)s}$$
$$(R_{lrsm} + R_{mrsl})\, k^{rs}$$
$$R_{(lm)rs}\, k^{rs}$$
$$T_{(lm)}$$
$$(T_{lrsm} + T_{mrsl})\, k^{rs}$$
$$T_{(lm)rs}\, k^{rs}$$

beliebige vorgegebene Funktionen der Koordinaten, die in einer Umgebung U eines Punktes $p (U \subset M^n)$ analytisch sind. $T^i{}_{klm}$ ist der aus $\Gamma^i_{(kl)}$ gebildete Krümmungstensor. Dann existieren in einer Umgebung V von p $(V \subset M^n)$ analytische Funktionen Γ^i_{kl}, die (3.1) erfüllen. Der mit diesen Γ^i_{kl} gebildete Krümmungstensor besitzt als Komponenten die oben vorgegebenen Funktionen.

Beweis

Der Beweis wird wie in Satz 1.3 mit Hilfe des „Satzes von Kowalewski" geführt. Als ausgezeichnete Variable kann jede beliebige Koordinate x^z dienen, da alle Kontraktionen des Krümmungstensors, die in diesem Satz aufgelistet sind, Terme der Bauart $A_{skl,t}\, k^{st}$ enthalten. Wegen Rang $(k^{st}) = n$ kommt also die Ableitung nach x^z mindestens einmal vor. Somit bleibt nur noch zu zeigen, daß die – gegebenenfalls erweiterten – Gleichungssysteme jeweils nach $A_{abc,z}$ auflösbar sind.

1. $R_{(lm)}$ und $(R_{lrsm} + R_{mrsl})\, k^{rs}$

Nach Formel (3.3) enthält R_{lm} die Ableitungen von A_{abc} in der Kombination

$$(A_{rls,m} - A_{rlm,s})\, k^{sr},$$

während $R_{lrsm}\, k^{rs}$ den Term

$$-(A_{lrm,\,s} - A_{lrs,\,m})\, k^{sr}$$

besitzt. Wegen der Symmetrie $A_{abc} = A_{bac}$ handelt es sich hierbei also um äquivalente Probleme. Der Koeffizient von $A_{abc,\,z}$ ist

$$-\delta^{(b}_{l}\, k^{a)c}\, \delta^{z}_{m} + \delta^{(b}_{l}\, k^{a)z}\, \delta^{c}_{m}.$$

Überschieben mit k^{ml} ergibt

$$-k^{z(b}\, k^{a)c} + k^{c(b}\, k^{a)z} = 0;$$

d. h. der in l und m antisymmetrische Teil des Gleichungssystems ist linear abhängig. Für den symmetrischen Teil setzen wir an

$$\sum_{l,\,m} \alpha^{lm} \left[\delta^{(b}_{l} k^{a)c}\, \delta^{z}_{m} - \delta^{(b}_{l}\, k^{a)z}\, \delta^{c}_{m} \right] = 0$$

und zeigen, daß für $\alpha^{lm} = \alpha^{ml}$ folgt: $\alpha^{lm} = 0$.

a) $a = b = z$ und $k^{cz} \neq 0 \Rightarrow \alpha^{zz} = 0$

b) Sei $a = z$, $k^{bz} \neq 0$

b$_1$) $k^{zc} = 0 \Rightarrow \alpha^{zc} = 0$

b$_2$) $k^{zc} \neq 0$:Sei $b = c \Rightarrow \alpha^{zc} = 0$

c) $a = b$, $k^{az} \neq 0$, $\alpha^{ac} = 0$

d) Sei a so bestimmt, daß $k^{az} = 0$ (falls es ein solches a gibt)

Sei $k^{bz} \neq 0 \Rightarrow \alpha^{ac} = 0$.

Damit ist die lineare Unabhängigkeit gezeigt.

2. $R_{(lm)rs}\, k^{rs}$

$R_{lmrs} k^{rs}$ enthält als Koeffizienten von $A_{abc,\,z}$:

$$2\, \delta^{(a}_{l}\, \delta^{b)}_{m}\, k^{zc}.$$

Beschränkt man sich daher auf den symmetrischen Teil $R_{(lm)rs}\, k^{rs}$, so sind die Gleichungen für $A_{abc,\,z}$ linear unabhängig.

3. $T_{(lm)}$

In T_{lm} ist der Koeffizient von $A_{abc,\,z}$:

$$-k^{a(c}\, \delta^{b)}_{l}\, \delta^{z}_{m} + k^{az}\, \delta^{(b}_{l}\, \delta^{c)}_{m}.$$

Man betrachtet wieder

$$\sum_{l,\,m} \alpha^{lm} \left[k^{a(c}\, \delta^{b)}_{l}\, \delta^{z}_{m} - k^{az}\, \delta^{(b}_{l}\, \delta^{c)}_{m} \right] = 0; \tag{3·5}$$

a) $a = b = z, \qquad k^{zc} \neq 0 \Rightarrow \alpha^{zz} = 0$
b$_1$) $a = z, \quad b = c, \; k^{zb} \neq 0 \Rightarrow \alpha^{bz} = 0$
b$_2$) $a = z, \quad k^{zb} = 0, \; k^{zc} \neq 0 \Rightarrow \alpha^{bz} = 0.$

Damit liefert nur noch der zweite Summand in der Klammer von (3.5) einen Beitrag. Wegen der Symmetrie dieses Terms in b und c läßt sich nur $\alpha^{(lm)} = 0$ zeigen. Es liefert also nur der symmetrische Teil von T_{lm} unabhängige Gleichungen für $A_{abc,z}$. Außer $T_{(lm)}$ ist jedoch noch $T_{[zm]}$ frei wählbar.

4. $(T_{lrsm} + T_{mrsl})\, k^{rs}$ und $T_{(lm)rs}\, k^{rs}$

Der einzige Term von $T_{lrsm}\, k^{rs}$ mit Ableitungen von A_{abc} ist

$$-A_{l(rm),s}\, k^{rs}.$$

Der entsprechende Ausdruck in $T_{lmrs} k^{rs}$ unterscheidet sich hiervon nur um einen Zahlenfaktor.

Die Unabhängigkeit der Koeffizienten ist offensichtlich.

W. Z. Z. W.

In Satz 3.4 treten die Tensoren $R^s{}_{slm}$ und $T^s{}_{slm}$ nicht auf, denn für $R^s{}_{slm}$ erhält man aus (3.3) oder aus (4.1)

$$R^s{}_{slm} = \frac{1}{2}\,(Q^s{}_{sm,l} - Q^s{}_{sl,m})$$

und für $T^s{}_{slm}$ ergibt eine kurze Rechnung (siehe [9], S. 9)

$$T^s{}_{slm} = 2\, T^s{}_{[mls]} = \Theta^s{}_{sm,l} - \Theta^s{}_{sl,m},$$

so daß bei der Wahl von $T^s{}_{slm}$ die Bianchi-Identitäten als Integrationsbedingungen für $\Theta^i_{kl} := \Gamma^i_{(kl)}$ berücksichtigt werden müssen.

