BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1977

MÜNCHEN 1978

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Grundzustand bei Wechselwirkung

Fritz Bopp

Sektion Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München

Abstract:

The nearly outdated Diracsea is the groundstate of $2Z$ free urfermions. Z equals, according to non-standard analysis, the Ω-infinite number of quantum cells in the phase space. The free urfermions may have a certain bare mass m_0. We assume $m_0 = 0$.

This mass is changed by interactions. Assuming Coulomb- and spinorfield interaction we obtain by variational methods the relation

$$\zeta = \ln \frac{2C}{m} \gg 1;$$

m is the mass of "urfermions in interaction", and C the cutoff radius in momentum space. If m is to be comparable with the electron mass up to some orders of magnitude, the cutoff momentum is extremely large, and may be even Ω-infinite.

The most specular result will probably be that we need both, the Coulomb and the spinorfield interaction. The dimensionless part of the spinorfield coupling constant equals nearly π^2. This large value is necessary to bridge the gap between the kinetic and the Coulomb energy which is smaller by a factor of the order α/π.

We use Ω-analysis extensively. This allows us to use the urfermion vacuum as reference state instead of the "physical vacuum" which is changed by the interaction. Furtheron we use the Schrödinger picture. Poincaré invariance is guaranteed by the existence of operators satisfying the Lie algebra of the group. Spectra may be infinite. They are nevertheless bounded in Ω-analysis because there are always numbers which are smaller or larger than any Ω-infinite number. Variational methods are therefore applicable.

§ 1. Rückkehr zur Diracsee

Die Diracsee[1] ist der Grundzustand von $2Z$ freien, hier als masselos vorausgesetzten Urfermionen.[2] Diese sind nicht unmittelbar mit Elementarteilchen zu identifizieren. Die Urfermionenzahl $2Z$ ist in einem erst noch zu definierenden Sinn unendlich. Z ist gleich der unendlichen Zahl der Quantenzellen im Phasenraum. Der Faktor 2 rührt davon her, daß in jeder Quantenzelle 2 von vier Plätzen besetzt sind.

Von der Diracsee zu sprechen ist heute unüblich. Die Gründe für die Elimination des Diracschen Bildes entfallen jedoch bei Anwendung der Ω-Analysis von Schmieden und Laugwitz,[3] nach der es erlaubt ist, mit unendlichen Zahlen zu rechnen, z. B. mit obigem Z. Bei Anwendungen genügt es nach Schmieden, zu den reellen Zahlen die unendliche Zahl Ω hinzuzufügen.

Wir definieren diese hier als ein Symbol mit dem wir das asymptotische Verhalten von Funktionen erfassen. Sei $f(x)$ eine im reellen Intervall $(0, \infty)$ integrierbare Funktion, so pflegt man das Integral über das ganze Intervall durch

$$I = \int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{\Omega \to \infty} \int_0^\Omega f(x)\,dx$$

zu definieren. Das ist nur sinnvoll, wenn der Grenzwert existiert. Da es jedoch in aller Regel nicht möglich ist, mit dem Grenzwert zu rechnen – man denke etwa an π –, genügt es, die asymptotischen Ausdrücke

$$I(\Omega) = \int_0^\Omega f(x)\,dx \tag{1.1}$$

zu betrachten, in denen Ω stets eine endliche, aber unendlich werdende[4] Zahl ist, kurz gesagt, eine „Ω-unendliche". Das entspricht sogar der Wortbedeutung (unendlich = ohne Ende).

Beschränken wir uns auf solche asymptotischen Ausdrücke, so sind auch divergente Integrale berechenbar. Elementare Beispiele sind:

$$\int_0^\Omega dx = \Omega, \int_0^\Omega 2\,dx = 2\,\Omega, \int_0^\Omega x\,dx = \frac{1}{2}\,\Omega^2.$$

Physikalisch relevant ist die bereits erwähnte Ω-unendliche An-

zahl der Quantenzellen im Phasenraum, für die (mit $\hbar$ als Einheit) gilt:

$$Z = \frac{1}{8\pi^3} \int d^3\boldsymbol{p}\, d^3\boldsymbol{r}. \tag{1.2}$$

Entsprechend sind

$$\tau = \int d^3\boldsymbol{r}, \quad \mu = \int d^3\boldsymbol{p} \tag{1.3}$$

die Volumen des Orts- bzw. des Impulsraumes, die gemäß $\mu\tau = 8\pi^3 Z$ nicht unabhängig sind. Für die Integrationselemente schreiben wir im weiteren (1.3) entsprechend $d^3\boldsymbol{r} = d\tau$, $d^3\boldsymbol{p} = d\mu$.

Klarerweise sind ebene Wellen Ω-analytisch normierbar. Die Norm von

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\, e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$$

ist gleich 1. Damit sind die ebenen Wellen Vektoren im Ω-analytisch erweiterten Hilbertraum. Es ist zu erwarten, daß die Spektraltheorie bei Ω-analytischer Definition der Quadratintegrabilität zu weniger einengenden Bedingungen für Operatoren führt als bisher.[5]

Ohne etwaige neue Grenzen von vorneherein abzustecken, werden wir so rechnen, als brauchten wir keine zu beachten. Am Ende werden neue Grenzen erkennbar. Sie rühren davon her, daß mit Meßdaten vergleichbare Ergebnisse endlich sein müssen. Das führt u. a. zur Bestimmung der Werte spezieller Kopplungskonstanten.

Anders als bisher sind Ω-unendliche Zwischenergebnisse zulässig. Insbesondere können wie bei ebenen Wellen Ω-unendlich Normen oder Ω-unendlich kleine Normierungskonstanten vorkommen. Darum brauchen Fockreihen nicht konvergent zu sein. Die übliche schwache Konvergenzforderung wird durch eine noch schwächere ersetzt. Nur diese läßt sich physikalisch rechtfertigen. Darum meinen wir, daß der Ω-analytisch erweiterte Hilbertraum der Physik angemessen ist.

Bei Wechselwirkung ist der Grundzustand von der Diracsee freier masseloser Urfermionen verschieden. Man kann ihn kaum in Strenge ausrechnen. Doch liefern Testvektoren $|\, T >$ bessere Darstellungen des wahren Grundzustands $|\, G >$ als die Diracsee

$|D>$ freier masseloser Urfermionen, wenn für den Erwartungswert

$$\langle T|H|T\rangle < \langle D|H|D\rangle$$

gilt.[6] Speziell wählen wir als Testvektoren Diracseen $|m>$ für Urfermionen mit endlicher Masse. Sie liefern Erwartungswerte

$$W_m = \langle m|H|m\rangle \tag{1.4}$$

deren durch

$$\frac{\partial W_m}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial^2 W_m}{\partial m^2} > 0 \tag{1.5}$$

definiertes Minimum Auskunft darüber gibt, wie durch Wechselwirkung Masse entsteht. Es scheint, daß die Testvektoren $|m>$ schon eine gute Approximation liefern. Jedenfalls haben zahlreiche, physikalisch plausible Varianten des Testansatzes stets nur zu Energieanhebungen geführt.

Die Rechnungen werden im Schrödingerbild durchgeführt. Die Poincaréinvarianz wird durch die Existenz von Operatoren P^μ, $M^{\mu\nu}$ gewährleistet, welche der Liealgebra der Poincarégruppe genügen.[7] Die Dynamik beherrscht man vollständig, wenn man nur im Ganzen ruhende Systeme betrachtet:

$$H|\Phi> \equiv P|\Phi> = W|\Phi>, \quad \boldsymbol{P}|\Phi> = \\ = (P^1, P^2, P^3)|\Phi> = 0. \tag{1.6}$$

Lösungen für Systeme mit einem Gesamtimpuls $\boldsymbol{P} \neq 0$ erhält man durch eigentliche Lorentztransformationen mit $\boldsymbol{M}^0 = (M^{10}, M^{20}, M^{30})$, also rein kinematisch.

