BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1977

MÜNCHEN 1978

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Der abbildungstheoretische Zugang zur Topologie

Von Georg Aumann München.

1. Faßt man den topologischen Raum X als „*Umgebungsraum*" $(X, \mathfrak{U})$ auf, so hat man es mit folgender Situation zu tun:

Jedem Punkt $x \in X$ ist zugeordnet ein System $\mathfrak{U}(x)$ von Teilmengen von X, „*Umgebungen*" von x genannt,

$$x \mapsto \mathfrak{U}(x) \subset \mathfrak{P}(X) \ (= \text{Potenzmenge von } X),\ x \in X,$$

wobei folgende „Umgebungsaxiome" für jedes $x \in X$ erfüllt sind:

(t_0) $\mathfrak{U}(x) \neq \emptyset \wedge \bigwedge_{U, V \in \mathfrak{U}(x)} \ \bigvee_{W \in \mathfrak{U}(x)} \ W \subset U \cap V;$

(t_1) $\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}(x)} \ x \in U;$

(t_2) $\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}(x)} \ \bigvee_{V \in \mathfrak{U}(x)} \ \bigwedge_{y \in V} \ \bigvee_{W \in \mathfrak{U}(y)} \ W \subset U.$*)

Abgesehen davon, daß sich diese Axiome z. B. im Fall der gewöhnlichen Topologie der reellen Zahlgeraden $\boldsymbol{R}^1$ mit

$$\mathfrak{U}_0(x) := \{(x - \tfrac{1}{n},\ x + \tfrac{1}{n}) : n \in \{1, 2, 3, \ldots\}\},\ x \in \boldsymbol{R}^1,$$

leicht verifizieren und veranschaulichen lassen, bieten sie dem Uneingeweihten recht wenig Motivation. Wenn man sich aber nicht um Motivation kümmert, so kann man gleich einen letzten Schritt tun und einfach den topologischen Raum mittels des Systems $\mathfrak{G}$ seiner offenen Mengen definieren, als $(X; \mathfrak{G})$, wobei $\mathfrak{G}$ irgend ein $(\bigcup, \cap)$-System, d. h. gegenüber der Bildung der Vereinigung von beliebig vielen und des Durchschnitts von endlich vielen Mengen geschlossenen Systems von Teilmengen von X bezeichnet.

Es gibt aber noch einen anderen *Zugang zur Topologie* – ich nenne ihn den „*abbildungstheoretischen*" –, bei dem die den obigen Axiomen entsprechenden gleichwertigen Aussagen einen

---

* Der hier verwendete Umgebungsbegriff, bei welchem „Umgebungen" nicht notwendig „offene" Mengen sind, geht auf H. Tietze zurück; Math. Zeitschr. 5 (1919), p. 288. Ausführliches hierüber in seiner späteren Arbeit „Beiträge zur allgemeinen Topologie, I.", Math. Ann. 88 (1923), 290–312.

leicht verständlichen Sinn ergeben. Dies wird im folgenden näher dargelegt.

2.1. Den „*abbildungstheoretischen*“ *Standpunkt* einnehmen, heißt, die Topologie nur als Mittel zum Zweck zu betrachten, nämlich als Mittel um Abbildungen

$$f: X \to Y$$

zu studieren. Dabei denken wir uns $X(\neq\emptyset)$ und Y fest, wobei wir sinnvollerweise den Fall ausschließen, daß Y leer oder nur einelementig ist. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{F}$ aller solchen Abbildungen.