Vergleich mit der Riemannschen und der Riemann–Cartanschen Geometrie

Setzt man in (3.1) $Q_{ijl} = 0$, so wird man an die metrische Grundgleichung der Riemann-Cartanschen Geometrie erinnert. Diese unterscheidet sich von (3.1) nur dadurch, daß die Metrik symmetrisch ist. So ist es nicht verwunderlich, daß es hier ein Analogon zu unserem Satz 3.1 gibt: In der Riemann-Cartan-Geometrie kann der *anti*symmetrische Teil S^i_{kl} des Affinzusammenhanges beliebig vorgegeben werden.[1]

[1] Bei Schrödinger [16] enthalten die Formeln 9.8 und 9.10 Druckfehler. Die allgemeine Formel für $Q_{ijl} \neq 0$ findet man in [8], I.7.32 und in [7].

$$\Gamma^i_{kl} = \left\{ {i \atop kl} \right\} - g^{is} g_{kt} S^t_{sl} - g^{is} g_{lt} S^t_{sk} + S^i_{kl} \tag{3.6}$$

Hier ist $\left\{ {i \atop kl} \right\}$ das Christoffelsymbol. Die Unterschiede zwischen beiden Geometrien werden deutlicher, wenn man sich auf symmetrische Zusammenhänge bschränkt. Während zu jeder Riemannschen Metrik genau ein symmetrischer Zusammenhang existiert, der mit der Metrik verträglich ist, muß in symplektischen Räumen die Bedingung

$$k_{[ij,l]} = 0$$

erfüllt sein (siehe Satz 3.3 oder den Beweis zu Satz 1.1). Außerdem wird der Zusammenhang durch die Metrik nicht eindeutig bestimmt; vielmehr kann eine voll symmetrische Matrix A^i_{jl} addiert werden. Der Grund hierfür liegt darin, daß der in Γ^i_{kl} homogene Teil von Gleichung (1.1) und i in j antisymmetrisch ist. Um ein analoges Beispiel in der Riemann-Cartanschen Geometrie zu konstruieren, hat man $\Gamma^i_{(kl)} = 0$ zu fordern:[1]

$$g_{ij,l} - S^s_{il} g_{sj} - S^s_{jl} g_{is} = 0; \qquad g_{ij} = g_{ji} \tag{3.7}$$

Hieraus ergibt sich für die Metrik g_{ij} die Bedingung

$$g_{(ij,l)} = 0.$$

Außerdem wird S^i_{kl} durch (3.7) nicht eindeutig bestimmt; ist S^i_{kl} eine Lösung dieser Gleichung, dann auch

$$S^i_{kl} + g^{it} B_{tkl},$$

wenn B_{tkl} ein voll antisymmetrischer Tensor ist.

§ 4. Integrierbarkeit

IV. 1 Integrierbarkeit der Gleichung (3.1)

In diesem Abschnitt werden einige Integrabilitätskriterien für die Gleichung (3.1) gegeben. Dabei wird stets Rang $(k_{ij}) = n$ vorausgesetzt. Den zweidimensionalen Räumen wird wegen ihrer Bedeutung für die Anwendungen besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

---

[1] (3.7) hängt natürlich vom gewählten Koordinatensystem ab. Eine Verallgemeinerung dieser Gleichung wurde in [17] studiert.

Einige der folgenden Ergebnisse lassen sich im Differentialformenkalkül eleganter beweisen. Um eine einheitliche Darstellung zu bewahren, wird jedoch weiterhin die Tensorschreibweise benützt.

Für die folgenden Überlegungen benötigt man

Satz 4.1

Die Integrabilitätsbedingung $k_{ij,l,m} = k_{ij,m,l}$ *ist äquivalent mit*

$$R_{iklm} - R_{kilm} = Q_{ikm|l} - Q_{ikl|m} + 2\, S^s_{ml}\, Q_{iks}. \tag{4.1}$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich durch einfaches Ausrechnen mit Hilfe von Gleichung (3.1).

Als nächstes beweisen wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrierbarkeit von (3.1) in Räumen mit rekurrenter Krümmung. Das sind symplektische Räume, in denen ein Vektorfeld a_p existiert, so daß

$$R^i_{klm|p} = R^i_{klm}\, a_p \tag{4.2}$$

gilt. Die geometrischen Konsequenzen dieser Gleichung wurden in einer Reihe von Arbeiten diskutiert [18], bei denen allerdings zum Teil die Existenz eines symmetrischen metrischen Tensors vorausgesetzt wird. Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung eines Integrabilitätskriteriums von Moór [19] bei Zugrundelegung metrischer Zusammenhänge.

Satz 4.2

In einem symplektischen Raum mit rekurrenter Krümmung und mit einem halbmetrischen Zusammenhang ist die Lösbarkeit von[1]

$$R_{iklm} - R_{kilm} = k_{ik}\,(\Phi_{m,l} - \Phi_{l,m}) \tag{4.3}$$

nach k_{ik} *notwendig und hinreichend für die Integrierbarkeit der Gleichung (3.1).*

Beweis

Für halbmetrische Zusammenhänge geht (4.1) in (4.3) über. Daher ist (4.3) notwendig. Damit (4.3) hinreichend ist, darf die-

[1] Φ_l ist der Proportionalitätsvektor, der durch $k_{ij|l} = k_{ij}\,\Phi_l$ definiert ist; vgl. (2.1).

jenige Gleichung, die aus (4.3) durch kovariante Differentiation entsteht, keine neue Bedingung für k_{ik} enthalten ([9], S. 78).

Überschiebt man (4.3) mit k^{ik} und differenziert anschließend kovariant, so folgt mit Hilfe von (4.3)

$$(\Phi_{m,l} - \Phi_{l,m})_{|p} = (\Phi_{m,l} - \Phi_{l,m})\, a_p.$$

Damit ist gezeigt, daß durch kovariante Differentiation von (4.3) auf beiden Seiten lediglich der Faktor $a_p + \Phi_p$ erzeugt wird.

w. z. z. w.

Das System (4.3) besitzt mehr Gleichungen als Unbekannte, wenn die Dimension $n > 2$ ist. In diesem Fall existiert also eine Lösung nur, falls die Gleichungen linear abhängig sind. Für $n = 2$ läßt sich der obige Satz noch verallgemeinern:

Satz 4.3

In einem zweidimensionalen symplektischen Raum mit halbmetrischem Zusammenhang ist die Bedingung

$$\Gamma^s_{s2,1} - \Gamma^s_{s1,2} = \Phi_{1,2} - \Phi_{2,1} \tag{4.4}$$

notwendig und hinreichend für die Integrierbarkeit der Gleichung (3.1). k_{12} kann in genau einem beliebigen Punkt von M^n vorgegeben werden.

Beweis

Für $n = 2$ reduziert sich die linke Seite von (4.1) bzw. (4.3) auf

$$R_{1212} - R_{2112} = -k_{12}\,(\Gamma^s_{s2,1} - \Gamma^s_{s1,2}) \tag{4.5}$$

Da $k_{12} = -k_{21}$ die einzige nicht-verschwindende Komponente von k_{ij} ist, folgt aus (4.3) die Behauptung.

w. z. z. w.

Um bei der Behandlung der Integrabilität unübersichtliche Formeln zu vermeiden, wird im folgenden verlangt, daß Q_{ijl} unabhängig von k_{pq} ist.

Satz 4.4

Sei ein zweidimensionaler symplektischer Raum gegeben, in dem Q_{ijl} unabhängig von k_{pq} ist und in dem

$$\Gamma^s_{s1,2} - \Gamma^s_{s2,1} \neq 0 \quad \textit{oder} \quad \Gamma^s_{s1,2} - \Gamma^s_{s2,1} \equiv 0$$

gilt. Dann ist für die Integrierbarkeit von (3.1) notwendig und hinreichend, daß die Gleichungen

$$k_{12}(\Gamma^s_{s2,1} - \Gamma^s_{s1,2}) = Q_{212,1} - Q_{211,2} - \\ - Q_{212}\Gamma^s_{s1} + Q_{211}\Gamma^s_{s2} \tag{4.6}$$

und

$$k_{12}(\Gamma^s_{s2,1,k} - \Gamma^s_{s1,2,k}) = Q_{212,1,k} - Q_{211,2,k} - (Q_{212}\Gamma^s_{s1})_{,k} \\ + (Q_{211}\Gamma^s_{s2})_{,k} - Q_{12k}(\Gamma^s_{s2,1} - \Gamma^s_{s1,2}) - \\ - \Gamma^s_{sk}(Q_{212,1} - Q_{211,2} - Q_{212}\Gamma^s_{s1} + Q_{211}\Gamma^s_{s2}) \tag{4.7}$$

simultan nach k_{12} auflösbar sind.