Spinorfeldtheorien sind nicht nur Poincaré-, sondern auch phaseninvariant, so daß die durch

$$N = \int d\tau\, \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\, \psi(\boldsymbol{r}) \tag{1.7}$$

definierte Anzahl der Urfermionen ein universelles Integral ist. Die Urfermionenzahl kann sich darum niemals ändern. Die Eigenlösungen von (1.6) beschreiben daher unabhängige, durch N gekennzeichnete Welten. Die Anzahl der Quantenzustände innerhalb einer Welt mit bestimmtem N ist gleich $\binom{4Z}{N}$. Danach liefert $N = 2Z$ die Welt mit größter Variabilität. Es ist diejenige, die man seit Dirac allein mit der wirklichen Welt konfrontiert. Die Gl. (1.6) sind also durch

$$N \mid \Phi > = 2 Z \mid \Phi > \tag{1.8}$$

zu ergänzen. Die elektrische Ladung ist nach Dirac durch

$$Q = N - 2 Z \tag{1.9}$$

definiert,[8] so daß die wirkliche Welt als Ganzes ungeladen ist:

$$Q \mid \Phi > = 0.$$

Wäre diese Welt im Grundzustand, so gäbe es kein Geschehen. Sich verändernde Dinge in der Welt zeigen, daß sie sich in einem angeregten Zustand befindet. Wir haben zunächst danach zu fragen, was Dinge sind und wie sie sich verändern.

Von einem einzelnen Ding kann man genaugenommen nur reden, wenn man von seiner Wechselwirkung mit der Umwelt absehen darf. Mathematisch haben wir darum nach Lösungen zu suchen, die ein Ding so beschreiben, als wäre es allein auf der Welt. Zwei Dinge in großem Abstand lassen sich durch Zustandsvektoren beschreiben, die man näherungsweise aus denen der einzelnen Dinge berechnen kann. Ihre Wechselwirkung ergibt sich daraus, daß man die Näherung zu verbessern sucht. Bei hinreichend starker Wechselwirkung ist es nicht mehr sinnvoll, von Einzeldingen zu reden. Wir haben es nur noch mit dem Gesamtsystem zu tun.

Einzeldinge können Elementarteilchen, Atome, Moleküle, Makrokörper und u. U. sogar die ganze Welt sein. Wir betrachten speziell Elementarteilchen, also Dinge, die man nicht mehr in Teilsysteme zerlegen kann, welche allein existenzfähig sind. Da eine solche Zerlegung auch im besten Fall nur näherungsweise möglich ist, kann die Entscheidung darüber, ob ein System elementar oder zusammengesetzt ist, vom erforderlichen Grad der Näherung abhängen, so daß es Grenzfälle geben mag, bei denen sich die Entscheidung mit der zu bewältigenden Aufgabe ändert.

Einzeldinge sind spezielle angeregte Zustände, die räumlich begrenzte, d. h. nach außen hinreichend rasch abfallende Abweichungen vom Grundzustand sind. Natürlich wird das bei der Bestimmung solcher Lösungen auftretende Singularitätenproblem durch die Rückkehr zur Diracsee nicht beseitigt. Darum kommt man um einen Cutoff im Impulsraum nicht herum. Er besteht in

einer Begrenzung des Impulsvolumens. Da im Ruhsystem von der Lorentzinvarianz nur die Drehinvarianz übrig bleibt, die durch den Cutoff nicht gestört werden darf, muß die Impulsbegrenzung kugelsymmetrisch sein. Wir fordern daher, daß nur die Impulse

$$p = |\boldsymbol{p}| \leq C \tag{1.10}$$

ins Spiel kommen. Alle bisherigen Ergebnisse sprechen dafür, daß man den Cutoff C als Ω-unendlich voraussetzen darf.

Die Lorentzinvarianz des Gesamtsystems wird dadurch nicht gestört, weil die Kugel in (1.10) bei eigentlichen Lorentztransformationen in Ellipsoide übergeht, die für die relativistische Massenveränderlichkeit sorgen. Doch könnte es sein, daß die Kinematik auslaufender Teile eines Gesamtsystems von der freier Teilchen verschieden ist.

Nehmen wir zunächst einen endlichen Cutoff C an, so muß das Additionstheorem für Impulse gestört sein. Diese Störung ist klein, wenn die beteiligten Impulse klein gegen C sind. Da eine Spinorfeldtheorie im Prinzip auch die Gesamtwelt als Lösung enthalten muß, (auch wenn wir weit davon entfernt sind, kosmologische Probleme quantenphysikalisch im Griff zu haben), muß der Cutoff in Einheiten $\hbar$ und c groß gegen die Weltmasse sein, d. h. etwa

$$C \gg 10^{83}\, m_e \tag{1.11}$$

(m_e = Masse des Elektrons). Das ist nach früheren Cutoffrechnungen der Quantenelektrodynamik zu erwarten.[9] Hier wird sich zeigen, daß im Einklang damit für die Wechselwirkungsmasse m der Urfermionen die Ungleichung

$$\ln \frac{2C}{m} > \frac{\pi}{2\alpha} \tag{1.12}$$

gilt, was der Bedingung (1.11) nicht widerspricht und wodurch ein Ω-unendlicher Cutoff nicht ausgeschlossen wird.

Damit ist auch die innere Lorentzinvarianz praktisch nicht gefährdet. Doch könnte man es für „unschön" halten, die Lorentzinvarianz auch nur weit oberhalb kosmologischer Dimensionen aufzugeben, und erst recht, das mittels eines Cutoffs zu tun. Letzteres ist zuzugeben. Doch kann man nicht ausschließen, daß

der Impulsraum wie der Ortsraum endlich ist, so daß die Lorentzinvarianz in äußerst kleinen Bereichen $\left(r < \exp\left(-\frac{\pi}{2\alpha}\right)\frac{\hbar}{me}\right)$ gestört wird.[10] Ein endlicher oder Ω-unendlicher Impulsraum ist sogar wünschenswert. Er könnte dem zwar strikt bewiesenen, aber physikalisch kaum akzeptablen Satz den Boden entziehen, nach dem es klassisch physikalisch bei strenger Gültigkeit der relativistischen Kinematik für auslaufende Massenpunkte keine Wechselwirkung geben kann.

Zunächst kümmern wir uns nur um den Grundzustand. Er hängt von der Wahl der Wechselwirkung ab. Wir berücksichtigen die Coulombwechselwirkung und eine Spinorfeldwechselwirkung. Die Abweichungen von der Lorentzinvarianz sind nicht so einschneidend wie es auf den ersten Blick scheint. Da wir im Ruhsystem arbeiten, kommt beim Übergang zu Gesamtimpulsen $\boldsymbol{P} \neq 0$ die Lorentzkontraktion des Coulombfeldes von selbst ins Spiel. Gleichwohl haben die quantitativen Ergebnisse nur größenordnungsmäßig Bedeutung. Der Beitrag der vernachlässigten Wechselwirkung mit Bosonen konkurriert durchaus mit der Coulombwechselwirkung, zumal der große der klassisch elektrostatischen Wechselwirkung entsprechende Beitrag ohne Einfluß auf die Wechselwirkungsmasse m der Urfermionen ist. Das vereinfachte Modell ist darum nur methodisch von Bedeutung.

Bei der Frage nach dem Grundzustand sind vor allem zwei Ergebnisse interessant. Das erste liefert (1.12). Nehmen wir an, was sich später bestätigen wird, daß die Massen der Elementarteilchen bis auf wenige Größenordnungen mit m übereinstimmen, so ergibt sich wie erwähnt, daß der Cutoff mindestens praktisch unendlich groß ist.

Das zweite Ergebnis betrifft die Fermionenkopplungskonstante. Ihre Dimension ist gleich einem Längenquadrat. In der Ω-Analysis kann man dafür o. B. d. A. schreiben:

$$g = \lambda / C^2.$$

Darin ist λ dimensionslos. Überraschenderweise ergibt sich für λ ein endlicher Wert ($\lambda \approx \pi^2$). Die Kopplungskonstante erweist sich also als Ω-unendlich klein. Nur eine solche, ohne Ω-Analysis unmögliche Annahme führt zu physikalisch diskutablen Ergebnissen. Im weiteren wird sich sogar zeigen, daß man für alle Kopp-

lungskonstanten in der Spinorfeldwechselwirkung bestimmte Werte zu erwarten hat. Jedoch ist eine Möglichkeit zur Berechnung der Feinstrukturkonstante nicht in Sicht. Sie ist für die Mindestgröße des Cutoffradius verantwortlich.

Die Urfermionenmasse ist insofern mit der renormierten Masse vergleichbar, als man im weiteren mit $|m>$ als Grundzustand zu rechnen hat, solange man keinen besseren und noch brauchbaren Testvektor findet. Sie unterscheidet sich jedoch von der renormierten Masse darin, daß man sie nicht unmittelbar mit einer Teilchenmasse identifizieren kann. Es ist von vorneherein ausgeschlossen, sie je nach dem Problem mit verschiedenen Massen identifizieren zu wollen. Aus Dimensionsgründen folgt außerdem, daß man für Teilchenmassen M_1, M_2 . . M_i . . nicht Differenzen, sondern Verhältnisse M_i/m zu erwarten hat.