2.2. Die hier zu verwendende *Untersuchungsweise* bedient sich zweier Methoden: Einmal der

(I) „*Methode der Analysis*“.
Sie besteht darin

$$f, g, \ldots \in \mathfrak{F}$$

in der Weise zu analysieren, daß man *Systeme*

$$\{f|X' : X' \in \mathfrak{r}\}, \{g|X' : X' \in \mathfrak{r}\}, \ldots$$

von Einengungen $f|X'$, $g|X'$, . . . von f, g, . . . auf Teilmengen X' von X betrachtet, wobei die „Testmengen“ X' einer bestimmten Menge $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{P}(X)$ angehören. Die eigentliche Idee dieser Untersuchungsart besteht nun darin, *Eigenschaften von* f *als Eigenschaften eines solchen Systems* $\{f|X' : X' \in \mathfrak{r}\}$ zu definieren. Auf den ersten Blick sieht das mühevoller aus als die ursprüngliche Aufgabe, die *eine* Funktion $f|X$ zu studieren. Aber hier setzt zur Entlastung die zweite Methode ein, die

(II) „*Methode der Abstraktion*“,
mit der man ja neue Objekte und Eigenschaften *durch Äquivalenzklassenbildung* erklärt, und welche die obige „Vervielfältigung“ auf ein zuträgliches Maß reduziert.

2.2.1. Die fragliche Äquivalenzrelation ergibt sich aus folgender Überlegung: Bei der Untersuchung von $\mathfrak{F}$ mittels des Testmengensystems $\mathfrak{r}$ gemäß (I) kann für gewisse $f, g \in \mathfrak{F}$ der Fall eintreten, daß $\bigvee_{X' \in \mathfrak{r}} f|X' = g|X'$, was bedeutet, daß die Unterscheidbarkeit von f und g problematisch ist, und was uns daher veranlaßt, zwei solche Abbildungen (hinsichtlich der Untersuchung mittels $\mathfrak{r}$) als „äquivalent" anzusehen und zu definieren:

(1) $$f \sim_{\mathfrak{r}} g :\Leftrightarrow \bigvee_{X' \in \mathfrak{r}} f|X' = g|X'.$$

Indem wir die Relation $\sim_{\mathfrak{r}}$ als Äquivalenzrelation verwenden wollen, werden wir gezwungen, den Bereich der möglichen Testmengensysteme $\mathfrak{r}$ erheblich einzuschränken. Es gilt nämlich der

Satz 1. Es stellt die durch (1) erklärte Relation $\sim_{\mathfrak{r}}$ genau dann eine Äquivalenzrelation in $\mathfrak{F}$ dar, wenn $\mathfrak{r}$ folgende Eigenschaft hat:

(r) $$\mathfrak{r} \neq \emptyset \wedge \bigwedge_{U,V \in \mathfrak{r}} \quad \bigvee_{W \in \mathfrak{r}} \quad W \subset U \cap V.$$

Beweis. 1. Daß (r) hinreichend ist, ist leicht zu bestätigen. – 2. Angenommen (r) wäre nicht erfüllt. Dann ist *entweder* $\mathfrak{r} = \emptyset$ (alsdann wäre aber $\sim_{\mathfrak{r}}$ nicht reflexiv), *oder*

$$\bigvee_{U',U'' \in \mathfrak{r}} \quad \bigwedge_{W \in \mathfrak{r}} \quad W \not\subset U' \cap U''.$$

Wir bilden (mit den zwei verschiedenen Elementen a, b von Y) die folgenden Abbildungen

$f_1 = a$ auf U' und $= b$ sonst,

$f_2 = a$ auf $U' \cup U''$ und $= b$ sonst,

$f_3 = a$ auf $U'' \cup (X \backslash U')$ und $= b$ sonst.

Dann ist $f_1 \sim f_2$ wegen $f_1|U' = f_2|U'$ und $f_2 \sim f_3$ wegen $f_2|U'' = f_3|U''$ aber $f_1 \nsim f_3$. Denn f_1 und f_3 haben gleiche Werte nur in Punkten von $U' \cap U''$; es gibt aber kein $W \in \mathfrak{r}$ mit $W \subset U' \cap U''$.

Definition. Ein Mengensystem $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt ein *Raster auf* X, wenn es die Bedingung (r) erfüllt.