Beweis

(4.6) läßt sich aus (4.1) und (4.5) ableiten, wenn man beachtet, daß wegen der Antisymmetrie von Q_{ijl} gilt: $Q_{iil} = 0$. (4.7) entsteht aus (4.6) durch Differentiation unter Verwendung von (3.1) und (4.6). Daß (4.6) und (4.7) auch hinreichend sind, folgt aus dem im Beweis zu Satz 4.2 bereits zitierten Satz von Eisenhart und Veblen ([9], S. 78).

w. z. z. w.

Alle Sätze dieses Abschnitts lassen sich auf Darstellungen der Lorentzgruppe mit Spin $\frac{1}{2}$ anwenden, wie man aus dem Argument im Anschluß an Satz 3.2 leicht ersehen kann. Allerdings ist zu beachten, daß in den Sätzen 4.3 und 4.4 diejenigen Indizes, die sich auf die Koordinaten der Mannigfaltigkeit beziehen, die Werte $1, \ldots, n$ durchlaufen müssen. Z. B. entsteht aus (4.4):

$$\Gamma^A_{Al,m} - \Gamma^A_{Am,l} = \Phi_{m,l} - \Phi_{l,m}.$$

($A = 1, 2$ ist ein Spinorindex, während sich $l, m = 1, \ldots, n$ auf M^n beziehen.) Diese Gleichung ist seit langem als *notwendige* Bedingung für die Integrierbarkeit des metrischen Spinors bekannt (siehe z. B. [8], I. 8. 107).

IV. 2 Symplektische Strukturen

Bei der Diskussion von Untermannigfaltigkeiten tritt häufig die folgende Frage auf: Existiert zu einem gegebenen Riemann-

schen bzw. Riemann-Cartanschen Raum eine symplektische Struktur? Für Riemannsche Räume läßt sich diese Frage leicht beantworten (vgl. hierzu auch [1], S. 142). Definitionsgemäß ist eine symplektische Struktur eine geschlossene 2-Form

$$a := k_{ij}\,\varphi^i \wedge \varphi^j = 2\,k_{ij}\,\varphi^i\,\varphi^j$$

mit det $k_{ij} \neq 0$, wobei $\{\varphi^i\}$ die zur betrachteten Basis $\{e_i\}$ duale Basis ist.[1] Für die äußere Ableitung erhält man aus den Cartanschen Strukturformeln:

$$\begin{aligned} d \wedge \mathrm{a} &= k_{ij,l}\,\varphi^i \wedge \varphi^j \wedge \varphi^l + k_{ij}(\varphi^l \wedge \omega^i_l + \tau^i) \wedge \varphi^j \\ &\quad - k_{ij}\,\varphi^i \wedge (\varphi^l \wedge \omega^j_l + \tau^j) \\ &= k_{ij,l}\,\varphi^i \wedge \varphi^j \wedge \varphi^l + k_{sj}\,\Gamma^s_{ml}\,\varphi^l \wedge \varphi^m \wedge \varphi^j \\ &\quad - k_{is}\,\Gamma^s_{ml}\,\varphi^i \wedge \varphi^l \wedge \varphi^m \end{aligned} \tag{4.8}$$

In den Riemannschen Räumen ist der Zusammenhang symmetrisch; daher liefern die Terme mit Γ^i_{kl} keinen Beitrag. Ferner ist a geschlossen. Somit reduziert sich (4.8) auf die Gleichung

$$k_{[ij,l]} = 0,$$

die die Lösungen

$$k_{ij} = l_{i,j} - l_{j,i}; \quad l_i \in C^2$$

besitzt. In diese Konstruktion der symplektischen Struktur gehen die Christoffelsymbole nicht ein. Folglich gibt es zu jedem Riemannschen Raum gerader Dimension eine Schar symplektischer Strukturen mit n beliebigen C^2-Funktionen.

Schwieriger ist die Frage nach der Existenz von symplektischen Strukturen in Riemannschen Räumen zu beantworten, wenn man noch zusätzlich

$$k_{ij|l} = 0$$

fordert (vgl. § 1). Die Integrabilitätsbedingung lautet hier (siehe (4.1)):

$$k_{si}\,R^s{}_{klm} - k_{sk}\,R^s{}_{ilm} = 0, \tag{4.9}$$

wobei $R^i{}_{klm}$ der aus den Christoffelsymbolen gebildete Krümmungstensor ist. In einem Riemannschen Raum existiert also

---

[1] Es gelte: $[e_i, e_j] = 0$.

eine präsymplektische Struktur [5] (d. h. eine 2-Form mit $k_{ij|l} = 0$, $k_{ij} = -k_{ji} \in C^2$) höchstens dann, wenn (4.9) eine Lösung $k_{ij} = -k_{ji}$ besitzt. Für die Existenz einer symplektischen Struktur ist notwendig, daß diese Lösung $\det k_{ij} \neq 0$ erfüllt.

Im Gegensatz zum Riemannschen Raum gestattet nicht jeder Riemann-Cartan-Raum eine symplektische Struktur. Da hier die Metrik lediglich die Christoffelsymbole bestimmt, nicht aber die Torsion des Raumes (vgl. (3.6)), stellt sich die Frage, ob man eine Riemannsche Metrik und eine symplektische Struktur gleichzeitig vorgeben kann. Der folgende Satz erweitert diese Fragestellung auf fast-symplektische Strukturen a, die durch $d \wedge a = b$ – mit alternierender 3-Form b – und $\det k_{ij} \neq 0$ gekennzeichnet sind (siehe (4.8)).

Satz 4.5

In einem Riemann-Cartan-Raum mit gerader Dimension können

1. *die Riemannsche Metrik* $g_{ij} = g_{ji} \in C^1$,
2. *eine differenzierbare fast-symplektische Struktur* a *und*
3. *die Ableitung* $d \wedge a$

vorgegeben werden. Hierdurch wird der Zusammenhang (3.6) des Raumes nicht eindeutig bestimmt; es gilt:

$$S^i_{kl} = \frac{1}{2} k^{li} (k_{[lk,l]} - Q_{[lkl]} + B_{lkl}), \tag{4.10}$$

wobei $\mathrm{a} = k_{ij} \varphi^i \wedge \varphi^j$ *und* φ^i *eine Kobasis zur gewählten Koordinatenbasis ist. Außerdem ist*

$$d \wedge \mathrm{a} = Q_{ikl} \varphi^i \wedge \varphi^k \wedge \varphi^l,$$

B_{ikl} *eine Matrix mit* $B_{[ikl]} = 0$ *und* $B_{ikl} = -B_{ilk}$.

Beweis

Um aus Gleichung (4.8) eine Beziehung zwischen k_{ij} und Γ^s_{kl} abzuleiten, müssen die Koeffizienten von $\varphi^i \wedge \varphi^j \wedge \varphi^l$ antisymmetrisiert werden:

$$\begin{aligned} & k_{ij,l} \varphi^i \wedge \varphi^j \wedge \varphi^l + \Big[\frac{1}{3} (k_{sj} S^s_{ml} + k_{sm} S^s_{lj} + k_{sl} S^s_{jm}) \\ & - \frac{1}{3} (k_{js} S^s_{ml} + k_{ms} S^s_{lj} + k_{ls} S^s_{jm}) \Big] \varphi^j \wedge \varphi^l \wedge \varphi^m \\ & = Q_{[ijl]} \varphi^i \wedge \varphi^j \wedge \varphi^l \end{aligned}$$

Hieraus folgt (4.10). Der Zusammenhang Γ^i_{kl} des Riemann-Cartanschen Raumes wird aus dieser Gleichung mit (3.6) gebildet.