Dem Ergebnis nach liefert das Zusammenspiel von Coulomb- und Spinorfeldwechselwirkung eine Regularisierung. Diese wird jedoch nicht durch ad hoc eingeführte Parameter erreicht. Sie ergibt sich vielmehr aus der Forderung der Konvergenz bei Daten und führt zur Bestimmung der Kopplungskonstanten.

§ 2. Erwartungswert der kinetischen Energie

Zunächst erinnern wir an die Diracsee $|m>$, die zu freien Urfermionen mit der Masse m gehört. Wir beginnen mit einem allgemeineren Typ von Zustandsvektoren, die seeartige Zustände beschreiben.

Da wir elementar algebraisch rechnen dürfen, können wir $\boldsymbol{p}$ in $\psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{p})$, $\psi_\alpha(\boldsymbol{p})$ wie α als Matrixindex behandeln, unter ψ eine einspaltige und unter $\psi^\dagger$ eine einzeilige Matrix verstehen. Durch Transposition entstehen daraus die Matrizen ψ^T und $\psi^{\dagger\mathsf{T}} \equiv \psi^{\dagger\dagger}$. Quadratische Matrizen A haben die Matrixelemente $A_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$. Somit ist z. B.

$$\psi^\dagger A \psi \equiv \sum_{\alpha\beta} \int d^3\boldsymbol{p}_1 d^3\boldsymbol{p}_2 \psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\, A_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)\, \psi_\beta(\boldsymbol{p}_2).$$

Kehren wir von Kontinuumsmatrizen zu 4×4-Matrizen zurück, so gilt

$$\psi^\dagger A \psi \equiv \int d^3\boldsymbol{p}_1 d^3\boldsymbol{p}_2 \psi^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\, A(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1)\, \psi(\boldsymbol{p}_2)$$

Seeartige Zustände definieren wir wie folgt

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} |S> &= e^{i\eta}\,|o> \\ \eta &= \tfrac{1}{2}(\psi^{\mathsf{T}} A \psi^{\dagger\dagger\prime} + \psi^{\mathsf{T}} A \psi). \end{aligned}$$

Darin ist η nur für

$$(2.2) \qquad A^{\mathsf{T}} = -A$$

von o verschieden. Bringt man A auf Diagonalform (was möglich sein soll), so kann man die Phasenfaktoren als unitäre Matrix abspalten. Somit kann man ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit

$$(2.3) \qquad A = BU,\ B^{\dagger} = B,\ UU^{\dagger} = 1,\ U^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}} = -BU$$

setzen und sogar B als positiv definit betrachten gemäß $u^{\dagger} B u > o$ für $u \neq o$, sonst beliebig.

Damit erhält man die Vertauschungsrelationen

$$i[\eta, \psi] = -iBU\psi^{\dagger\dagger},\ i[\eta, \psi^{\dagger\dagger}] = -iU^{\mathsf{T}} B\psi,$$

sowie die Transformation

$$\begin{aligned} \psi' &= e^{i\eta}\,\psi e^{-i\eta} \\ &= \psi + \tfrac{1}{1!}(-iB)\,U\psi^{\dagger\dagger} + \tfrac{1}{2!}(-iB)^2\psi + \tfrac{1}{3!}(-iB)^3\,U\psi^{\dagger\dagger}_{+}\ldots \end{aligned}$$

Mit

$$(2.4) \qquad C = \sin B$$

ergibt sich daraus die Transformation

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} \psi' &= \sqrt{1 - C^2}\,\psi - iCU\psi^{\dagger\dagger}, \\ \psi'^{\dagger} &= \psi^{\dagger}\sqrt{1 - C^2} + i\,\psi^{\mathsf{T}} U^{\dagger} C. \end{aligned}$$

Wir fragen, unter welchen Bedingungen für C und U der Vektor $|S>$ Eigenlösung von N ist:

$$\psi^{\dagger}\psi\,|S> = n\,|S>.$$

Nach (2.1) kann man dafür schreiben:

$$\psi'^{\dagger}\psi'\,|o> = n\,|o>,$$

und Substitution von (2.5) ergibt die beiden Gleichungen

$$\psi^\dagger \sqrt{1-C^2}\, C U \psi^{\dagger\dagger} = 0, \tag{2.6}$$
$$n = \mathrm{Spur}\,(U^\dagger C^2 U) = \mathrm{Spur}\,(C^2).$$

Die Matrix der 2-Fermionen-Bedingung muß symmetrisch sein: Wenn U gemäß

$$U^\top = -U \tag{2.7}$$

ist, folgt aus (2.3) und (2.4)

$$B^\top = U^\dagger B U, \quad C^\top = U^\dagger C U$$

Damit erhält man aus der Symmetrieforderung:

$$(\sqrt{1-C^2}\, C U)^\top = -U C^\top \sqrt{1-C^{\top 2}}$$
$$= -C\sqrt{1-C^2}\, U = +\sqrt{1-C^2}\, C U,$$

also

$$C\sqrt{1-C^2} = 0.$$

Daraus erhält man die Eigenwerte $+1$, -1 oder 0.

Das Vorzeichen überträgt sich nach (2.4) auf B und kann nach (2.3) auf U abgewälzt werden, so daß wegen $u^\dagger B u > 0$ o. B. d. A.

$$C^2 = C, \quad n = \mathrm{Spur}\, C \tag{2.8}$$

angenommen werden kann. Die Eigenwerte $+1$ beziehen sich auf einfach besetzte Zustände.

Die Einheitsmatrix hat die Elemente $\delta_{\alpha\beta}\,\delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)$. Daraus folgt

$$\mathrm{Spur}\ 1 = 4\,\delta(\boldsymbol{p} = 0) \int d^3\boldsymbol{p} = 4Z.$$

Ein seeartiger $2Z$-Fermionenzustand wird also durch

$$C = \frac{1-\Theta}{2}, \quad \sqrt{1-C^2} = \frac{1+\Theta}{2}, \tag{2.9}$$
$$\Theta^+ = \Theta, \quad \Theta^2 = 1, \ \mathrm{Spur}\ \Theta = 0$$

beschrieben. Die Transformationen (2.5) lauten in diesem Fall

$$\psi' = \frac{1+\Theta}{2}\,\psi - i\,\frac{1-\Theta}{2}\, U \psi^{\dagger\dagger}, \tag{2.10}$$
$$\psi'^\dagger = \psi^\dagger \frac{1+\Theta}{2} + i\,\psi^\top U^\dagger \frac{1-\Theta}{2}.$$

Solche Seelösungen sind im allgemeinen inhomogen. Es gibt zwar noch keine Schaumkronen, wohl aber Wellen auf der See.

Eine glatte See erfordert, daß η in (2.1) translationsinvariant ist, d. h. im Impulsraum, daß η gegen die Transformation

$$\psi \to e^{i\zeta}\psi, \quad \psi^\dagger \to \psi^\dagger e^{-i\zeta},$$
$$\zeta = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_1\,\delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2))$$

invariant sein muß. Daraus folgt, daß in $\psi^\dagger A\,\psi^\dagger$ nur Paare aus $\psi^\dagger(\boldsymbol{p})$ und $\psi^\dagger(-\boldsymbol{p})$ vorkommen dürfen, daß also die Matrixelemente von U zu $\delta(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$ proportional sind. Danach ist es angemessen, zu 4×4-Matrizen zurückzukehren; (2.10) lautet dann:

$$\begin{aligned} \psi'(\boldsymbol{p}) &= \frac{1+\Theta(\boldsymbol{p})}{2}\,\psi(\boldsymbol{p}) - i\,\frac{1-\Theta(\boldsymbol{p})}{2}\,\tau\psi^{\dagger\dagger}(-\boldsymbol{p}), \\ \psi'^\dagger(\boldsymbol{p}) &= \psi^\dagger(\boldsymbol{p})\,\frac{1+\Theta(\boldsymbol{p})}{2} + i\,\psi^{\mathsf{T}}(-\boldsymbol{p})\,\tau\,\frac{1-\Theta(\boldsymbol{p})}{2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Man kann Θ und τ so bestimmen, daß $|\,S>$ Eigenlösung freier Urfermionen mit der Masse m ist. Der Schrödingeroperator lautet in diesem Fall

$$H_0 = \int d^3\boldsymbol{p}\,\psi^\dagger(\boldsymbol{p})\,\mathscr{H}\,\psi(\boldsymbol{p});\quad \mathscr{H} = \varrho_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} + m\varrho_3; \tag{2.12}$$