Beispielsweise ist auch $\mathfrak{r}_0 := \{\emptyset\}$ ein Raster; die zugehörige Abbildungsäquivalenz ist die gröbste, die es gibt, nämlich $f \sim_{\mathfrak{r}_0} g$ für alle $f, g \in \mathfrak{F}$.

2.2.2. Im Rahmen der „$\mathfrak{r}$-Analyse" gelten nur solche *Eigenschaften* von $f \in \mathfrak{F}$ (vielmehr von $\{f|X' : X' \in \mathfrak{r}\}$) als *wesentlich, wenn sie gegenüber* $\sim_{\mathfrak{r}}$ *konsistent* sind, d. h. für zwei $\sim_{\mathfrak{r}}$-äquivalente Abbildungen f und g die Eigenschaft allemal gleichzeitig gilt oder nicht. Da man jede Eigenschaft auch als eine Äquivalenzrelation ansehen kann mit zwei Äquivalenzklassen (in der einen gilt die Eigenschaft, in der anderen nicht), so kann man auch sagen, daß bei der $\mathfrak{r}$-Analyse die *Relation* $\sim_{\mathfrak{r}}$ *die Rolle der „feinsten" zugelassenen Äquivalenzrelation* übernimmt. Schließlich noch ein klassisches

Beispiel: Die Stetigkeit einer reellen Funktion f einer reellen Veränderlichen x an der Stelle x_0. Maßgebender Raster ist $\mathfrak{U}_0(x_0)$ (in 1.) und die Eigenschaft lautet

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n} \bigwedge_{x \in (x_0 - 1/n,\, x_0 + 1/n)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

was offensichtlich gegenüber $\sim_{\mathfrak{U}_0(x_0)}$ konsistent ist.

3. *Abbildungstheoretische Deutung der Axiome.*

3.1. Mit Satz 1 haben wir bereits eine Deutung von (t_0):

Satz 2'. Ist $\mathfrak{U} : X \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ vorgegeben, so ist das Axiom (t_0) gleichwertig damit, daß für jedes $x \in X$ die binäre Abbildungsrelation $\sim_{\mathfrak{U}(x)}$ in $\mathfrak{F}$, erklärt für $f, g \in \mathfrak{F}$ durch

$$(2) \qquad f \sim_{\mathfrak{U}(x)} g \;:\Leftrightarrow\; \bigvee_{U \in \mathfrak{U}(x)} f \mid U = g \mid U,$$

eine Äquivalenzrelation in $\mathfrak{F}$ darstellt.

Statt $f \sim_{\mathfrak{U}(x)} g$ schreiben wir auch „$f \sim g$ *in* x", wenn die Bezugnahme auf $\mathfrak{U}$ klar ist.

3.2. Unter der Voraussetzung von (t_0) ergeben sich nun auch Deutungen für (t_1) und (t_2):

Satz 2''. Erfüllt $\mathfrak{U} : X \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ das Axiom (t_0), so gilt:

1. (t_1) ist gleichwertig mit

$$(t_1') \quad \bigwedge_{f, g \in \mathfrak{F}} \bigwedge_{x \in X} f \sim g \text{ in } x > f(x) = g(x).$$

2. (t_2) ist gleichwertig mit

$$(t_2') \quad \bigwedge_{f, g \in \mathfrak{F}} \bigwedge_{x \in X} f \sim g \text{ in } x > \bigvee_{V \in \mathfrak{U}(x)} \bigwedge_{y \in V} f \sim g \text{ in } y.$$

Beweis 1. Zu $(t_1') > (t_1)$. Angenommen (t_1) ist nicht erfüllt, also $\bigvee_{x_0 \in X} \bigvee_{U_0 \in \mathfrak{U}(x_0)} x_0 \notin U_0$.

Dann bilden wir f_1 und f_2 gemäß

$f_1 = a$ überall und $f_2(x_0) = b$ und $f_2(x) = a$ sonst.