W. Z. Z. W.

Korollar

Ein kontrahierbarer Riemann-Cartan-Raum gestattet eine symplektische Struktur genau dann, wenn die Gleichung

$$d \wedge (k_{it} S^t_{kl} \varphi^i \wedge \varphi^k \wedge \varphi^l) = 0$$

eine Lösung $k_{ti} = - k_{it}$ *besitzt.*

Der Beweis ergibt sich aus (4.10) mit Hilfe des Poincaréschen Lemmas, da hier $Q_{[ikl]} = 0$ ist.

Aus dem Korollar folgt, daß 2- und 4-dimensionale kontrahierbare Riemann-Cartan-Räume stets symplektische Strukturen gestatten. Das lineare System

$$k_{t[i} S^t_{kl]} = 0$$

besitzt nämlich $\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$ Gleichungen für $\frac{1}{2} n(n-1)$ Unbekannte.

§ 5. Singuläre Räume

In den bisherigen Überlegungen wurde stets vorausgesetzt, daß der Rang der Matrix (k_{ij}) maximal ist. In diesem Abschnitt wird die vollständige Lösung der Gleichung (3.1) angegeben, wobei jedoch Rang $(k_{ij}) = r < n$ ist. Für die Indizes werden folgende Bereiche zugelassen:

$$\begin{aligned} 1 &\leq a, b, \ldots, h \leq r, \\ r+1 &\leq A, B, \ldots, H, \leq n, \\ 1 &\leq i, j, \ldots, z \leq n. \end{aligned}$$

Die neu einzuführenden Vektor- und Tensorfelder werden in Definition 5.1 erklärt.

Definition 5.1

$a^i_{(A)}$ *seien* $n - r$ *linear unabhängige Vektoren, für die* $k_{ij} a^i_{(A)} = 0$ *gilt.*

$a^i_{(a)}$ *seien r Vektoren, die zusammen mit* $a^i_{(A)}$ $(r + 1 \leq A \leq n)$ *eine Basis des Tangentialraums bilden.*

$b_{(j)i}$ *bezeichnet die zu* $a^k_{(l)}$ *duale Basis.*

Die Tensorfelder c^{ik} *und* d^i_k *werden definiert durch:*

$$c^{si} k_{sk} a^k_{(a)} = a^i_{(a)},$$

$$c^{ki} b_{(A)k} = 0,$$

$$d^i_k := \delta^i_k - c^{si} k_{sk} = \sum_{A=r+1}^{n} a^i_{(A)} b_{(A)k}.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt

Satz 5.1

Hat k_{ij} *in einem Punkt p den Rang* $r < n$, *so ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit von (3.1) nach* Γ^i_{kl}:

$$d^s_i d^t_k (k_{st,l} - Q_{stl}) = 0. \tag{5.1}$$

Die allgemeine Lösung läßt sich darstellen als

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} (Q_{stl} - k_{st,l}) c^{is} (\delta^t_k + d^t_k) + B^i_{kl}, \tag{5.2}$$

wobei die Matrix B^i_{kl} *der Bedingung*

$$B^s_{il} k_{sk} = B^s_{kl} k_{si} \tag{5.3}$$

genügt.

Beweis

Mit dem Projektionsoperator

$$f^i_k := c^{si} k_{sk} = \delta^i_k - d^i_k \tag{5.4}$$

läßt sich (3.1) in der Form

$$(d^i_x + f^i_x) \; (d^k_y + f^k_y) \; (k_{ik,l} - \Gamma^s_{il} k_{sk} - \Gamma^s_{kl} k_{is} - Q_{ikl}) = 0$$

schreiben. Die ersten beiden Klammern liefern Produkte der Operatoren d^j_z und f^j_z, die auf verschiedene Unterräume projizieren. Daher kann diese Gleichung in die folgenden Gleichungen aufgespalten werden, von denen jede für sich erfüllt sein muß:

1. Die Gleichungen

$$d^i_x d^k_y (k_{ik,l} - \Gamma^s_{il} k_{sk} - \Gamma^s_{kl} k_{is} - Q_{ikl}) = 0.$$

Wegen $d^t_x k_{ts} = 0$ verschwindet der in Γ^i_{kl} homogene Teil dieser Gleichungen, so daß man (5.1) als notwendige Bedingung erhält.

2. Die Gleichungen

$$f^i_x\, d^k_y\, (k_{ik,l} - \Gamma^s_{il}\, k_{sk} - \Gamma^s_{kl}\, k_{is} - Q_{ikl}) = 0$$

Der homogene Teil dieses Systems besteht nur aus

$$-f^i_x\, d^k_y\, k_{is}\, \Gamma^s_{kl}.$$

Daraus folgt, daß $r(n-r)\,n$ Gleichungen linear unabhängig sind und daß der homogene Teil dieser Gleichungen maximalen Rang besitzt.

3. Die Gleichungen

$$f^i_x\, f^k_y\, (k_{ik,l} - \Gamma^s_{il}\, k_{sk} - \Gamma^s_{kl}\, k_{is} - Q_{ikl}) = 0$$

f^r_s projiziert auf einen r-dimensionalen Unterraum, in dem k_{ij} maximalen Rang besitzt. Nach dem Beweis zu Satz 1.1 kann man also folgern, daß der homogene Teil dieses Systems linear unabhängig ist, wenn man die Antisymmetrie in x und y beachtet. Es handelt sich also um $n \cdot r \cdot (r-1)/2$ Gleichungen.

Da aus 2. und 3. keine weiteren Bedingungen für die Lösbarkeit des Gleichungssystems folgen, ist (5.1) auch hinreichend. Mit Hilfe von (5.4) und (5.1) läßt sich zeigen, daß (3.1) durch (5.2) identisch erfüllt wird. Es bleibt also zu beweisen, daß dies alle Lösungen sind:

Da die unter 1. aufgeführten Terme nur triviale Gleichungen liefern, erhält man aus 2. und 3. für die n^3 Kompenenten von Γ^i_{kl} $n^3 - r(n-r)\,n - r(r-1)\,n/2$ linear unabhängige Lösungen. Betrachtet man andererseits die Gleichung (5.3), so folgen aus

$$f^i_x\, f^k_y\, (B^s_{il}\, k_{sk} - B^s_{kl}\, k_{si}) = 0$$

$r(r-1)\,n/2$ Bedingungen, während

$$f^i_x\, d^k_y\, (B^s_{il}\, k_{sk} - B^s_{kl}\, k_{si}) = -f^i_x\, d^k_y\, B^s_{kl}\, k_{si} = 0$$

$r(n-r)\,n$ Gleichungen beinhaltet. Also hat B^i_{kl} die geforderte Zahl unabhängiger Komponenten.

w. z. z. w.

Die Bedingung (5.1) enthält den Term $k_{st,l}$, der kein Tensor ist. Trotzdem ist sie invariant gegen Koordinatentransformationen. Man braucht nur zu beachten, daß bei einer Transformation

$$k_{ik} \to k_{i'k'} = T^i_{i'}\, T^k_{k'}\, k_{ik}$$

die nicht-tensoriellen Terme von (5.1)

$$d^{s'}_{i'}\, d^{t'}_{k'}\, (T^s_{s',l'}\, T^t_{t'} + T^s_{s'}\, T^t_{t',l'})\, k_{st}$$

sind, die wegen $d^{t'}_{k'}\, T^t_{t'}\, k_{st} = 0$ verschwinden.

In Riemannschen Räumen heißt eine singuläre Metrik *reduzibel-singulär*, wenn es ein Koordinatensystem gibt, so daß sie im betrachteten Gebiet des Raumes die Gestalt

$$g_{ij} = \begin{Vmatrix} g_{ab} & o \\ o & o \end{Vmatrix}; \quad |g_{ab}| \neq 0; \quad a, b = 1, \ldots r$$

besitzt. Die Metrik heißt *absolut reduzibel*, wenn ein Koordinatensystem angegeben werden kann, in dem sie die obige Gestalt annimmt und außerdem $g_{ab,A} = 0$ gilt. Wir wollen diese Begriffe (siehe z. B. [20]) für die symplektischen Räume übernehmen.