(Darstellung: $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}^P \times 1$, $\boldsymbol{\sigma} = 1 \times \boldsymbol{\sigma}^P$; $\sigma^P = 2\times 2$-Paulimatrizen). Ähnlich wie bei N folgt aus

$$H_0\,|\,S> = W_0\,|\,S> : H_0'\,|\,0> = W_0\,|\,0>. \tag{2.13}$$

Man erhält die 2-Fermionen-Bedingung

$$\int d^3\boldsymbol{p}\,\psi^\dagger(\boldsymbol{p})\,\frac{1+\Theta}{2}\,\mathscr{H}\,\frac{1-\Theta}{2}\,\psi^{\dagger\dagger}(-\boldsymbol{p}) = 0 \tag{2.14}$$

und die Spurgleichung

$$W_0 = \delta(\boldsymbol{p} = 0)\int d^3\boldsymbol{p}\ \mathrm{Spur}\,(\tau^\dagger\,\frac{1-\Theta}{2}\,\mathscr{H}\,\frac{1-\Theta}{2}\,\tau)$$

die mit Rücksicht auf die Spur $\mathscr{H} = 0$ und nach zyklischer Faktorvertauschung in

$$W_0 = -\frac{1}{2}\,\delta(\boldsymbol{p} = 0)\int d^3\boldsymbol{p}\ \mathrm{Spur}\,(\Theta\,\mathscr{H}) \tag{2.15}$$

übergeht. Θ kann man als Linearkombination der 16 Diracmatrizen 1, τ_i, σ_k, $\tau_i\sigma_k$ betrachten. Von diesen Matrizen liefern nur $\varrho_1\sigma_3$ und ϱ_3 Beiträge zur Spur. Wir setzen daher

$$\Theta = \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) + \varrho_3 g(\boldsymbol{p}).$$

Wegen $\Theta^2 = 1$ würden weitere Glieder die Faktoren $\boldsymbol{f}$ und g verkleinern, die Energie also anheben. Sie entfallen daher. Aus $\Theta^2 = 1$ folgt:

$$\boldsymbol{f}^2 + g^2 = 1, \tag{2.16}$$

und Substitution in (2.15) ergibt

$$W_0 = -2\,\delta(\boldsymbol{p} = 0) \int d^3\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) + mg(\boldsymbol{p})).$$

Daraus folgt

$$W_0 = -2Z \int d^3\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{f} + mg) / \int d^3\boldsymbol{p}. \tag{2.17}$$

Das Zählerintegral muß unter Einhaltung der Nebenbedingung (2.16) maximal werden. Daraus folgt unmittelbar

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{p}/\omega,\ g = m/\omega,\ \omega = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2},$$

also

$$\Theta = \frac{\varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} + m p_3}{\omega},\ \omega = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}. \tag{2.18}$$

Da $\mathscr{H}$ mit Θ vertauschbar ist, gilt (2.14), so daß $|\,S>$ Eigenlösung ist. Das gilt unabhängig von der Wahl der Matrix τ, für die nur $\tau^\dagger \tau = 1$ und $\tau^\top = -\tau$ gefordert ist. Gewöhnlich setzt man $\tau = \sigma_2$, was bei der Berechnung der Coulombenergie wesentlich wird. Für die Energie erhält man aus (2.15):

$$W_0 = -2Z \int \sqrt{p^2 + m^2}\, p^2 dp / \int p^2 dp$$

Hier ist es bequem, $\boldsymbol{p} \to C\boldsymbol{p}$ und $m \to Cm$ zu ersetzen, wodurch der evt. Ω-unendliche Cutoff zur Einheit wird. Man erhält

$$W_0 = -6CZ \int_0^1 \sqrt{p^2 + m^2}\, p^2 dp.$$

Solchen elementaren, manchmal aber sehr weitläufigen Integralen begegnen wir noch öfters. Die Integrationen werden im Anhang behandelt. Das Ergebnis in (A. 1) lautet

$$W_0 = -\frac{3}{2} CZ \left((1 + \tfrac{1}{2} m^2) \sqrt{1 + m^2} - \tfrac{1}{2} m^4 \zeta) \right), \tag{2.19}$$

$$\zeta = \ln \frac{1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}.$$

Der Faktor CZ ist für fast alle seeartigen Zustände charakteristisch. Jede Quantenzelle trägt gleich viel zur Energie bei. Die Energie pro Zelle ist durch C bestimmt. Sie nimmt mit wachsendem m ab, bleibt aber oberhalb $-2C\sqrt{1+m^2}$, der Energie jener doppelt besetzten Zelle, deren Energie minimal ist, nämlich oberhalb $-2\sqrt{p^2+m^2} \to -2C\sqrt{p^2+m^2}$ für $p=1$.

Das Ergebnis in (2.18) ist bekannt und kann leicht erraten werden. Die Ω-analytische Darstellung der Energie des Grundzustands in (2.19) bzw. (2.20) ist nicht nur für das weitere von Interesse, sondern auch in Hinblick auf die Struktur CZ der Divergenz. Außerdem zeigt die ausführliche Ableitung an einem einfachen Beispiel die Brauchbarkeit der Variationsmethode im Bereich der Ω-Zahlen. Die durch (2.18) definierte Transformation (2.11) ist die nämliche, mit der man die Diracsee eliminiert.

Aus den in § 1 angegebenen Gründen gehen wir nun von der Voraussetzung aus, daß die bare Masse gemäß

$$\mathscr{H} = \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} \tag{2.20}$$

verschwindet. Speziell dafür folgt aus (2.19):

$$\Theta = \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot e, \quad \boldsymbol{p} = p\boldsymbol{e}; \quad W_0 = -\frac{3}{2} CZ. \tag{2.21}$$

In diesem Fall ist die durch (2.18) definierte Diracsee $|\, m >$ zur Masse m keine Eigenlösung. Doch interessieren wir uns in Hinblick auf die Wechselwirkungen für den Erwartungswert des neuen Bewegungsoperators. Aus

$$\text{Spur}\,(\Theta\,\mathscr{H}) = \text{Spur}\,\left(\frac{\varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} + m\varrho_3}{\omega} \cdot \varrho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}\right) = \frac{4p^2}{\sqrt{p^2+m^2}}$$

erhalten wir folgendes Energieintegral

$$W_0 = -6\,CZ \int \frac{p^4\,dp}{\sqrt{p^2+m^2}}$$

d. i. nach (A. 2) gleich

$$W_0 = -\frac{3}{2} CZ \left(\left(1 - \frac{3}{2} m^2\right) \sqrt{1+m^2} + \frac{3}{2} m^4 \zeta \right). \tag{2.22}$$

Klarerweise steigt jetzt die Energie mit wachsendem m an, da wir uns vom tiefsten Eigenzustand entfernen. Dieses Ergebnis wird in § 4 in die Massengleichung eingehen.

