BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1977

MÜNCHEN 1978

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Ein-Teilchen-Masse bei Coulomb- und Spinorwechselwirkung

Fritz Bopp

Sektion Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München

Abstract:

Recently we determined approximately the ground state of $2Z$ urfermions in interaction. This is used here to derive by variational methods the mass M of single particles above the ground state. Even if the cutoff momentum is infinite we may obtain a finite ratio M/m relative to the urfermion mass m. In particular, the well known Coulomb singularity is cancelled by a better ground state approximation.

1. Einleitung

Der Erwartungswert des Grundzustands der Quantenelektrodynamik stimmt als stromloser Zustand mit dem des Hamiltonoperators

$$H = H_0 + H_{\text{coul}}$$

überein. Kürzlich[1] ist gezeigt worden, daß man lokale Spinwechselwirkungen mit bestimmter Kopplungskonstante gemäß

$$H = H_0 + H_{\text{coul}} + H_{\text{sp}} \tag{1.1}$$

hinzufügen muß, wenn der Cutoff im Impulsraum weit oberhalb aller in der Natur vorkommenden Massen, also auch oberhalb der Weltmasse liegen soll, womöglich oberhalb endlicher Massen.

Bei Anwendung der (Non-Standard-) Ω-Analysis[2] ist es möglich und vorteilhaft, zur Diracsee zurückzukehren. Es ist der Grundzustand von $2Z$ freien Urfermionen. Darin ist die Ω-unendliche Zahl Z gleich der Anzahl der Quantenzellen im Phasenraum. Die Phasendichte der Urfermionen in der Diracsee ist konstant, nämlich gleich 2 je Quantenzelle. Durch Wechselwirkungen ändert sich der Grundzustand. Doch haben wir es stets mit $2Z$ Urfermionen zu tun, auch bei angeregten Zuständen.

Die bare Masse soll gleich o sein. Darum lautet der kinetische Operator im Schrödingerbild

$$H_0 = \int d^3\boldsymbol{p}\, \psi^\dagger(\boldsymbol{p})\, \varrho_1\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}\, \psi(\boldsymbol{p}). \tag{1.2}$$

(Darstellung im Impulsraum; $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}^P \times 1$, $\boldsymbol{\sigma} = 1 \times \boldsymbol{\sigma}^P$, $\boldsymbol{\sigma}^P =$ Paulimatrizen; $\psi^\dagger$, $\psi =$ Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Fermionen). Der Coulomboperator lautet:

$$H_{\text{coul}} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{k^2}\, Q^\dagger(\boldsymbol{k})\, Q(\boldsymbol{k});\ Q^\dagger(\boldsymbol{k}) = Q(-\boldsymbol{k}); \tag{1.3}$$
$$Q(\boldsymbol{k}) = \int d^3\boldsymbol{p}_1 d^3\boldsymbol{p}_2 \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)\, \psi^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\, \psi(\boldsymbol{p}_2).$$

Die Spinorfeldwechselwirkung läßt sich ähnlich schreiben:

$$H_{\text{sp}} = \frac{\lambda}{8\pi^3 C^2} \int d^3\boldsymbol{k}\, \boldsymbol{S}^\dagger(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{S}(\boldsymbol{k});\ \boldsymbol{S}^\dagger(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{S}(-\boldsymbol{k}); \tag{1.4}$$
$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{k}) = \int d^3\boldsymbol{p}_1 d^3\boldsymbol{p}_2\, \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)\, \psi^\dagger(p_1)\, \gamma\, \psi(\boldsymbol{p}_2)$$

($\lambda =$ dimensionslose Kopplungskonstante; $C =$ Cutoffradius, evtl. Ω-unendlich). H_{sp} ist durch die Wechselwirkungsmatrix $\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}$ bestimmt, wofür die invarianten Produkte der Diracmatrizen zur Verfügung stehen. Wegen $\overline{\psi} = \psi^\dagger \varrho_3$ sind diese noch mit $\varrho_3 \times \varrho_3$ multipliziert. In l. c. 1 sind wir von

$$\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma} - \varrho_1 \times \varrho_1 \tag{1.5}$$

ausgegangen. Doch erhält man stets denselben Grundzustand, wenn nur $\boldsymbol{\gamma} \varrho_3 \boldsymbol{\gamma} \neq 0$ ist und dieselbe Kopplungskonstante λ, wenn wir $\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}$ so normieren, daß stets

$$\boldsymbol{\gamma}\, \varrho_3\, \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}\, \text{Spur}\,(p_3 \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\sigma}\, \varrho_3\, \boldsymbol{\sigma} - \varrho_1 \varrho_3 \varrho_1 = 4\, \varrho_3 \tag{1.6}$$

ist. Minimaler seeartiger Erwartungswert erfordert weitere einengende Bedingungen für die Wahl von $\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}$.