Satz 5.2

Auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^n habe die Metrik k_{ij} den konstanten Rang $r < n$. Ist k_{ij} reduzibel-singulär, so muß gelten

$$(Q_{ist} + \Gamma^r_{st}\, k_{ir})\ (a^s_{(A)}\, a^t_{(B)} - a^s_{(B)}\, a^t_{(A)}) = 0 \tag{5.5}$$

Ist diese Bedingung identisch in den $a^i_{(C)}$ erfüllt, so ist sie auch hinreichend dafür, daß die Metrik k_{ij} reduzibel -singulär ist.

Beweis

Eine singuläre Metrik ist genau dann reduzibel-singulär, wenn es n Vektoren $a^i_{(k)}$ $(k = 1, \ldots n)$ gibt, die eine holonome Koordinatentransformation $x^i \to y^i$ vermitteln, d. h. wenn

$$a^i_{(k)} = \frac{\partial x_i}{\partial y_k}$$

gilt. Es genügt, die Integrabilitätsbedingungen für die $n - r$ Vektoren $a^i_{(A)}$ nachzuweisen, die durch die Bedingung

$$k_{tk}\, a^t_{(A)} = 0$$

definiert wurden. Hieraus folgt:

$$k_{tk}\, a^t_{(A),l} = -\, k_{tk,l}\, a^t_{(A)}.$$

Die übrigen Komponenten von $a^{i}_{(A),l}$, für die $k_{tk} a^{t}_{(A),l} = 0$ gilt, dürfen willkürlich gleich Null gesetzt werden, da sie nur eine Transformation der $a^{i}_{(A)}$ in dem von ihnen aufgespannten Teilraum erzeugen. Auch die Vektoren $a^{i}_{(a)}$ sind nicht eindeutig bestimmt: Sie müssen lediglich linear unabhängig von den Vektoren $a^{i}_{(A)}$ sein. Dies läßt sich in einer Umgebung des betrachteten Punktes stets erreichen, wenn die Ableitungen von $a^{i}_{(a)}$ beliebig vorgegeben werden, also auch wenn

$$a^{i}_{(a),l} a^{l}_{(A)} = a^{i}_{(A),l} a^{l}_{(a)}$$

gefordert wird. Damit reduzieren sich die Integrabilitätsbedingungen

$$\begin{aligned} a^{i}_{(A),l} a^{l}_{(j)} &= a^{i}_{(j),l} a^{l}_{(A)} \text{ auf} \\ 0 &= k_{tk} (a^{t}_{(A),l} a^{l}_{(B)} - a^{t}_{(B),l} a^{l}_{(A)}) \\ &= -(Q_{tkl} + \Gamma^{s}_{tl} k_{sk} + \Gamma^{s}_{kl} k_{ts}) \; (a^{t}_{(A)} a^{l}_{(B)} - a^{t}_{(B)} a^{l}_{(A)}). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Definition 5.1 folgt hieraus (5.5).

w. z. z. w.

Es sei nun ein symmetrischer Affinzusammenhang gegeben, der mit der Metrik k_{ij} verträglich ist. Dann ist nach Satz 5.2 k_{ij} reduzibel-singulär. Wir nehmen an, daß $k_{iA} = 0$ für $A = r + 1, \ldots, n$ gilt. Aus

$$k_{aA,l} = 0 = \Gamma^{s}_{al} k_{sA} + \Gamma^{s}_{Al} k_{as}$$

folgt dann $\Gamma^{a}_{Al} = 0$, da Rang $(k_{ij}) = r$ gilt. Damit erhält man aber auch

$$k_{ab,A} = \Gamma^{s}_{aA} k_{sb} + \Gamma^{s}_{bA} k_{as} = 0,$$

d. h. k_{ij} ist absolut reduzibel.

Korollar[1])

Sei k_{ij} eine Metrik von konstantem Rang $r < n$. Dann gilt:

1. *Ist ein symmetrischer Zusammenhang mit der Metrik verträglich, so ist dieser absolut reduzibel.*

---

[1] G. Vranceanu hat gezeigt ([1], S. 143), daß eine Metrik absolut reduzibel ist, wenn ihre äußere Ableitung verschwindet. Sein Beweis ist ebenfalls nur für symmetrische Zusammenhänge gültig. (Vgl. auch Abschnitt IV.2 dieser Arbeit.)

2. *Exitsiert zu k_{ij} ein halbmetrischer symmetrischer Zusammenhang, so ist k_{ij} reduzibel-singulär.*

Man beachte, daß Satz 5.2 und dieses Korollar ebenso für symmetrische Metriken gelten, also z. B. auch für Riemannsche Räume.[1] Trotzdem ergibt sich ein wesentlicher Unterschied: W. O. Vogel [20] hat gezeigt, daß es in einem singulären Riemannschen Raum dann und nur dann einen symmetrischen metrischen Zusammenhang gibt, wenn die Metrik absolut reduzibel ist. In symplektischen Räumen existiert dagegen nach Satz 3.3 zu einer absolut reduziblen Metrik nicht immer ein symmetrischer Affinzusammenhang.

§ 6. Anwendungen

VI. 1 Lösungen der Einstein-Strausschen Feldgleichungen

Im Jahre 1945 beschrieb A. Einstein [21] eine Geometrie, in der weder der metrische Tensor, noch der Affinzusammenhang symmetrisch ist. Im Vergleich zur Riemannschen Geometrie sind dadurch zusätzliche Freiheitsgrade vorhanden, die eine geometrische Beschreibung des elektromagnetischen Feldes ermöglichen sollten.

Es sei eine n-dimensionale ($n \in \boldsymbol{N}$) differenzierbare C^4-Mannigfaltigkeit M^n gegeben. Auf ihr sei ein Tensorfeld $g_{ij} \in C^3$ definiert, das als der metrische Tensor der Einstein-Schrödinger-Geometrie bezeichnet werde. Einstein und Strauß fordern die folgenden Feldgleichungen:

$$g_{ij,l} - \Gamma^s_{il}\, g_{sj} - \Gamma^s_{lj}\, g_{is} = 0 \tag{6.1 a}$$

$$\Gamma^s_{[is]} = 0 \tag{6.1 b}$$

$$R_{(ij)} = 0 \tag{6.1 c}$$

$$R_{[ij,l]} = 0 \tag{6.1 d}$$

Dabei wird der Affinzusammenhang Γ^i_{kl} durch (6.1 a) i. a. eindeutig bestimmt.[2]

---

[1] Ist jedoch k_{ij} weder symmetrisch noch antisymmetrisch, kommen zu (5.5) noch weitere Bedingungen hinzu, denn außer $k_{is}\, a^s_{(A)} = 0$ muß noch $a^s_{(A)}\, k_{si} = 0$ gefordert werden.

[2] Die Eindeutigkeit folgt aus den beiden Bedingungen $\det(g_{ij}) \cdot \det(g_{(ij)}) \neq 0$ und $\det(g_{ij}) \neq 2 \det(g_{(ij)})$. Siehe [22] und [23].

Die physikalische Interpretation dieser Gleichung ist noch unklar [22], [24].[1] Ihr Studium ist aber vom geometrischen Standpunkt aus interessant, denn (6.1 a) stellt eine Verallgemeinerung der Riemann-Cartanschen Räume dar.

Bisher wurden zahlreiche exakte Lösungen der Gleichungen (6.1) gefunden. Die meisten davon sind jedoch entweder sphärisch symmetrisch [26]–[35], wellenförmig [36]–[47] oder eben symmetrisch [48]–[51]. Ausnahmen hiervon findet man lediglich in [52] und [17]. Die Ergebnisse der Paragraphen 1, 4 und 5 gestatten aber, noch weitere Lösungen anzugeben, die keine Symmetrieeigenschaften besitzen.