§ 3. Erwartungswerte der Coulomb- und Spinorfeldenergie

Den Operator der Coulombwechselwirkung schreiben wir in folgender Form

$$(3.1)\qquad H_{\text{coul}} = \frac{\alpha}{4\pi^2}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{k^2}\, Q^\dagger(\boldsymbol{k})\, Q(\boldsymbol{k}),$$

$$Q(\boldsymbol{k}) = \int d^3\boldsymbol{p}_1\, d^3\boldsymbol{p}_2\, \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)\, \psi^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\, \psi(\boldsymbol{p}_2).$$

Mit der zur Masse m gehörigen Diracsee $|\, m >$ berechnen wir den Erwartungswert

$$W_{\text{coul}} = < m \,|\, H_{\text{coul}} \,|\, m > \; = < \text{o} \,|\, H'_{\text{coul}} \,|\, \text{o} >$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi^2}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{k^2} < \boldsymbol{k} \,|\, \boldsymbol{k} >, \quad |\, \boldsymbol{k} > \; = Q'(\boldsymbol{k}) \,|\, \text{o} >.$$

Darin ist (mit $\Theta_i = \Theta(\boldsymbol{p}_i)$ und $\tau = \sigma_2$):

$$|\, \boldsymbol{k} > \; = -\, i \int d^3\boldsymbol{p}_1\, d^3\boldsymbol{p}_2\, \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$$

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\, \frac{1+\Theta_1}{2}\, \frac{1-\Theta_2}{2}\, \sigma_2\, \psi^{\dagger\dagger}(-\boldsymbol{p}_2) \,|\, \text{o} >$$

$$+ \int d^3\boldsymbol{p}_1\, d^3\boldsymbol{p}_2\, \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$$

$$\psi^\dagger(-\boldsymbol{p}_1)\, \sigma_2\, \frac{1-\Theta_1}{2}\, \frac{1-\Theta_2}{2}\, \sigma_2\, \psi^{\dagger\dagger}(-\boldsymbol{p}_2) \,|\, \text{o} >.$$

Das zweite Integral liefert den Spurterm

$$\delta(\boldsymbol{k}) \int d^3\boldsymbol{p}\ \text{Spur}\left(\frac{1-\Theta}{2}\right) |\, \text{o} > \; = \frac{8\pi}{3}\, C^3\, \delta(\boldsymbol{k}) \,|\, \text{o} >.$$

Dieser Vektor ist zu dem in der ersten Zeile von $|\, k >$ orthogonal, so daß es keine gemischten Beiträge zur Coulombenergie gibt. Der Beitrag des Spurterms lautet

$$W^{\circ}_{\text{coul}} = \frac{16\alpha}{9}\, C^6 \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{k^2}\, \delta(\boldsymbol{k})^2.$$

Wählt man als Ω-analytische δ-Funktion z. B.

$$\delta(\boldsymbol{k}) = \begin{cases} 3/4\pi\varkappa^3 & f.\ k \leq \varkappa, \\ o & f.\ k > \varkappa, \end{cases}$$

worin $1/\varkappa$ Ω-unendlich ist, so folgt

$$W^{\circ}_{\text{coul}} = \frac{4\alpha}{\pi}\left(\frac{C}{\varkappa}\right)^6 \varkappa. \tag{3.2}$$

Bis auf einen Zahlenfaktor von der Ordnung 1 stimmt $1/\varkappa$ mit dem räumlichen Cutoffradius R überein, so daß $(C/\varkappa)^6$ von der Größenordnung Z ist. Somit ist der Beitrag zur Coulombenergie zu Z^2/R proportional, was schon klassisch physikalisch einleuchtet. Der Term ist von m unabhängig und darum ohne Einfluß auf die Dynamik. Man darf ihn Dirac folgend vergessen.

Dagegen kann man den Beitrag zur Coulombenergie, der vom ersten Integral in $|k>$ herrührt, nicht weglassen. Auch wenn man die Ladung nach (1.3) durch $Q = N - 2Z$ definiert, so daß sie für $N = 2Z$ verschwindet, gibt es Ladungsschwankungen, deren Beitrag zur Coulombenergie sich aus

$$< \boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{k} > = \int d^3\boldsymbol{p}_1 \ldots d^3\boldsymbol{p}_4\, \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)\, \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_4) \cdot$$
$$\cdot < 0 \mid \psi^{\mathsf{T}}(-\boldsymbol{p}_2)\, \sigma_2 \frac{1-\Theta_2}{2} \frac{1+\Theta_1}{2} \psi(\boldsymbol{p}_1)\, \psi^{\dagger}(\boldsymbol{p}_3)$$
$$\frac{1+\Theta_3}{2} \frac{1-\Theta_4}{2} \sigma_2 \psi^{\dagger\mathsf{T}}(-\boldsymbol{p}_4) \mid 0 >$$

berechnet. Durch Vertauschung von $\psi(\boldsymbol{p}_1)$ mit den rechts folgenden Operatoren erhält man für den Erwartungswert in der zweiten Zeile

$$\delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3) < 0 \mid \psi^{\mathsf{T}}(-\boldsymbol{p}_2)\, \sigma^2 \frac{1-\Theta_2}{2} \frac{1+\Theta_1}{2} \frac{1-\Theta_4}{2} \sigma_2$$
$$\psi^{\dagger\mathsf{T}}(-\boldsymbol{p}_4) \mid 0 >$$
$$+ \delta(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_4) < 0 \mid \psi^{\mathsf{T}}(-\boldsymbol{p}_2)\, \sigma_2 \frac{1-\Theta_2}{2} \frac{1+\Theta_1}{2} \sigma_2 \frac{1-\overline{\Theta}_1^{\mathsf{T}}}{2} \frac{1+\Theta_3}{2}$$
$$\psi^{\dagger\mathsf{T}}(\boldsymbol{p}_3) \mid 0 >, \quad \Theta_i = \Theta(\boldsymbol{p}_i), \quad \overline{\Theta}_i = \Theta(-p_i).$$

Wegen $\sigma_2 \frac{1-\overline{\Theta}_1^{\mathsf{T}}}{2} = \frac{1-\Theta_1}{2} \sigma_2$, wewegen nun $\tau = \sigma_2$ erforderlich ist, verschwindet der zweite Ausdruck. Der erste liefert den Spurterm

$$\frac{1}{4}\, \delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3)\, \delta(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_4)\, \text{Spur}\, (1 + \Theta_1)\, (1 - \Theta_2)$$
$$= \delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3)\, \delta(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_4)\, \left(1 - \frac{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 + m^2}{\omega_1 \omega_2}\right).$$

Substitution in die Coulombenergie ergibt

$$W_{\text{coul}} = \frac{\alpha}{4\pi^2}\, \delta(\boldsymbol{p} = 0) \int \frac{d^3\boldsymbol{p}_1\, d^3\boldsymbol{p}_2}{(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)^2} \left(1 - \frac{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 + m^2}{\omega_1 \omega_2}\right). \tag{3.3}$$

Ersetzt man $\boldsymbol{p}_i \to C\,\boldsymbol{p}_i$, $m \to Cm$ und integriert man über die Richtungen von $\boldsymbol{p}_1$ und den Azimutwinkel von $\boldsymbol{p}_2$ um $\boldsymbol{p}_1$, so ergibt sich

$$W_{\text{coul}} = \frac{3a}{2\pi}\, CZ \int \left(1 - \frac{p_1\, p_2}{\omega_1\, \omega_2}\, \xi - \frac{m^2}{\omega_1\, \omega_2}\right) \frac{p_1^2\, p_2^2\, dp_1\, dp_2}{p_1^2 + p_2 - 2\, p_1\, p_2\, \zeta}\, d\xi.$$

Die weitläufigen Integrationen führen zu der Gesamtenergie aus (A. 9):

$$(3.4)\quad W_{\text{coul}} = \frac{a}{\pi}\, CZ \left\{ \left(1 + \frac{1}{4} m^2\right) - \left(1 + m^2\right)^2 \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}\right) + \left((1 + m^2)^2 - (1 + \frac{3}{2} m^2)\sqrt{1 + m^2}\right)\zeta + \frac{3}{4} m^4 \zeta^2 \right\}.$$

Speziell im Grenzfall $m = 0$ erhält man

$$W_{\text{coul}} = \frac{a}{\pi}\, CZ\, (1 - \ln 2).$$

Für die Spinorfeldwechselwirkung verwenden wir folgenden Operator:

$$(3.5)\qquad H_{\text{sp}} = \frac{\lambda}{8\pi^3\, C^2} \int d^3\boldsymbol{k}\; \boldsymbol{S}^\dagger(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{S}(\boldsymbol{k}),$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{k}) = \int d^3\boldsymbol{p}_1\, d^3\boldsymbol{p}_2\, \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)\, \psi^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\, \boldsymbol{\gamma}\, \psi(\boldsymbol{p}_2).$$

Dabei wählen wir die Heisenbergsche Wechselwirkungsmatrix

$$(3.6)\qquad \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma} - \varrho_1 \times \varrho_1;$$

ohne damit spezielle Ansprüche verbinden zu wollen. Für die folgenden Ergebnisse ist es beinahe gleichgültig, welchen Ansatz wir für $\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}$ machen.