Es ist $f_1 \sim_{\mathfrak{U}(x_0)} f_2$ aber $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$. – $(t_1) > (t_1')$ ist klar. –

2. *Zu* $(t_2) > (t_2')$. Wenn $f \mid U = g \mid U$ mit $U \in \mathfrak{U}(x)$, dann gibt es wegen (t_2) ein $V \in \mathfrak{U}(x)$, so daß $\bigwedge_{y \in V} \bigvee_{W \in \mathfrak{U}(y)} W \subset U$.

Daher ist $f|W = g|W$, woraus $f \sim_{\mathfrak{U}(y)} g$ für $y \in V$ folgt. – *Zu* $\neg\,(t_2) > \neg\,(t_2')$. Angenommen, es gilt $\neg\,(t_2)$, d. h.

$$\bigvee_{x' \in X} \bigvee_{U' \in \mathfrak{U}(x')} \bigwedge_{V \in \mathfrak{U}(x')} \bigvee_{y' \in V} \bigwedge_{W \in \mathfrak{U}(y')} W \not\subset U'.$$

Wir bilden f und g gemäß ($\mathfrak{C}$ = „Komplement in X“)

$$f|\mathfrak{C}U' = a,\ g|\mathfrak{C}U' = b \text{ und } f|U' = g|U'.$$

Dann ist $f \sim g$ in x', aber die rechte Seite der Implikation in (t_2') ist nicht erfüllt für $x = x'$. Denn zu jedem $V \in \mathfrak{U}(x')$ gibt es ein $y' \in V$, so daß jedes $W \in \mathfrak{U}(y')$ ein y'' enthält mit $y'' \in \mathfrak{C}U'$, also $f(y') \neq g(y')$, also $f|W \neq g|W$ und somit $f \not\sim g$ in y', mithin also $\neg\,(t_2')$.

4. *Die „offenen“ Mengen.*

Das Axiomensystem (t_0)–(t_2) ist für die „Konstruktion“ von Umgebungsräumen $(X, \mathfrak{U})$ bei beliebigem X nicht geeignet; dies liegt an mangelnder Eindeutigkeit. Abbildungstheoretische Überlegungen zeigen uns, wie wir diesen Mangel beheben können. Unser Interesse war zuletzt mehr auf die Relationen $\sim_{\mathfrak{U}(x)}$ gerichtet als auf $\mathfrak{U}$ selbst; es ist daher naheliegend, eine *Äquivalenz von Umgebungsräumen* zu erklären:

Definition 1. Zwei Umgebungsräume $(X, \mathfrak{U}')$ und $(X, \mathfrak{U}'')$ heißen *äquivalent*, wenn ihre Abbildungsäquivalenzen dieselben sind:

$$\sim_{\mathfrak{U}'(x)} = \sim_{\mathfrak{U}''(x)} \text{ für alle } x \in X.$$

Für äquivalente Umgebungsräume $(X, \mathfrak{U}')$ und $(X, \mathfrak{U}'')$ folgt daraus, daß die Mengen

(3) $E(f, g; \mathfrak{U}) := \{x : x \in X \wedge f \sim_{\mathfrak{U}(x)} g\}$ dieselben sind:

(4) $E(f, g; \mathfrak{U}') = E(f, g; \mathfrak{U}'')$ für alle $f, g \in \mathfrak{F}$.

Umgekehrt folgt aus (4) die Äquivalenz der Räume; daher die

Definition 2. Die Teilmengen $E(f, g; \mathfrak{U})$, $f, g \in \mathfrak{F}$, des Umgebungsraumes $(X, \mathfrak{U})$ heißen die ($\mathfrak{U}$-)*offenen Mengen* von X; ihre Gesamtheit werde mit $\mathfrak{G}(\mathfrak{U})$ bezeichnet. Hierzu haben wir den

Satz 3.1. Es sei $(X, \mathfrak{U})$ ein Umgebungsraum. Dann gilt:

(a) $Y \subset X$ ist $\mathfrak{U}$-offen genau dann, wenn

(5) $\bigwedge_{x \in Y} \bigvee_{U \in \mathfrak{U}(x)} U \subset Y$. –

(b) $\mathfrak{G}(\mathfrak{U})$ ist ein $(\bigcup, \cap)$-System in $\mathfrak{P}(X)$.