Satz 6.1

Die Lösungen der Feldgleichungen (6.1) mit einem antisymmetrischen Tensor g_{ij} vom Rang n sind:

$$g_{ij} = l_{i,j} - l_{j,i}, \tag{6.2}$$

wobei l_i ein beliebiges C^4-Vektorfeld ist. Der Torsionstensor $S_{ikl} := g_{ti}\, S^t_{kl}$ ist voll antisymmetrisch; für $n \leq 4$ gilt: $S_{ikl} = 0$.

Beweis

Der in i und j antisymmetrische Teil von (6.1 a) ist

$$g_{ij,l} - \Gamma^s_{(il)}\, g_{sj} - \Gamma^s_{(lj)}\, g_{is} = 0.$$

Diese Gleichung ist äquivalent mit (1.1). Daher kann Satz 1.1 angewendet werden, der (6.2) als notwendige Bedingung liefert. Umgekehrt existieren nach diesem Satz zur Metrik (6.2) stets symmetrische Affinzusammenhänge, die (6.1 a) genügen. Satz 1.3 garantiert, daß (6.1 c) mit diesen Affinzusammenhängen erfüllbar ist. Die Gültigkeit von (6.1 d) folgt schließlich aus Satz 1.2.

Aus dem Beweis von Satz 1.3 geht hervor, daß $\Gamma^i_{(kl)}$ durch (6.1 c) nicht eindeutig bestimmt wird. Im vorliegenden Fall kann außerdem noch ein Torsionstensor S^i_{kl} auftreten, denn der in i und j symmetrische Teil von (6.1 a) fordert lediglich $S_{jil} + S_{ij}$

[1] Außer diesen beiden Arbeiten gibt es viele Vorschläge für eine physikalische Interpretation, die jedoch alle, soweit sie dem Verfasser bekannt sind, Fehler enthalten. Eine allgemeine mathematische Diskussion wird in [25] mit Hilfe des Noetherschen Theorems durchgeführt.

$= 0$. Da S_{ijl} definitionsgemäß antisymmetrisch in j und l ist, folgt hieraus, daß der Torsionstensor vollständig antisymmetrisch ist. Für $n = 2$ existiert kein voll antisymmetrischer Tensor dritter Stufe. Im vierdimensionalen Raum beweist man $S_{ijl} = 0$ mit Hilfe von (6.1 b): Wählt, an z. B. das Koordinatensystem so, daß im betrachteten Punkt nur $g_{12} = -g_{21}$ und $g_{34} = -g_{43}$ von Null verschieden sind, so folgt daraus unmittelbar die Behauptung.

w. z. z. w.

Im folgenden werden noch kurz die torsionsfreien Lösungen diskutiert:

Satz 6.2

Fü $S^i_{kl} = 0$ läßt sich der antisymmetrische Teil der Metrik in der Form

$$g_{[ij]} = l_{i,j} - l_{j,i}$$

darstellen, wobei l_i ein C^4-Vektorfeld ist.

Beweis

Der in i und j antisymmetrische Teil von (6.1 a) ist:

$$g_{[ij],l} - \Gamma^s_{(il)}\, g_{[sj]} - \Gamma^s_{(jl)}\, g_{[is]} = 0.$$

Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 1.1, denn wegen des Korollars zu Satz 5.2 ist $g_{[ij]}$ absolut reduzibel, falls Rang $(g_{[ij]}) < n$ gilt.

w. z. z. w.

Für $S^i_{kl} = 0$ besagt der symmetrische Teil von (6.1 a), daß Γ^i_{kl} ein metrischer Zusammenhang bezüglich $g_{(ij)}$ ist. Daher sind diese Γ^i_{kl} die Christoffelsymbole, falls der Rang $(g_{(ij)})$ maximal ist. Gilt außerdem Rang $(g_{[ij]}) = n$, so läßt sich Gleichung (4.9) zur Bestimmung von l_i verwenden.

VI. 2 Spinordarstellungen der Lorentz-Gruppe

Gegeben sei ein 4-dimensionaler Riemannscher Raum R, dessen metrischer Tensor g_{ij} die Signatur $+++-$ besitzt. In jedem

Punkt von R wählt man ein orthonormiertes 4-Bein h^i_α, d. h. es soll gelten:

$$h^i_\alpha \, h^i_\beta \, g_{ij} = e_\alpha \, \delta_{\alpha\beta} =: g_{\alpha\beta}, \tag{6.3}$$

wobei $\delta_{\alpha\beta}$ das Kroneckersymbol und $e_\alpha = \pm 1$ ist. Alle orthonormierten 4-Beine eines Punktes $x \in E$ können durch eine Lorentztransformation ineinander übergeführt werden (d. h. die Lorentzgruppe ist der Fasertyp des Orthonormalrahmenbündels [2] von R). Im folgenden werden die Darstellungen der eigentlichen Lorentztransformationen mit Spin $\frac{1}{2}$ studiert.

Die metrischen Spintensoren definiert man zunächst bezüglich des Orthonormalrahmens h^i_α als die Paulimatrizen $\sigma_{\alpha\dot{A}B}$. Dabei laufen die Indizes $\alpha, \beta, \ldots$ wie oben von 1 bis 4, während die Spinorindizes $A, B, \ldots$ die Werte 1 oder 2 annehmen. Ein Punkt über einem Index bedeutet, daß dieser sich nach der komplexkonjugierten Darstellung transformiert.

Man vereinbart, daß Spinorindizes mit dem sog. metrischen Spinor $\gamma_{AB} = -\gamma_{AB}$ bzw. dessen konjugiert komplexen $\gamma_{\dot{A}\dot{B}}$ gesenkt und mit den inversen Spinoren γ^{AB} bzw. $\gamma^{\dot{A}\dot{B}}$ gehoben werden. Dann lassen sich alle algebraischen Eigenschaften aus der folgenden Gleichung ableiten ([8], S. 295):

$$\sigma_\alpha^{\dot{B}A} \, \sigma_{\beta\dot{B}C} = -g_{\alpha\beta} \, \delta^A_C \pm \frac{i}{2} \, \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \, \sigma^{\mu\dot{B}A} \, \sigma^\nu_{\dot{B}C}. \tag{6.4}$$

In (6.4) ist δ^A_B das Kroneckersymbol und $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ der Levi-Civitasche Pseudotensor. Ferner benötigt man die metrischen Spintensoren

$$\sigma^{i\dot{A}B} := h^i_\alpha \, \sigma^{\alpha\dot{A}B}.$$

Die Forderung $\gamma_{AB|l} = 0$ würde die Anwendungsmöglichkeiten zu stark einschränken [8]. Daher begnügt man sich mit

$$\gamma_{AB|l} = -i\gamma_{AB} \, \Phi_l, \tag{6.5a}$$

$$\sigma_{i\dot{A}B|l} = 0, \tag{6.5b}$$

mit einem reellen Vektor Φ_l und einem Affinzusammenhang Γ^i_{kl}, der ohne Einschränkung als metrisch, angenommen werden kann. Zur Diskussion unseres Spinorraums sind also außer g_{ij} und[1]

[1] Hier wird Γ^i_{kl} erwähnt, da alle Aussaagen dieses Abschnitts VI.2 auch für die Riemann-Cartan-Geometrie gelten.

Γ^i_{kl} nur noch γ_{AB}, $\sigma_{i\dot{A}B}$ und Φ_l nötig, denn die Gleichungen (6.5) können eindeutig nach dem Affinzusammenhang Γ^A_{Bl} aufgelöst werden [8].

Im folgenden werden die Komponenten von g_{ij}, γ_{AB} und $\sigma_{i\dot{A}B}$ aus C^2 und die Komponenten von Γ^i_{kl} und Φ_l aus C^1 vorausgesetzt.