Der Erwartungswert berechnet sich ähnlich wie der der Coulombenergie. Aus

$$\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{k})\,|\,0> = \int d^3\boldsymbol{p}_1\, d^3\boldsymbol{p}_2\, \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)\, \psi'^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\, \boldsymbol{\gamma}\, \psi'(\boldsymbol{p}_2)\,|\,0>$$

erhält man den Spurterm

$$\delta(\boldsymbol{k}) \int d^3\boldsymbol{p}\; \text{Spur}\left(\frac{1 - \Theta}{2}\, \boldsymbol{\gamma}\right) = 0,$$

der für alle in (4.2) vorkommenden $\boldsymbol{\gamma}$ verschwindet. Der 2-Fermionen-Term

$$-i\int d^3\boldsymbol{p}_1\, d^3\boldsymbol{p}_2\, \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\psi^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\frac{1+\theta_1}{2}\boldsymbol{\gamma}\frac{1-\theta_2}{2}\sigma_2\,\psi^{\dagger\dagger}$$
$$(-\boldsymbol{p}_2)\,|\,0>$$

liefert genau wie im Coulombfall den Erwartungswert

$$<0\,|\,\boldsymbol{S}'^\dagger(\boldsymbol{k})\,\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{k})\,|\,0>$$
$$=\delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3)\,\delta(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_4)\,\mathrm{Spur}\left(\frac{1-\theta_2}{2}\boldsymbol{\gamma}\,\frac{1+\theta_1}{2}\boldsymbol{\gamma}\right).$$

In $1-\Theta$ stecken die Matrizen 1, $\varrho_1\boldsymbol{\sigma}$, ϱ_3. Sie transformieren sich nach (4.2) gemäß folgender Tafel

$$\begin{aligned} X &= 1, & \varrho_1\boldsymbol{\sigma}, & & \varrho_3;\\ \boldsymbol{\gamma}X\boldsymbol{\gamma} &= 2, & -2\,\varrho_1\boldsymbol{\sigma}, & & +4\,\varrho_3. \end{aligned}$$

Somit lautet obige Spur

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Spur}\left(1-\frac{\varrho_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_1}{\omega_2}-\frac{m\varrho_3}{\omega_2}\right)\cdot\left(2-\frac{2\varrho_1\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}_2}{\omega_1}+\frac{4m\varrho_3}{\omega_1}\right)$$
$$=2\left(1+\frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2}{\omega_1\,\omega_2}-\frac{2\,m^2}{\omega_1\,\omega_2}\right).$$

Daraus folgt als Erwartungswert

$$W_{\mathrm{sp}}=\frac{2\lambda}{8\pi^3}\,\frac{1}{C^2}\,\delta(\boldsymbol{k}=0)\int\left(1+\frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2}{\omega_1\,\omega_2}-\frac{2\,m^2}{\omega_1\,\omega_2}\right)d^3\boldsymbol{p}_1 d^3\boldsymbol{p}_2.$$

Das mittlere Glied verschwindet bei der Winkelintegration. Durch die Substitutionen $\boldsymbol{p}_i\to C\boldsymbol{p}_i$, $m\to Cm$ und durch Integration über alle Richtungen von $\boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{p}_2$ erhält man

$$W_{\mathrm{sp}}=\frac{4\lambda}{\pi}C^4\,\delta(\boldsymbol{k}=0)\int\left(1-\frac{2\,m^2}{\omega_1\,\omega_2}\right)p_1{}^2dp_1\,p_2{}^2dp_2,$$

also nach (A. 10)

$$(3.7)\qquad W_{\mathrm{sp}}=\frac{3\lambda}{\pi^2}CZ\left\{\frac{1}{9}-\frac{1}{2}\,m^2\left(\sqrt{1+m^2}-m^2\,\zeta\right)^2\right\}.$$

Der erste Term ist m-unabhängig und daher ohne Einfluß auf die Masse, so daß wir $\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\sigma}-\varrho_1\times\varrho_1$ durch beliebige $\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}$ ersetzen können, vorausgesetzt, daß wir die Faktoren so normieren, daß $\boldsymbol{\gamma}\varrho_3\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\gamma}\,\mathrm{Spur}\,(\boldsymbol{\gamma}\varrho_3)=4\,\varrho_3$ erhalten bleibt. Kritisch wäre $\gamma=1$, weil $\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{k})\,|\,0>\neq 0$ ist, ergäbe sich nicht auch hier ein m-unabhängiger Wert. Die Situation ist die nämliche wie bei jenem Term der Coulombenergie, der zu $CZ^{5/3}$ proportional ist.

§ 4. Urfermionenmasse und Spinorfeldkopplungskonstante

Die Gesamtenergie ergibt sich aus (2.22), (3.4) und (3.7). Da wir nach Wechselwirkungen fragen, die relativ zu C äußerst kleine Massen liefern, genügt es, die Energiebeiträge bis zu Gliedern vierter Ordnung in m zu entwickeln. Sie lauten mit CZ als Energieeinheit:

$$W_0 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} m^2 + \frac{21}{16} m^4 - \frac{9}{4} m^4 \zeta,$$

$$(4.1) \qquad W_{\text{coul}} = \frac{a}{\pi}\Big((1 - \ln 2) - \frac{1}{2} a\, m^2 - \frac{1}{4}(a - \frac{3}{8})\, m^4 + \frac{3}{8} m^4 \zeta + \frac{3}{4} m^4 \zeta^2\Big), \quad a = 4 \ln 2 - 1,$$

$$W_{\text{sp}} = \Lambda\Big(\frac{1}{9} - \frac{1}{2} m^2 - \frac{1}{2} m^4 + m^4 \zeta\Big), \quad \Lambda = \frac{3\lambda}{2\pi^2}.$$

Zur Berechnung des Minimums brauchen wir die ersten und zweiten Ableitungen. Wegen $\zeta = \ln \frac{2}{m}$, was neben m^4 genügt, ist $\delta\zeta / \delta m = -1/m$. Somit erhält man für die ersten Ableitungen

$$W'_0 = 3\, m + \frac{15}{2} m^3 - 9\, m^3 \zeta,$$

$$(4.2) \qquad W'_{\text{coul}} = -\frac{a}{\pi}(a m + a m^3 - 3\, m^3 \zeta^2),$$

$$W'_{\text{sp}} = -\Lambda\,(m + 3\, m^3 - 4\, m^3 \zeta).$$

Die zweiten Ableitungen lauten

$$W_0'' = 3 + \frac{63}{2} m^2 - 27\, m^2 \zeta,$$

$$(4.3) \qquad W''_{\text{coul}} = -\frac{a}{\pi}(a + 3\, a\, m^2 + 6\, m^2 \zeta - 9\, m^2 \zeta^2),$$

$$W''_{\text{sp}} = -\Lambda\,(1 + 13\, m^2 - 12\, m^2 \zeta).$$

Im Minimum muß die Summe der zweiten Ableitungen größer als 0 sein:

$$(4.4) \qquad \Big(3 - \frac{a\,a}{\pi} - \Lambda\Big) + \Big(\frac{63}{2} - \frac{3a\,a}{\pi} - 13\,\Lambda\Big) m^2 - 3\,(9 + \frac{2a}{\pi} - 4\,\Lambda)\, m^2 \zeta + \frac{9a}{\pi} m^2 \zeta^2 > 0.$$

Die Massengleichung schreiben wir in der Form $W'/m = 0$:

$$(4.5)\qquad \left(3 - \frac{a\alpha}{\pi} - \Lambda\right) + \left(\frac{15}{2} - \frac{a\alpha}{\pi} - 3\,\Lambda\right) m^2 - \left(9 - 4\,\Lambda\right) m^2\,\zeta + \frac{3\alpha}{\pi}\, m^2\,\zeta^2 = 0.$$

Wegen der Kleinheit von m ist der Ausdruck in der ersten Klammer nur von der Größenordnung m^2. Wir setzen daher

$$(4.6)\qquad \Lambda = 3 - \frac{a\alpha}{\pi} - \xi\, m^2$$

und vernachlässigen $\xi\, m^2$ als Faktoren von m^2, $m^2\zeta$, $m^2\zeta^2$ im Einklang mit unserer Entwicklung bis zu Gliedern vierter Ordnung in W und von zweiter Ordnung in W'/m.