Unter dem Einfluß der Wechselwirkung nehmen die Urfermionen eine endliche Masse m an. Verwenden wir nämlich als Testvektor für den Grundzustand die Diracsee für freie Urfermionen der Masse $m \neq 0$, so liefert diese Masse bei Ω-unendlichem Cutoff gemäß $\ln \frac{2C}{m} \gg 1$

(d. h. $\ln \frac{2C}{m}$ unendlich groß gegen 1) als Minimum der Energie

$$(1.7)\qquad W_0 = -\left(\frac{7}{6} - \frac{1}{9}(10-13\ln 2)\frac{a}{\pi}\right) CZ = -1{,}1664\, CZ$$

und als dimensionslosen Faktor der Kopplungskonstante

$$(1.8)\qquad \lambda = \pi^2\left(1 - \frac{1}{3}(4\ln 2 - 1)\frac{a}{\pi}\right) = 9{,}8561.$$

Wir werden hier an einem Beispiel zeigen, daß die Masse m wechselwirkender Urfermionen und die Massen M von Teilchen endliche Massenverhältnisse haben können. Auch Teilchenmassen bestimmen wir mit der Variationsmethode und beginnen mit den einfachsten Testvektoren, nämlich denen, die ein einzelnes Teilchen bzw. Antiteilchen beschreiben. Ein Einzelteilchen mit dem Impuls $\boldsymbol{P} = 0$ wird durch

$$(1.9)\qquad |\,\Phi_1 > = \psi^\dagger(0)\, u\,|\, m>,\quad |\,\Phi_2> = u^\dagger \psi(0)\,|\,m>$$

beschrieben. Stellen wir die Diracsee $|\,m>$ durch den Vakuumsvektor $|\,0>$ dar, so transformieren sich ψ, $\psi^\dagger$ bekanntlich gemäß[3]

$$(1.10)\qquad \begin{aligned} \psi'(\boldsymbol{p}) &= \frac{1+\Theta}{2}\,\psi(\boldsymbol{p}) - i\,\frac{1-\Theta}{2}\,\sigma_2\,\psi^{\dagger\dagger}(-\boldsymbol{p}),\\ \psi'^\dagger(\boldsymbol{p}) &= \psi^\dagger(\boldsymbol{p})\,\frac{1+\Theta}{2} + i\,\psi^{\mathsf{T}}(-\boldsymbol{p})\,\sigma_2\,\frac{1-\Theta}{2}, \end{aligned}$$

worin

$$(1.11)\qquad \Theta = \Theta(\boldsymbol{p}) = \frac{\varrho_1 \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} + m\varrho_3}{\omega},\quad \omega = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2},$$

ist. Somit lassen sich die transformierten Vektoren, die aus (1.9) hervorgehen, wie folgt darstellen (mit $-i\sigma_2 u \to u$ im Falle $\varepsilon = -1$);

$$(1.12)\qquad \begin{aligned} |\,\Phi'> &= \psi^\dagger(0)\,\frac{1+\varepsilon\varrho_3}{2}\,u\,|\,0>,\quad \varepsilon = \pm 1,\\ &= \psi^\dagger(0)\,v\,|\,0> \text{ mit } v = \frac{1+\varepsilon\varrho_3}{2}\,u. \end{aligned}$$