2. $\mathfrak{G}(\mathfrak{U}') = \mathfrak{G}(\mathfrak{U}'')$ genau dann, wenn $(X, \mathfrak{U}')$ und $(X, \mathfrak{U}'')$ äquivalente Umgebungsräume sind.

3. Ist $\mathfrak{G}$ irgend ein $(\bigcup, \frown)$-System in $\mathfrak{P}(X)$, so liefert $\mathfrak{U}(\mathfrak{G})(x) := \{G : G \in \mathfrak{G} \wedge x \in G\}$, $x \in X$, einen Umgebungsraum $(X, \mathfrak{U}(\mathfrak{G}))$ mit $\mathfrak{G}(\mathfrak{U}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$. –

4. Der Umgebungsraum $(X, \mathfrak{U}(\mathfrak{G}(\mathfrak{U})))$ ist zu $(X, \mathfrak{U})$ äquivalent.

Definition 3. Unter einem *topologischen Raum* mit dem „Träger“ X verstehen wir eine Äquivalenzklasse von Umgebungsräumen $(X, \mathfrak{U})$ im Sinne der Definition 1; als einen eindeutig bestimmten Repräsentanten des topologischen Raumes können wir den Umgebungsraum $(X, \mathfrak{U}(\mathfrak{G}))$ wählen, wobei $\mathfrak{G}$ das System der offenen Mengen bezeichnet. Im Sinne des „Repräsentationsprinzips“ sprechen wir auch kurz vom „topologischen Raum $(X, \mathfrak{U})$“.

Damit ist die Verbindung mit der üblichen Betrachtungsweise topologischer Räume hergestellt (weshalb auch die Beweise von Satz 3 und auch der noch folgenden Bemerkungen dem Leser überlassen seien). Da es bekanntlich für die $(\bigcup, \frown)$-Systeme in $\mathfrak{P}(X)$ eine allgemeine mengentheoretische Konstruktion gibt, so auch für die topologischen Räume mit gegebenem Träger X.

4.1. Ist X ein topologischer Raum, so bezeichnet man mit $\mathfrak{k}(Y)$ den „offenen Kern“ von $Y \subset X$, d. h. die größte in Y enthaltene offene Teilmenge von X. Den Zusammenhang der „abbildungstheoretischen“ Betrachtungsweise mit der üblichen mengentheoretischen liefert die Beziehung

$$f \sim_{\mathfrak{U}(x)} g \;\leftrightarrows\; x \in \mathfrak{k}\,(\{x' : x' \in X \wedge f(x') = g(x')\}.$$

5. Auch der *Vergleich topologischer Räume* $(X, \mathfrak{U}')$ und $(X, \mathfrak{U}'')$ hinsichtlich ihrer „Feinheit“ ist „abbildungstheoretisch“, d. h. mittels der Abbildungsäquivalenzen $\sim \mathfrak{U}(x)$, einfach zu beschreiben:

$$\sim_{\mathfrak{U}'(x)} \textit{feiner als} \sim_{\mathfrak{U}''(x)} \textit{für alle } x \in X,$$