Substitution in (4.4/5) ergibt einerseits

$$\xi > +\left(\frac{15}{2} - 10\frac{a\alpha}{\pi}\right) - 3\left(3 - 2\,(2a+1)\,\frac{\alpha}{\pi}\right)\zeta - \frac{9\alpha}{\pi}\,\zeta^2$$

und andererseits

$$\xi = +\left(\frac{3}{2} - 2\,\frac{a\alpha}{\pi}\right) - \left(3 - 4\,\frac{a\alpha}{\pi}\right)\zeta - \frac{3\alpha}{\pi}\,\zeta^2.$$

Durch Elimination von ξ erhält man

$$\frac{6\alpha}{\pi}\,\zeta^2 + \left(6 - 8\,\frac{a\alpha}{\pi} - 6\,\frac{\alpha}{\pi}\right)\zeta + \left(-6 + 8\,\frac{a\alpha}{\pi}\right) > 0.$$

Im Falle des Gleichheitszeichens erhalten wir zwei Wurzeln

$$\zeta_1 = 1 \text{ und } \zeta_2 = -\frac{\pi}{\alpha} + \frac{4}{3}\,a.$$

Die Ungleichung ist für

$$\zeta \geq 1 \text{ bzw. } \zeta \leq -\frac{\pi}{\alpha} + \frac{4}{3}\,a$$

erfüllt. Das zweite Intervall scheidet aus, weil wegen $\zeta = \ln 2/m \to \ln 2\,C/m$ die Masse größer wäre als der Cutoff. In der ersten Ungleichung interessieren wir uns, was bereits bei der Näherung

berücksichtigt ist, nur für extrem große Massenverhältnisse, also für

$$\ln \frac{2C}{m} \gg 1. \tag{4.7}$$

Danach ist eine endliche Masse m der Urfermionen mit einem Ω-unendlichen Cutoff C verträglich.

Kehren wir auch in (4.6) von m zu m/C zurück und beachten wir, daß die Terme $\frac{m^2}{C^2}$, $\frac{m^2}{C^2} \ln \frac{2C}{m}$ und $\frac{m^2}{C^2} (\ln \frac{2C}{m})^2$ in ξm^2 bei Ω-unendlichem C Ω-unendlich klein sind, so ergibt sich für die Kopplungskonstante ein ganz bestimmter Wert, nämlich mit $\Lambda = \frac{3\lambda}{\pi^2}$ und $a = 4 \ln 2 - 1$ gemäß (4.1)

$$\lambda = \pi^2 - \frac{\pi}{3} (4 \ln 2 - 1) \alpha = 9{,}8561. \tag{4.8}$$

Für die Grundzustandsenergie erhält man aus (4.1)

$$W_0 = -\left(\frac{7}{6} - \frac{1}{9} (10-13 \ln 2) \frac{\alpha}{\pi}\right) CZ = -1{,}1664\, CZ \tag{4.9}$$

an Stelle von $-1{,}5\, CZ$ für freie masselose Urfermionen.

Beliebige endliche m sind bei Ω-unendlichem C mit der Bedingung verträglich, ein Minimum der Energie zu liefern. Natürlich ändern sich mit m auch die Kopplungskonstante λ und die Grundzustandsenergie W_0. Doch sind die Abweichungen von (4.8/9) wie ξm^2 relativ unendlich klein. Diese scheinbare Willkür ist physikalisch harmlos, wenn man für die Massen M_i von Teilchen bis auf unendlich kleine Korrekturen bestimmte Verhältnisse M_i/m erhält, was Beispielen zufolge tatsächlich zutreffen kann. Danach spielt die Urfermionenmasse m die Rolle einer Einheit, an der sich alle anderen Massen messen. Man kann beinahe von einer Begründung der Massenrenormierung ab ovo sprechen. Doch ist für das Ergebnis das Spinorfeld wesentlich, weil die massenlosen Glieder in W'/m und W'' nach (4.2/3) ohne Λ nicht beliebig klein gemacht werden können. Dagegen führen reine Spinorfeldtheorien zu vergleichbaren Ergebnissen mit $\lambda = \pi^2$ und $W_0 = -\frac{7}{6} CZ$. Die Unterschiede sind von der relativen Größenordnung $\frac{\alpha}{\pi}$.

Anhang: Integrationen

Bei Ausführung der Integrationen stützen wir uns so weit als möglich auf die Integraltafeln in F. Tölke: Praktische Funktionenlehre I.[11] Sie enthalten nur elementare Integrale, deren Berechnung zwar einfach ist, aber langwierig sein kann.

Das Integral vor (2.19) ist nach Tölke (234) als unbestimmtes gleich

$$\int \sqrt{p^2+m^2}\, p^2 dp = \tag{A.1}$$
$$= \frac{1}{8}\, p\,(2\,p^2+m^2)\sqrt{p^2+m^2} - \frac{1}{8}\, m^2 \ln \frac{p+\sqrt{p^2+m^2}}{m},$$

was innerhalb der Grenzen (0,1) zu (2.19) führt. Entsprechend ist nach Tölke (230)

$$\int \frac{p^4\, dp}{\sqrt{p^2+m^2}} = \frac{1}{8} p\,(2p^2-3\,m^2)\sqrt{p^2+m^2} + \frac{3}{8} m^4 \ln \frac{p+\sqrt{p^2+m^2}}{m}, \tag{A.2}$$

woraus (2.22) hervorgeht.

Im Coulombintegral vor (3.4) kann man die Winkelintegration über ϑ sofort ausführen. Nach Tölke (35) ist

$$\int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{p_1^2+p_2^2-2\,p_1 p_2 \cos\vartheta} = \frac{1}{p_1 p_2} \ln \left|\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}\right|,$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{p_1^2+p_2^2\, 2\,p_1 p_2 \cos\vartheta} = \frac{p_1^2+p_2^2}{2\,p_1^2 p_2^2} \ln \left|\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}\right| - \frac{1}{p_1 p_2}.$$

Danach kann man W_{coul} gemäß

$$W_{\text{coul}} = \frac{3a}{2\pi}\, CZ\,(W_1+W_2) \tag{A.3}$$

zerlegen, derart daß

$$W_1 = \int_0^1 \frac{p_1^2}{\omega_1}\, dp_1 \int_0^1 \frac{p_2^2}{\omega_2}\, dp_2$$

und

$$W_2 = -\frac{1}{2}\int \ln \left|\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}\right| (\omega_1-\omega_2)^2\, d\omega,\, d\omega_2$$

ist. Nach Tölke (230) ist

$$W_1 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+m^2} - m^2\zeta\right)^2,\ \zeta = \ln \frac{1+\sqrt{1+m^2}}{m}. \tag{A.4}$$

Aus Symmetriegründen kann man $(\omega_1 - \omega_2)^2$ in W_2 durch $2\,\omega_1^2 - 2\,\omega_1\omega_2$ ersetzen, so daß

$$W_2 = W_3 - W_4 \tag{A.5}$$

ist mit

$$W_3 = \int \omega_1\, d\omega_1 \int \ln\left|\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2}\right| \omega_2\, d\omega_2,$$

$$W_4 = \int \omega_1^2\, d\omega_1 \int \ln\left|\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2}\right| d\omega_2.$$

Wegen $\omega_i d\omega_i = p_i dp_i$ ist W_3 von m unabhängig:

$$W_3 = \int_0^1 p_1 dp_1 \int_0^1 \ln\left|\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2}\right| p_2\, dp_2.$$

Nach Tölke (316) erhält man daraus zunächst

$$W_3 = \int_0^1 \left(p_1 + \frac{1}{2}(1 - p_1^2) \ln\left|\frac{p_1 + 1}{p_1 - 1}\right|\right) p_1\, dp_1,$$

woraus sich ebenfalls nach Tölke (316)

$$W_3 = \frac{1}{2} \tag{A.6}$$

ergibt.