Es soll nun untersucht werden, welche Freiheiten in der Wahl des metrischen Spinors bestehen, wenn g_{ij}, Γ^i_{kl}, $\sigma_{i\dot{A}B}$ und Φ_l gegeben sind. Dazu erinnern wir uns an die Gleichung

$$\sigma_r^{\dot{A}B}\,\sigma^{r\dot{C}D} = 2\,\gamma^{\dot{A}\dot{C}}\,\gamma^{DB} \tag{6.6}$$

die aus (6.4) abgeleitet werden kann. Durch $\sigma^{i\dot{A}B}$ ist also der Betrag von γ^{AB} festgelegt. Unser Ziel ist es zu zeigen, daß Arg (γ^{AB}) frei wählbar ist.

Hilfssatz 6.3

Sei Γ^A_{Bl} ein Affinzusammenhang, der (6.5a) erfüllt. Der hieraus gebildete Krümmungs-Spintensor

$$G^A{}_{Bik} = \Gamma^A{}_{Bk,i} - \Gamma^A{}_{Bi,k} + \Gamma^A_{Ci}\,\Gamma^C_{Bk} - \Gamma^A_{Ck}\,\Gamma^C_{Bi} \tag{6.7}$$

ist unabhängig von γ_{AB}.

Beweis

Nach Satz 3.2 folgt aus (6.5a):

$$\begin{aligned}\Gamma^A_{Bk} &= \tfrac{1}{2}\,\gamma^{CA}\,(\gamma_{CB,k} + i\,\gamma_{CB}\,\Phi_k) + \gamma^{AC}\,A_{CBk}\\ &=: (\ln\sqrt{\gamma_{12}})_{,k}\,\delta^A_B + \Theta^A_{Bk}.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Wählt man A_{CBk} proportional zu γ_{12}, so erkennt man, daß Θ^A_{Bk} von γ^{CA} unabhängig ist. Es sei nun $H^A{}_{Bik}$ derjenige Krümmungs-Spintensor, der entsteht, wenn in (6.7) Θ^A_{Bk} statt Γ^A_{Bk} eingesetzt wird. Eine kurze Rechnung ergibt $H^A{}_{Bik} = G^A{}_{Bik}$.

w. z. z. w.

Selbstverständlich gilt dieser Hilfssatz auch für 2-dimensionale symplektische Räume mit halbmetrischem Zusammenhang.

Satz 6.4

Bei gegebenem g_{ij}, Γ^i_{kl}, $\sigma_{i\dot{A}B}$ und Φ_l ist Arg(γ_{AB}) *beliebig wählbar.*

Beweis

Es ist zu zeigen, daß (6.4) und (6.5) das Verhältnis Re γ_{12}/Im γ_{12} nicht festlegen. – Wird Gleichung (6.4) explizit geschrieben, so sieht man, daß die quadratischen Terme in $\sigma^{r\dot{D}E}$ den Faktor $\gamma_{\dot{F}\dot{B}}\,\gamma_{GC}$ enthalten. Daher kann (6.4) nur den Betrag von γ_{AB} bestimmen. Aus (6.8) folgt, daß Arg(γ_{12}) nur in den Imaginärteil von Γ^E_{Ek} eingeht, jedoch nicht in Im$(\Gamma^1_{1k} - \Gamma^2_{2k})$. Multipliziert man andererseits (6.5 b) mit $\sigma^{r\dot{E}A}$, so erhält man unter Beachtung von (6.4) und (6.6)

$$\Gamma^A_{Bl} = \frac{1}{4}\,\sigma^{r\dot{E}A}\,(-\,\sigma_{r\dot{E}B,\,l} + \Gamma^s_{rl}\,\sigma_{s\dot{E}B}) - \frac{1}{2}\,\Gamma^{\dot{E}}_{\dot{E}l}\,\delta^A_B;$$

$\Gamma^{\dot{E}}_{\dot{F}l}$ ist das konjugiert Komplexe von Γ^E_{Fl}. Hieraus läßt sich nur $\Gamma^E_{El} + \Gamma^{\dot{E}}_{\dot{E}l}$ bestimmen; Im (Γ^E_{El}) wird also durch diese Gleichung nicht festgelegt.

Es sei nun $R^i{}_{klm}$ der aus den Γ^i_{kl} gebildete Krümmungstensor und $G^{\dot{A}}{}_{\dot{B}lm}$ das konjugiert Komplexe von $G^A{}_{Blm}$. Die Integrabilitätsbedingung von (6.5 a) läßt sich aus der von (6.5 b)

$$R^r{}_{klm}\,\sigma_{r\dot{A}B} + G^{\dot{C}}{}_{\dot{A}lm}\,\sigma_{k\dot{C}B} + G^C{}_{Blm}\,\sigma_{k\dot{A}C} = 0$$

durch Multiplikation mit $\sigma^{k\dot{A}D}$ ableiten [8]. Aus Hilfssatz 6.3 folgt aber, daß letztere nicht von γ_{AB} abhängt.

w. z. z. w.

Satz 6.4 gibt für jeden Riemannschen und für jeden Riemann-Cartanschen Raum mit der Signatur $+++-$ eine Abelsche Yang-Mills-Gruppe (d. h. ein Faserbündel über R mit einer Abelschen Gruppe als Fasertyp [3]) an. Für Spinoren in höherdimensionalen Räumen [53], [54] lassen sich ähnliche Überlegungen anstellen.

Literatur

[1] G. Vranceanu: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Akademie-Verlag, Berlin 1961.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of differential geometry II, Interscience Publishers, New York 1969.

[3] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone: Connections, curvature and cohomology I, Academic Press, New York 1972.

[4] C. Godbillon: Géométrie différentielle et méchanique analytique, Hermann, Paris, 1969.

[5] J.-M. Souriau: Structure des systèmes dynamiques, maîtrises de mathématiques, Dunod Université, Paris 1970.

[6] R. Rosca: Sur un type de variété lorentzienne symplectique, Comptes rendus hebdomadaires d. Séances de l'Académie d. Sciences, A 274, 679–701 (1972).
R. Rosca: On total null manifolds included in a real pseudo-Euclidean space of signature $(n, n+1)$, Abhandl. aus dem Math. Seminar d. Univ. Hamburg 42, 9–18 (1974).
R. Rosca: On coisotropic submanifolds of a para-Kählerian manifold, Tensor 29, 200–204 (1975).
R. Rosca: Quantic manifolds with a para-co-Kählerian manifold, Kodai Math. Seminar Reports 27, 51–61 (1976).

[7] J. A. Schouten: Ricci-Calculus, Springer-Verlag, Berlin 1954
Die Bezeichnung: Riemann-Cartansche Geometrie wurde übernommen aus: F. W. Hehl: Spin und Torsion in der Allgemeinen Relativitätstheorie, Habilitationsschrift, Clausthal 1970.

[8] E. Schmutzer: Relativistische Physik, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G., Leipzig 1968.

[9] L. P. Eisenhart: Non-Riemannian Geometry, American Math. Soc. Colloquium Publications VIII, New York 1927.

[10] Siehe z. B.
I. G. Petrowski: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1955.

[11] O. Veblen, T. Y. Thomas: The geometry of paths, Transactions of the Americ. Math. Soc. 25, 551–608 (1923).

[12] H. Weyl: Sitzungsberichte Preuß. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Klasse 465–480 (1918).

[13] A. Moór: Über eine Übertragungstheorie der metrischen Linienräume mit rekurrentem Grundtensor, Tensor 29, 47–63 (1975).

[14] A. S. Eddington: Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung (Anhang), Grundlehren der math. Wissensch. 18, Springer-Verlag, Berlin 1925.

[15] H. Friesecke: Vektorübertragung, Richtungsübertragung, Metrik, Math. Annalen 94, 101–118 (1925).
J. M. Thomas: Asymmetric displacement of a vector, Transactions of the American Math. Society 28, 658–670 (1926).

[16] E. Schrödinger: Space-time structure, Cambridge University Press, Cambridge 1950.

[17] K. Buchner: On a new solution of Einstein's Unified Field Theory, Progr. of Theor. Phys. 48, 1708–1717 (1972).