Für die Norm erhält man

$$(1.13)\qquad <\Phi'\,|\,\Phi> = \delta(\boldsymbol{p}=0)\,v^\dagger v = 1.$$

Der Wert $\delta(\boldsymbol{p}=0)$ von $\delta(\boldsymbol{p})$ für $\boldsymbol{p}=0$ ist in der Ω-Analysis (anders als in der Distributionstheorie) bestimmt.[4] Man kann sich oft mit der Definition von Sommerfeld (1904)[5] begnügen:

$$\delta(\boldsymbol{p}) = \begin{cases} 3/4\,\pi\,\varkappa^3 \text{ für } p \leq \varkappa, \\ \quad 0 \quad \text{ für } p > \varkappa, \end{cases} \tag{1.14}$$

der, ohne an eine Erweiterung der Analysis zu denken, $\varkappa$ als „unendlich werdend" (l. c. 1) vorausgesetzt hat. Hiernach ist

$$\delta(\boldsymbol{p} = 0) = \frac{3}{4\pi\,\varkappa^3}\,, \quad \delta(\boldsymbol{p})^2 = \delta(\boldsymbol{p} = 0)\;\delta(\boldsymbol{p}). \tag{1.15}$$

Abgesehen davon, daß die Testvektoren (1.12) den gesuchten Zustand bestenfalls nur näherungsweise darstellen, ist noch ein anderes Problem zu bedenken. Die Vektoren in (1.12) beschreiben Systeme mit $(2Z \pm 1)$ Urfermionen, gehören also nicht zum physikalischen Unterraum. Genau genommen müßten wir das asymptotische Verhalten von Zuständen beschreiben, die wie

$$|\,\Phi > = \int d^3\boldsymbol{p}\;\psi^\dagger(\boldsymbol{p})\;\Phi(\boldsymbol{p})\;\psi(\boldsymbol{p})\,|\,m >$$

ein Teilchen-Loch-Paar darstellen. Falls dadurch auseinanderlaufende Teilchen dargestellt werden, sollten sich die Partner bei großem Abstand wie Einzelteilchen mit gleicher Masse verhalten. Man sollte eine Energie von der Form

$$W = 2\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2}$$

erwarten, in der M und p Masse und Impuls der Einzelteilchen sind. In vereinfachten Modellrechnungen kommt das exakt heraus. Hier gibt es keinen ersichtlichen Grund für ein anderes Verhalten.

Dagegen werden die beiden Vektoren in (1.12) verschiedene Energien liefern. Denn bei einer Zu- oder Abnahme der Teilchenzahl gibt es Einbettungsenergien, die an der Dynamik nicht teilnehmen und die für Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzt sind.

Schon die klassisch physikalische Coulombenergie läßt das erkennen. Sie ist je nach der Urfermionenzahl zu $(2Z + 1)^2$, $(2Z)^2$ und $(2Z - 1)^2$ proportional. Die Differenzen zur Coulombenergie des Grundzustands sind also gleich $\pm 4Z + 1$. Die Einbettungsenergien sind enorm. Im Mittel erhalten wir die Coulombenergie für ein Teilchen.

Seien die Energien der durch (1.12) beschriebenen Teilchen W_1 bzw. W_2 und seien ΔW_1, ΔW_2 die Anregungsenergien über dem Grundzustand, so ist die Masse von Teilchen und Antiteilchen (im Rahmen der vorliegenden Näherung) gleich

$$M = \frac{1}{2}(\Delta W_1 + \Delta W_2) \tag{1.16}$$

Eine strenge Rechtfertigung ist nur von der der Untersuchung des Teilchen-Loch-Paares zu erwarten. Doch ermutigen Erfahrungen aus der Festkörperphysik,[6] mit 1-Teilchen-Problemen zu beginnen und die Massen mittels (1.16) zu berechnen.

2. Erwartungswerte

Erwartungswerte von Anregungsenergien können mit der Kontraktionsmethode berechnet werden. Wir betrachten einzelne Teilchen (T) und Antiteilchen (A) und beschreiben sie in erster variationstheoretischer Näherung durch (1.9). Danach ist ihre Norm gleich

$$N_T = < m \mid u'^{\dagger}\, \psi(0)\, \psi^{\dagger}(0)\, u' \mid m > = \delta_0' u^{\dagger}\, \frac{1 + \Theta(0)}{2}\, u',$$

$$N_A = < m \mid \psi^{\dagger}\,(0)\, u' u'^{\dagger}\, \psi(0)\, (m > = \delta_0'\, u^{\dagger}\, \frac{1 - \Theta(0)}{2}\, u'.$$