Von W_4 berechnen wir zunächst das innere Integral. Partielle Integration liefert:

$$W_4^{(i)} = \sqrt{1 + m^2} \ln\left|\frac{p_1 + 1}{p_1 - 1}\right| + W',$$

$$W' = 2\,p_1 \int_0^1 \frac{\omega_2 dp_2}{p_2^2 - p_1^2} = 2\,p_1 \int_0^1 \left(1 + \frac{\omega_1^2}{p_2^2 - p_1^2}\right) \frac{dp_2}{\omega_2}$$

$$= 2\,p_1\,\zeta + 2\,p_1\omega_1^2\, W''$$

$$W'' = \int_0^1 \frac{dp_2}{\omega_2(p_2^2 - p_1^2)} = \int \frac{d\xi}{m^2\, sh^2\,\xi - p_1^2} = \frac{1}{p_1^2} \int \frac{dt}{t^2 - \omega_1^2/p_1^2}$$

$$= -\frac{1}{2p_1\omega_1} \ln\left|\frac{\omega_1 + tp_1}{\omega_1 - tp_1}\right|_{\infty}^{\sqrt{1 + m^2}} = -\frac{1}{2p_1\omega_1} \ln\left|\frac{\omega_1 + p_1\sqrt{1 + m^2}}{\omega_1 - p_1\sqrt{1 + m^2}}\right|$$

Daraus folgt:

$$W_4^{(i)} = \sqrt{1+m^2}\,\ln\left|\frac{p_1+1}{p_1-1}\right| + 2\,\zeta p_1 - \omega_1 \ln\left|\frac{\omega_1 + p_1\sqrt{1+m^2}}{\omega_1 - p_1\sqrt{1+m_2}}\right|$$

Damit berechnen wir

$$W_4 = \int W_4^{(i)}\,\omega_1^2\,d\omega_1.$$

Den Summanden in $W_4^{(i)}$ entsprechend zerlegen wir W_4 gemäß

$$W_4 = \sqrt{1+m^2}\,A + 2\,\zeta\,B - C. \tag{A.7}$$

Darin sind

$$A = \int \ln\left|\frac{p_1+1}{p_1-1}\right| \omega_1^2\,d\omega_1,\quad B = \int p_1\,\omega_1^2\,d\omega_1,$$

$$C = \int \ln\left|\frac{\omega_1 + p_1\sqrt{1+m^2}}{\omega_1 - p_1\sqrt{1+m^2}}\right| \omega_1^3\,d\omega_1.$$

Durch partielle Integration erhält man für das Integral A:

$$A = \frac{1}{3}\sqrt{1+m^2}^{\,3}\,\ln\frac{2}{\varepsilon} + \frac{2}{3}A',\quad 0 < \varepsilon \to 0,$$

$$A' = \int_0^1 \frac{\omega_1^3 dp_1}{p_1^2-1} = \int_0^1 \left(p_1^2 + (1+2\,m^2) + \frac{(1+m^2)^2}{p_1^2-1}\right)\frac{dp_1}{\omega_1}.$$

Nach Tölke (230) können wir schreiben:

$$A' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+m^2} + (2+3\,m^2)\,\zeta\right) + (1+m^2)^2\,A'',$$

$$A'' = \int_0^1 \frac{1}{p_1^2-1}\frac{dp_1}{\omega_1} = \int \frac{d\xi}{m^2\,sh^2\xi - 1} = \int \frac{dt}{t^2 - 1 + m^2}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1+m^2}}\,\ln\left|\frac{t+\sqrt{1+m^2}}{t-\sqrt{1+m^2}}\right|_{\infty}^{\sqrt{1+m^2}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1+m^2}}\,\ln\frac{2\left(\sqrt{1+m^2}\right)}{\varepsilon\,m^2}.$$

Somit ist

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{1+m^2}^{\,3}\,\ln\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+m^2} + (2+3\,m^2)\,\zeta\right),$$

Wegen

$$\ln \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = -\zeta + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

folgt daraus schließlich

$$A = \frac{1}{3}\sqrt{1+m^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1+m^2}\,\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$
$$+ \frac{2}{3}\left(1 + \frac{3}{2}m^2 - \sqrt{1+m^2}^{\,3}\right)\zeta.$$

Das Integral über B kann man wie folgt schreiben:

$$B = \int (p_1^2 + m^2)\, p_1^2 \frac{dp_1}{\omega_1}.$$

Nach Tölke (230) folgt daraus

$$B = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}m^2\right)\sqrt{1+m^2} - \frac{1}{8}m^4\zeta.$$

Das Integral C läßt sich auf A zurückführen. Partielle Integration ergibt

$$C = \frac{1}{4}(1+m^2)\ln\frac{2\sqrt{1+m^2}}{\varepsilon m^2} - \frac{1}{4}C'$$

$$C' = \int w_1^4 \left(\frac{p_1/\omega_1 + \sqrt{1+m^2}}{\omega_1 + p_1\sqrt{1+m^2}} - \frac{p_1/\omega_1 - \sqrt{1+m^2}}{\omega_1 - p_1\sqrt{1+m^2}}\right) dp_1.$$
$$= -2\sqrt{1+m^2}\int \frac{\omega_1^3 dp_1}{p_1^2 - 1} = -2\sqrt{1+m^2}\,A'.$$

Substitution von A' führt zu

$$C' = -(1+m^2) - (2+3m^2)\sqrt{1+m^2}\,\zeta$$
$$+ (1+m^2)\ln\frac{2(1+m^2)}{\varepsilon m^2}.$$

Der letzte Term fällt wie vorauszusehen aus C heraus. Es bleibt

$$C = \frac{1}{4}\left(1+m^2\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}m^2\right)\sqrt{1+m^2}\,\zeta.$$

Substitution von A, B, C in (A.7) ergibt

$$\text{(A.8)}\quad W_4 = \frac{1}{12}(1+m^2) + \frac{2}{3}(1+m^2)\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2+m^2}}\right)$$
$$+ \frac{2}{3}\left((1 + \frac{3}{2}m^2)\sqrt{1+m^2} - (1+m^2)^2\right)\zeta - \frac{1}{4}m^4\zeta^2.$$

Literaturhinweise und Anmerkungen

[1] Dirac, P. A. M.: Théorie du positron; Rapport du 7e Conseil Solvay; Structure et Propriétés des Noyaux Atomique, *203* (1937).

[2] Bopp, F.: Z. Phys. *200*, 117 (1967). Wir ziehen den früher eingeführten mathematisch definierten Begriff „Urfermion" dem in seiner Bedeutung noch schwankenden Begriff „Parton" vor. Da Massenterme lokale Oszillationen beschreiben, muß $m_{bar} = 0$ sein, weil anders der Raum ein Agens wäre.

[3] Schmieden, C., Laugwitz, D.: Math. Z. *69*, 1 (1958); Laugwitz, D.: Sitzungsber. Bay. Akad. d. Wiss., Mathematisch-naturwiss. Kl. 1958, 41–59; Robinson, A.: Non-Standard Analysis, Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. (A) *64*, 432 (1961); Laugwitz, D.: Jber. Deutsch. Math. Verein. 75, 66 (1973).

[4] Das „Unendliche als Werdendes" ist verwandt mit dem „Potentiell-Unendlichen". Doch wird dieser Begriff heute vielleicht fälschlich auch für Grenzwerte in Anspruch genommen, was wir hier ausschließen.

[5] Neumann, J. v.: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer-Berlin 1932; hier: § 9.

[6] In der Ω-Analysis ist die Spannweite der Spektren stets beschränkt, weil es zu jeder Ω-unendlichen Zahl kleinere und größere gibt. Variationsmethoden sind also anwendbar.

[7] Klassisch physikalisch erhält man P^μ und $M^{\mu\nu}$ mittels der Noetherschen Sätze aus der Poincaréinvarianz. Bei der Quantisierung im Schrödingerbild hat man $t = 0$ zu setzen und ∂_0 mittels der Schrödingergleichung zu eliminieren. Da wir uns auf das Urfermionenvakuum beziehen und nicht auf die verschiedenen Grundzustände, erhält man die Basisoperatoren der Poincarégruppe endgültig. Natürlich ändern sich die Operatoren P^μ, $M^{\mu\nu}$ mit der Wechselwirkung. Doch sind die Operatoren $\psi^\dagger$, ψ mit und ohne Wechselwirkung die nämlichen.

[8] Schwinger folgend kann man (1.9) z. B. durch

$$Q = \frac{1}{2} \int d\tau \left((\psi^\dagger (\boldsymbol{r}) \psi (\boldsymbol{r}) - \psi^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{r}) \, \psi^{\dagger\dagger} (\boldsymbol{r}) \right)$$

ersetzen, so daß Z nicht mehr explizit auftritt. Doch ist beides äquivalent.

[9] Schweber, S. S.; Bethe, H. A.; De Hoffmann, F.: Meson and Fields I; Peterson Cy 1955; hier: § 20b, Gl. (24).

[10] Allerdings ist r auch in kosmologischer Sicht so extrem klein, daß eine noch so „schöne" Theorie wohl immer spekulativ bleiben muß. In jedemFall, auch bei Ω-unendlichem Cutoff ist die Suche nach einem gruppentheoretisch definierten topologischen Abschluß physikalisch fragwürdig.

[11] Tölke, F.: Praktische Funktionenlehre I; Springer, Berlin 1943; hier: 2. Abschnitt.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1978

Band/Volume: 1977

Autor(en)/Author(s): Bopp Fritz

Artikel/Article: Grundzustand bei Wechselwirkung 73-97