[18] K. Takano: Some remarks on the affine motion in a space with recurrent curvature, Tensor 12, 84–89 (1962). Dort finden sich weitere Literaturangaben.
A. G. Walker: On Ruse's spaces of recurrent curvature, Proc. of the Royal Math. Society (2) 52, 36–64 (1951).

[19] A. Moór: Untersuchungen in Räumen mit rekurrenter Krümmung, Journal f. reine u. angew. Math. 199, 91–99 (1958).

[20] W. O. Vogel: Über lineare Zusammenhänge in singulären Riemannschen Räumen, Arch. d. Math. 16, 106–116 (1965).

[21] A. Einstein: A generalisation of the relativistic theory of gravitation, Annals of Math. 46, 578–584 (1945).
A. Einstein und E. Straus: A generalisation of the relativistic theory of gravitation II, Annals of Math. 47, 731–741 (1946).

[22] V. Hlavatý: Geometry of Einstein's Unified Field Theory, P. Noordhoff, Groningen 1957.

[23] K. B. Lal, R. S. Mishra: Einstein's connections I, Tensor 10, 218–237 (1960).
Dort finden sich weitere Literaturangaben.

[24] N. N. Ghosh: A new geometrical approach to non-symmetric Unified Field Theory, Indian Journ. of pure and appl. Math. 4, 856–861 (1973).

[25] K. Buchner: Energiekomplexe in der Einstein-Schrödinger-Geometrie, Tensor 29, 267–273 (1975).

[26] A. Papapetrou: Static spherically symmetric solutions of the Unitary Field Theory, Proc. of the Royal Irish Acad. 52 A, 69–86 (1948).

[27] M.-A. Tonnelat: Théorie unitaire affine. 2. Résolution rigoureuse de l'équation fondamentale, Comptes rendus hebdomadaires d. Séances de l'Acad. d. Sciences 231, 487–489 (1950).

[28] M. Wyman: Unified Field Theory, Canadian Journal of Math. 2, 427–439 (1950).

[29] H. Takeno, M. Ikeda, S. Abe: On solutions of new field equations of Einstein and those of Schrödinger, Progr. of Theor. Phys. 6, 837–848 (1951).

[30] W. B. Bonnor: The general static spherically symmetric solution of Einstein's Unified Field Theory, Proc. of the Royal Soc., A 210, 427–434 (1952).

[31] B. R. Rao: The external field of a non-static centrally symmetric isolated system in the Unified Field Theory, Proc. Nat. Inst. Science of India 19, 721–728 (1953).

[32] S. Mavridès: Solution non statique à symétrie sphérique des équations de la théorie unitaire d'Einstein, Comptes rendus hebdomadaires d. Séances de l'Acad. d. Science A 239, 1597–1599 (1954).

[33] F. De Simoni: Le soluzioni generali della statica a simmetrica sferica ultima teoria unitaria di Einstein, Lincci-Rend. Sc. fis. mat. e nat. 16, 348–355 (1954).

[34] G. Bandyopadhyay: General static spherically symmetric solution of the „weaker" equiatons of Einstein's Unified Field Theory, Science and Culture 25, 427–428 (1960).

[35] J. R. Vanstone: The general static spherically symmetric solution of the „weak" Unified Field equations, Canadian Journal of Math. 14, 568–576 (1962).

[36] R. L. Ingraham: Contributions to the non-symmetric affine Unified Field Theory, Annals of Math. 52, 743–752 (1950).

[37] E. Clauser: Sui fronti d'onda nella teoria unitaria einsteiniana, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Rendiconti, Classe di Scienze Matematiche e Naturali 18, 473–492 (1954).

[38] H. Takeno: Some wave solutions of Einstein's generalized theory of gravitation, Tensor 6, 69–82 (1956).
H. Takeno: On some generalized plane wave solutions of nonsymmetric Unified Field Theories II, Tensor 8, 71–78 (1958).
H. Takeno: Some plane wave-like solutions of non-symmetric Unified Field Theory, Tensor 11, 263–269 (1961).

[39] N. N. Ghosh: A note on wave solutions of Einstein's Unified Field Theory, Golden Jubilee Commemoration Volume, Calcutta Math. Society (1958–59).

[40] P. C. Vaidya: Unified gravitational and electromagnetic waves, Progr. of Theor. Phys. 25, 305–314 (1961).

[41] K. B. Lal, H. Prasad: On cylindrical wave solutions of Einstein's Unified Field Theory of gravitation and electromagnetism I, II, Tensor 16, 209–224 (1965) und Tensor 17, 179–184 (1966).

[42] V. B. Johari: Plane waves in the unified field of gravitation and electromagnetism – exact plane wave solution in Bondi space-time, Prog. of Theor. Phys. 35, 141–146 (1966).

[43] K. B. Lal, N. Ali: Plane wave solutions of Einstein's Unified Field Equations of non-symmetric theories in Bondi space-time, Tensor 20, 131–137 (1969).
K. B. Lal, N. Ali: The (t/z)-type plane wave solutions of the field equations of Einstein's non-symmetric Unified Field Theory in Bondi space-time, Tensor 20, 299–302 (1969).
K. B. Lal, N. Ali: A generalization of plane wave solutions of the field equations of non-symmetric Unified Field Theory of Einstein, Schrödinger and Bonnor, Tensor 21, 39–47 (1970).
K. B. Lal, N. Ali: The wave solutions of the field equations of Einstein's, Bonnor's and Schrödinger's non-symmetric Unified Field Theory in generalized Takeno space-time, Tensor 21, 243–249 (1970).

[44] K. B. Lal, D. C. Khare: On solutions of Einstein's Unified Field Theory of gravitation and electromagnetism in a $V_2 \times V_2$ space-time. Tensor 20, 335–342 (1969).
K. B. Lal, D. C. Khare: On wave solutions of Schrödinger's Unified Field Theory in a $V_2 \times V_2$ space-time, Tensor 21, 349–353 (1970).

[45] K. B. Lal, T. Singh: On cylindrical wave solutions of Bonnor's and Schrödinger's Unified Field Theory, Tensor 23, 151–156 (1972).

[46] K. B. Lal, S. P. Singh: The wave solutions of non-symmetric Unified Field Theories of Einstein, Bonnor and Schrödinger, Tensor 23, 369–375 (1972).

[47] K. B. Lal, R. P. Srivastava: On wave solutions of field equations of Einstein's and Bonnor's non-symmetric Unified Field Theories in a generalized Takeno space-time, Tensor 28, 251–256 (1974).

[48] G. Bandyopadhyay: Particular solutions of Einstein's recent unified theories, Indian Journal of Phys. 25, 257–261 (1951).

[49] J. R. Rao: Rigorous solution of Einstein's Unified Field Theory for a special type of symmetry, Acta Physica Austriaca 12, 251–261 (1959).

[50] R. Sarkar: Rigorous static solutions corresponding to a particular form of the fundamental tensor in Schrödinger's Unified Field Theory, Journal of Math. and Mech. 14, 183–193 (1965).
R. Sarkar: On solutions of Schrödinger's unified field equations corresponding to a particular form of the fundamental tensor, Tensor 17, 227–237 (1966). Addendum: Tensor 19, 51–54 (1968).

[51] R. N. Tiwari: An exact solution corresponding to a special field structure in Schrödinger's Unified Field Theory, Tensor 22, 82–86 (1971).

[52] N. N. Ghosh: On a solution of field equations in Einstein's Unified Field Theory I and II, Progr. of Theor. Phys. 16, 421–428 (1956); Progr. of Theor. Phys. 17, 131–138 (1957).

[53] R. Brauer, H. Weyl: Spinors in n dimensions, American Journal of Math. 57, 425–449 (1935).

[54] E. Cartan: The theory of spinors, Hermann, Paris 1966.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1978

Band/Volume: 1977

Autor(en)/Author(s): Buchner Klaus

Artikel/Article: Affinzusammenhänge in symplektischen Räumen 13-52