ist gleichwertig mit

$$(X, \mathfrak{U}') \textit{ gröber als } (X, \mathfrak{U}'').$$

6. Abschließend kann der abbildungstheoretische Zugang zum topologischen Raum so formuliert werden:

Man bezeichne eine Abbildung $\mathfrak{U} : X \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ welche (t_0) erfüllt als ein „*Rasterfeld*“ auf X; zum Rasterfeld $\mathfrak{U}$ gehört das System der *Abbildungsäquivalenzen* $\sim_{\mathfrak{U}(x)}$, $x \in X$, gemäß (2). $(X, \mathfrak{U})$ stellt einen topologischen Raum dar, wenn $\mathfrak{U}$ ein Rasterfeld ist und das zugehörige System der Abbildungsäquivalenzen die „Axiome“ (t_1') und (t_2') erfüllt. Diese Axiome kann man als leichter verständlich betrachten als ihre „mengentheoretischen“ Gegenstücke (t_1) und (t_2), indem (t_1') und (t_2') unmittelbar zeigen, was sie für das Studium von Abbildungen leisten. Auch die Begriffe wie „offene Menge“ und „Feinheit einer ‚Topologisierung‘ $\mathfrak{U}$“ kommen im Rahmen der abbildungstheoretischen Betrachtungsweise in ganz natürlicher Weise zur Geltung.

7. Die obigen Ergebnisse legen es nahe, den Sachverhalt zu verallgemeinern und folgendes *Problem* zu stellen:

Gegeben ist ein System

$$\{\sim_x : x \in X\} \tag{6}$$

von Äquivalenzrelationen $\sim_x$ in $\mathfrak{F}$. Was sind die Bedingungen dafür, daß durch (6) eine Topologie in X definiert wird in dem Sinne, daß die Mengen

$$[f \sim g] := \{x : x \in X \wedge f \sim_x g\} \tag{7}$$

die offenen Mengen einer Topologie sind, d. h. ein $(\bigcup, \cap)$-System bilden?

Mit der weiteren Bezeichnung

$$[f = g] := \{x : x \in X \wedge f(x) = g(x)\}$$

wird diese Frage beantwortet durch den

Satz. Es sei $X \neq \emptyset$ und Y enthalte mindestens *drei* verschiedene Elemente. Dann definiert (6) eine Topologie in X genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(a) $\bigwedge_{f,g \in \mathfrak{F}} [f \sim g] \subset [f = g]$;

(b) $\bigwedge_{f,g,f',g' \in \mathfrak{F}} \quad [f \sim g] \subset [f' = g'] > [f \sim g] \subset [f' \sim g']$.

Beweis. Zunächst vermerken wir, daß aus (a) und (b) folgt:

(c) $[f \sim g] = [f' = g'] > [f' = g'] = [f' \sim g']$,

was leicht zu bestätigen ist.

1. Es seien (a) und (b) erfüllt, und für eine gewisse Menge von Indizes i sei $f_i, g_i \in \mathfrak{F}$, $\bigcup_i [f_i \sim g_i] =: S$ und $c_0 \in Y$ (wobei c_0 auch die konstante Abbildung $x \mapsto c_0$, $x \in X$, bezeichnen möge). Wegen $|Y| \geqslant 2$ gibt es zu jedem i ein $h_i \in \mathfrak{F}$, so daß

$$[f_i \sim g_i] = [h_i = c_0] = [h_i \sim c_0]$$

(wegen (c)). Also ist $S = \bigcup_i [h_i = c_0]$. Wir wählen nun $h \in \mathfrak{F}$ derart, daß $h(x) = c_0$ für $x \in S$ und $h(x) \neq c_0$ sonst. Dann ist $[h \sim c_0] \subset [h = c_0] = S$. Aus $[h_i \sim c_0] \subset [h = c_0]$ und (b) folgt $[h_i \sim c_0] \subset [h \sim c_0]$, d. h. $S \subset [h \sim c_0]$ und somit $S = [h \sim c_0]$. Die Mengen (7) bilden also ein $\bigcup$-System. – Nun sei $[f_1 \sim g_1] \frown [f_2 \sim g_2] =: D$. Es gibt Darstellungen