Darin ist $\delta_0' = \big(\delta(p)\big)_{p=0}$ Ω-analytisch definiert und kann überall mittels $u' = u \,/\, \sqrt{\delta_0'}$ eliminiert werden. Nach (1.11) ist $\Theta(0) = \varrho_3$. Wegen $\varrho_3\, u = \pm u$ für T bzw. A erhält man für die Norm

$$N_T = N_A = u^{\dagger} u = 1. \tag{2.1}$$

Mit den neu definierten Amplituden u ist der Erwartungswert der Gesamtenergie für T bzw. A gleich

$$W_T' = \frac{1}{\delta_0'} < m \mid u^{\dagger}\, \psi(0)\, H\, \psi^{\dagger}(0)\, u \mid m >,$$

$$W_A' = \frac{1}{\delta_0'} < m \mid \psi^{\dagger}(0)\, u\, H\, u^{\dagger} \psi(0) \mid m >.$$

Die Kontraktion von $\psi(0)$ mit $\psi^{\dagger}(0)$ liefert nach (2.1) die hier nicht interessierte Energie des Grundzustands. Die Anregungsenergien W_T und W_A sind also durch diejenigen Kontraktionen definiert, die $\psi(0)$ und $\psi^{\dagger}\,(0)$ mit H verbinden.

Der Erwartungswert der kinetischen Anregungsenergie ist

$$W_0^T = W_0^A = 0. \tag{2.2}$$

Das ist anschaulich und klar und ergibt sich aus

$$W_0^T = \frac{1}{\delta_0'} \int d^3\boldsymbol{p} < m \mid u^\dagger \psi(0)\, \psi^\dagger(\boldsymbol{p})\, \varrho_1\, \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\, \psi(\boldsymbol{p})\, \psi^\dagger(0)\, u \mid m >,$$

$$W_0^A = \frac{1}{\delta_0'} \int d^3\boldsymbol{p} < m \mid \psi^\dagger(0)\, u\, \psi^\dagger(\boldsymbol{p})\, p_1\, \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\, \psi(\boldsymbol{p})\, u^\dagger \psi(0) \mid m >,$$

weil $\boldsymbol{p}\, \delta(\boldsymbol{p})\, \delta(\boldsymbol{p}) = \delta_0' \boldsymbol{p}\, \delta(\boldsymbol{p}) = 0$ ist.

Der Erwartungswert der Anregungsenergie von Spinorfeldwechselwirkungen ergibt sich aus

$$W_{sp} = \frac{1}{8\pi C^2} \frac{1}{\delta_0'} \int d^3\boldsymbol{p}_{1234}\, \delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_4)\,.$$

$$< m \mid u^\dagger\, \psi(0)\, \psi_1^\dagger\, \gamma\, \psi_2\, \psi_3^\dagger\, \gamma\, \psi_4\, \psi^\dagger\, (0)\, u \mid m > \text{ für } T,$$

$$\text{bzw. } < m \mid \psi^\dagger\, (0)\, u\, \psi_1^\dagger\, \gamma\, \psi_2\, \psi_3^\dagger\, \gamma\, \psi_4\, u^\dagger\, \psi\, (0) \mid m > \text{ für } A.$$

Die Kontraktionsketten 01, 23, 40 und 03, 41, 20 bzw. 20, 41, 03 und 40, 23, 01 liefern als ersten Beitrag

$$W_{sp}^{aT} = \frac{1}{8\pi C^2} \int d^3\boldsymbol{p}\, u^\dagger \frac{1+\varrho_3}{2} \left(\gamma \frac{1+\Theta}{2} \gamma - \gamma \frac{1-\Theta}{2} \gamma\right) \frac{1+\varrho_3}{2}\, u,$$

$$W_{sp}^{aA} = \frac{1}{8\pi C^2} \int d^3\boldsymbol{p}\, u^\dagger \frac{1-\varrho_3}{2} \left(\gamma \frac{1-\Theta}{2} \gamma - \gamma \frac{1+\Theta}{2} \gamma\right) \frac{1-\varrho_3}{2}\, u.$$

Darin ist

$$\int d^3\boldsymbol{p}\, \Theta = \int \frac{\varrho_1\, \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} + m\varrho_3}{\omega}\, d^3\boldsymbol{p} = 4\pi\, m\varrho_3 \int \frac{p^2\, dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} = 2\pi\, m\varrho_3\, C^2,$$

letzteres bis auf relativ unendlich kleine Beiträge.

Daraus folgt wegen

$$\gamma\cdot\gamma = g,\ \gamma\, \varrho_3\, \gamma = g'\, \varrho_3, \tag{2.3}$$

daß beide Energiebeiträge übereinstimmen und zur Masse m proportional sind:

$$W_{sp}^{aT} = W_{sp}^{aA} = \frac{1}{4}\, g'\, m. \tag{2.4}$$

Die Kontraktionsketten 01, 20, 43 und 03, 40, 21 ergeben bei Beginn mit $u^\dagger$ als zweiten Beitrag mit Rücksicht auf $\varrho_3\, u = \pm\, u$:

$$W_{sp}^{bT} = + \frac{1}{4\pi C^2} u^\dagger \boldsymbol{\gamma} u \int \mathrm{Spur}\left(\boldsymbol{\gamma} \frac{1-\Theta}{2}\right),$$

$$W_{sp}^{bA} = - \frac{1}{4\pi C^2} u^\dagger \boldsymbol{\gamma} u \int \mathrm{Spur}\left(\boldsymbol{\gamma} \frac{1-\Theta}{2}\right).$$

Wenn $\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}$ mit $g''\,(1 \times 1) + g'''\,(\varrho_3 \times \varrho_3) + \ldots$ beginnt, ist

(2.5)
$$W_{sp}^{bT} = + \frac{2}{3} g''\, C - g'''\, m,$$
$$W_{sp}^{bA} = - \frac{2}{3} g''\, C - g'''\, m.$$

Der divergente Term liefert wegen der Vorzeichen $\pm$ die Einbettungsenergie. Somit erhält man als Massen M_T und M_A von T bzw. A:

$$M_T = M_A = \left(\frac{1}{4} g' - g'''\right) m.$$

Im Falle $\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma} - \varrho_1 \times \varrho_1$ ist $g' = 4$, $g''' = 0$ also

(2.6)
$$M_T = M_A = m.$$

Die Masse angeregter T bzw. A stimmt also mit der Masse der Urfermionen in der See überein. Das gilt auch für beliebige $\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}$, weil die Kopplungskonstante λ so gewählt ist, daß stets

(2.7)
$$\frac{1}{4} g' - g''' = 1$$

sein muß (l. c. 1).

Das Ergebnis entspricht der Erwartung, wenn man mit endlicher renormierter Masse rechnet. Doch ist zu beachten, daß wir bei der Normierung (2.7) an die spezielle Kopplungskonstante $\lambda/8\pi^3 C^2$ gebunden sind, die erstens wegen des Faktors C^{-2} unendlich klein ist und in der zweitens λ einen bestimmten Zahlenwert hat. Oben haben wir $\lambda = \pi^2$ angenommen. Nach (1.8) ist das der Wert bei reiner Spinorfeldwechselwirkung ($\alpha = 0$). Kommt ein Coulombfeld hinzu, so verkleinert sich λ. Im Coulombfeld geht nach (4.8) aus l. c. 1 (2.6) in

(2.8)
$$M_T = M_A = \left(1 - \frac{4 \ln 2 - 1}{3\pi} \alpha\right) m + \ldots$$

über. Die Abnahme der Masse um etwa 1,37 ‰ kann man als Bindungsenergie des Feldes an das Fermion verstehen.

Dazu kommt die durch Punkte angedeutete Coulombenergie. Sie berechnet sich aus

$$W_{\mathrm{Coul}} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int \frac{d^3p}{(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)^2}\, \delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_4)$$

$$< m \mid u^\dagger\, \psi(0)\, \psi_1^\dagger\, \psi_2\, \psi_3^\dagger\, \psi_4\, \psi^\dagger(0)\, u \mid m > \text{ für } T,$$

$$\text{bzw.} \quad < m \mid \psi^\dagger(0)\, u\, \psi_1^\dagger\, \psi_2\, \psi_3^\dagger\, \psi_4\, u^\dagger\, \psi(0) \mid m > \text{ für } A.$$