$$[f_i \sim g_i] = [h_i = c_0] = [h_i \sim c_0], \; i = 1, 2,$$

mit der Besonderheit, daß, wenn c_0, c_1, c_2 drei verschiedene Elemente von Y bezeichnen,

$$h_i(x) = c_i \text{ für } x \notin [h_i = c_0], \; i = 1, 2. \tag{8}$$

Wenn nun $x \in D$, so folgt mit der Transitivität von $\sim_x$, daß $x \in [h_1 \sim h_2]$, also ist $D \subset [h_1 \sim h_2]$. Andererseits, wenn $x \in \in [h_1 \sim h_2]$, so ist $x \in [h_1 = h_2] = [h_1 = c_0] \frown [h_2 = c_0] = D$ (wegen (8)). Damit ergibt sich $D = [h_1 \sim h_2]$, d. h. auch die $\frown$-System-Eigenschaft ist erfüllt.

2. Sei nun $\mathfrak{S}$ ein $(\bigcup, \frown)$-System auf X. Wir betrachten dann $\mathfrak{S}$ als das System der offenen Mengen einer Topologie in X, bezeichnen die Bildung des offenen Kernes von $X' \subset X$ mit $\boldsymbol{k}(X)$, und definieren für $x \in X$ und $f, g \in \mathfrak{F}$ die Äquivalenz (!)

$$f \sim_x g :\Longleftrightarrow x \in \boldsymbol{k}([f = g]), \tag{9}$$

so daß

$$[f \sim g] = \boldsymbol{k}([f = g]).$$

(a) ist erfüllt, weil $\boldsymbol{k}$ intensiv, (b), weil $\boldsymbol{k}$ isoton und idempotent ist.

7.1. Es ist sehr bemerkenswert, daß die Bedingung $|Y| \geqslant 3$ im Satz von 7., welche eine hinreichend große Abbildungsfamilie $\mathfrak{F}$ sichert, unentbehrlich ist; hierzu ein einfaches *Beispiel*, in welchem $|Y| = 2$, (a) und (b) erfüllt sind, aber die Mengen (7) kein $\frown$-System bilden. Es sei $X := \boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{h}(X')$ bezeichne die abgeschlossene konvexe Hülle von $X' \subset X$. Dann ist

(10) $\qquad \boldsymbol{k} :\, = \boldsymbol{C} \circ \boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{C}$ ($\boldsymbol{C}$ ist Komplementbildung)

ein Kernoperator auf X (aber kein topologischer!). Wir setzen

(11) $\qquad f \sim_x g :\, \leftrightarrows\, x \in \boldsymbol{k}([f = g])$

für $f, g \in \mathfrak{F}$. Wegen $|Y| = 2$ können wir ohne Beschränkung $Y = \{0, 1\}$ setzen, so daß wir es mit der Gesamtheit aller charakteristischen Funktionen auf X zu tun haben, also $[f = g]$ irgend eine Teilmenge M von X sein kann. (a) und (b) nehmen dann die Form an

(12) $\quad$ (a′) $\boldsymbol{k}(M) \subset M$, (b′) $\boldsymbol{k}(M) \subset M_1 > \boldsymbol{k}(M) \subset \boldsymbol{k}(M_1)$
für beliebige Teilmengen M, M_1 von X. Es ist bekannt, daß (12) notwendig (und hinreichend) dafür ist, daß $\boldsymbol{k}$ ein Kernoperator auf X ist; daher sind die Bedingungen (a) und (b) für $\boldsymbol{k}$ gemäß (10) erfüllt. Nun sei $M :\, = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ und $M' :\, = (-1; +\infty)$. Dann ist $\boldsymbol{k}(M) = M$ und $\boldsymbol{k}(M') = M'$, jedoch

$$\boldsymbol{k}(M) \cap \boldsymbol{k}(M') = (-1; 0) \cup (1; +\infty),$$

was *kein* $\boldsymbol{k}(M'')$, $M'' \subset X$, ist.