Man hat dieselben Kontraktionsketten wie oben zu berücksichtigen und $\lambda/8\pi C^2$ durch $\alpha/4\pi^2 p^2$ zu ersetzen. Die ersten Kontraktionsketten ergeben für T und A:

$$W_{\mathrm{Coul}}^{aT,A} = \frac{\alpha\, m}{\pi} \int \frac{dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} = \frac{\alpha\, m}{\pi} \ln \frac{C + \sqrt{C^2 + m^2}}{m}$$

oder bei Beschränkung auf den Leitterm

$$W_{\mathrm{Coul}}^{aT,A} = \frac{\alpha\, m}{\pi} \ln \frac{2C}{m}.$$

Entsprechend erhält man als zweiten Beitrag

$$W_{\mathrm{Coul}}^{bT,A} = \pm \frac{4\alpha}{\pi}\, C.$$

Das ist reine Einbettungsenergie. Für die Coulombenergie ergibt sich also das bekannte logarithmisch divergente Glied. Somit ist (2.8) wie folgt zu vervollständigen:

$$M_T = M_A = \left(1 - \frac{4 \ln 2 - 1}{3\pi}\, \alpha\right) m + \frac{\alpha\, m}{\pi} \ln \frac{2C}{m}. \tag{2.9}$$

Klarerweise muß es am Ende Beiträge geben, die den logarithmisch divergenten Term kompensieren. Da in Ω-analytischen Quantenfeldtheorien unendliche Eigenwerte möglich sind, ist es zwar nicht ausgeschlossen, aber auch nicht gewiß, daß der logarithmische Term durch Glieder höherer Näherung kompensiert wird. Die Singularität könnte also Ausdruck eines noch unzulänglichen Hamiltonoperators sein. Sollten höhere Näherungsglieder kompensierend wirken, so könnten diese auch vom Spinorfeld herrühren. Da das Coulombfeld weitreichend ist, könnte es sogar sein, daß Fehler im Ansatz des Grundzustands merklichen Einfluß haben, der bei räumlich begrenzten Systemen weniger wahrscheinlich ist.

Letzteres ist wahrscheinlich zutreffend. Bildet man nämlich den Testvektor mit $\Theta' = \varepsilon\,\Theta$ statt mit Θ, worin

$$\varepsilon = \varepsilon(p) = \begin{cases} +1 \text{ für } \varkappa\sqrt{mC} < p \leq C, \\ -1 \text{ für } o < p \leq \varkappa\sqrt{mC} \end{cases}$$

und $\Theta^{12} = 1$ ist, so erhält man einerseits

$$W_{\text{Coul}} = \frac{\alpha\, m}{\pi}\left(\ln\frac{2\,C}{m} - 2\ln\frac{2\,\varkappa\sqrt{mC}}{m}\right) = -\frac{\alpha\, m}{\pi}\ln\,(2\,\varkappa^2).$$

Andererseits sind die von $\varepsilon = -1$ herrührenden Integrale in vergleichbaren Termen relativ unendlich klein gegen die aus l. c. 1, so daß zwar ein verändertes λ und ein bestimmter Wert für obiges $\varkappa$ zu erwarten ist, aber eine endliche Coulombenergie. Allein ein verbesserter Ansatz für den Testvektor genügt, um zu zeigen, daß einzelne T und A eine endliche Masse haben. Die wahre Masse wird kleiner sein, vielleicht beträchtlich. Aber Divergenzen sind nicht mehr im Spiel.

Literaturhinweise

[1] Bopp, F.: Grundzustand bei Wechselwirkung. Sitzungsber. d. Ba. Akad. d. Wiss., 1977.

[2] Schmieden, C., Laugwitz, D.: Math. Z. *9, 1 (1958); Laugwitz, D.: Math. Nachr. **37**, 225 (1968).

[3] Bogoliubov, N. N., Shirkov, D. V.: Introduction to the theory of quantized fields; Interscience Publ. Inc., New York 1959; hier: § 12.

[4] Laugwitz, D.: Sitz.-Ber. Bay. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. **1958**, 41–59.

[5] Sommerfeld, A.: Amsterdam Ak. Versl. **1904**, 13, S. 431–452; vgl. auch: A. S., Gesammelte Schriften, Bd. II, S. 1–184.

[6] Vgl. z. B. Jones, W., March, H.: Theoretical Solid State Physics, Vol. I, S. 134.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1978

Band/Volume: 1977

Autor(en)/Author(s): Bopp Fritz

Artikel/Article: Ein-Teilchen-Masse bei Coulomb- und Spinorwechselwirkung 99-107