BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1978

MÜNCHEN 1979

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Produkte harmonischer Räume

Von Ursula Schirmeier in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Heinz Bauer am 28. April 1978.

Einleitung

Seit langem ist bekannt, daß es zu jedem $\mathfrak{P}$-harmonischen Raum $(X, \boldsymbol{H}^*)$ mit abzählbarer Basis und $1 \in \boldsymbol{H}^*_+(X)$ einen geeigneten Markoff-Prozeß gibt, dessen exzessive Funktionen gerade die positiven hyperharmonischen Funktionen auf X sind.

Beispielsweise ist der Brownsche Prozeß auf $\boldsymbol{R}^3$ bzw. die gleichmäßige Bewegung nach links auf $\boldsymbol{R}$ solch ein geeigneter Prozeß zum harmonischen Raum $(\boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{H}^*)$ der Lösungen der Laplace-Gleichung bzw. zum harmonischen Raum $(\boldsymbol{R}, \tilde{\boldsymbol{H}}^*)$, dessen hyperharmonische Funktionen die lokal wachsenden, nach unten halbstetigen Funktionen sind.

Bildet man nun das Produkt der Brownschen Halbgruppe und der Halbgruppe der gleichmäßigen Bewegung nach links, so erhält man die Halbgruppe der Wärmeleitung auf $\boldsymbol{R}^4$: Ihre exzessiven Funktionen stimmen überein mit den global definierten positiven hyperharmonischen Funktionen des Raumes $(\boldsymbol{R}^4, \overline{\boldsymbol{H}}^*)$ der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. Der Raum $(\boldsymbol{R}^4, \overline{\boldsymbol{H}}^*)$ kann also gewissermaßen als „Produkt" der harmonischen Räume $(\boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{H}^*)$ und $(\boldsymbol{R}, \tilde{\boldsymbol{H}}^*)$ aufgefaßt werden.

Damit liegt die Frage nahe, ob beliebige harmonische Räume eine Produktbildung zulassen.

Kürzlich haben J. Bliedtner und W. Hansen [3] Bedingungen dafür angegeben, wann einem Standard-Prozeß wieder ein harmonischer Raum im obigen Sinn zugeordnet werden kann. Damit liegt es auf der Hand, wie man bei der Konstruktion eines Produktes zweier harmonischer Räume vorzugehen hat: Man konstruiert zu jedem der beiden harmonischen Räume einen zugehörigen Prozeß, bildet nach obigem Verfahren das Produkt von beiden und kehrt mit Hilfe des Ergebnisses von Bliedtner-

Hansen zurück zu dem zum Produktprozeß gehörigen harmonischen Raum.

Bei der Verwirklichung dieses Programmes anhand von konkreten Beispielen stellt sich heraus, daß es nicht immer funktioniert: Oft genügen die exzessiven Funktionen des Produktprozesses nicht mehr den Axiomen, die von hyperharmonischen Funktionen erfüllt sein müssen.

In der vorgelegten Arbeit werden nun hinreichende Bedingungen für die „Produktfähigkeit" eines harmonischen Raumes bzw. des zugehörigen Prozesses angegeben.

§ 1. Existenz einer harmonischen Produktstruktur

Vorbemerkung. Es sei $(X, \boldsymbol{H}^*)$ ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum mit abzählbarer Basis im Sinne von [6], in dem die positiven Konstanten hyperharmonisch sind.

Bekanntlich (vgl. [2], [5], [10]) gibt es zu $(X, \boldsymbol{H}^*)$ einen Markoff-Prozeß so, daß sich die wichtigsten Begriffe aus der Theorie der harmonischen Räume wahrscheinlichkeitstheoretisch interpretieren lassen. Genauer gilt:

$\boldsymbol{H}^*_+(X)$ ist die Menge der exzessiven Funktionen eines Standard-Prozesses $\mathfrak{X} = (\Omega, \mathfrak{A}, (P^x)_{x \in X}, (X_t)_{t \geq 0}, (\Theta_t)_{t \geq 0}, X, \mathfrak{B})$

1. mit stetigen Pfaden $t \mapsto X_t(w)$ auf $[0, \zeta(w)[$ $(w \in \Omega)$, wenn hierbei ζ die Lebenszeit bezeichnet;
2. mit eigentlichem Potentialkern U_0;

und

3. ohne Absorptionspunkte.

Die Übergangshalbgruppe $P = (P_t)_{t \geq 0}$ des obigen Prozesses ist quasi-Fellersch (zur Definition vgl. [3] Abschnitt 4). Sie kann zusätzlich so gewählt werden, daß gilt:

2'. U_0 ist beschränkt und stark-Fellersch, d. h. U_0 bildet alle beschränkten Borel-Funktionen in stetige, beschränkte Funktionen auf X ab. Die Funktion $U_0 1$ ist ein (stetiges, beschränktes) Potential.

Zur Vereinfachung der Redeweise nennen wir jede quasi-Fellersche Halbgruppe $P = (P_t)_{t \geq 0}$ submarkoffscher Kerne mit $P_0 = \mathrm{I}$,

welche einem harmonischen Raum im obigen Sinne zugeordnet wird, eine zum harmonischen Raum *passende* Halbgruppe. Ist zusätzlich die Bedingung 2′ erfüllt, so heiße P *passend mit stark-Fellerschem beschränktem Potentialkern.*

Sei nun $(\tilde{X}, \tilde{\boldsymbol{H}}^*)$ ein zweiter $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum mit abzählbarer Basis und $1 \in \tilde{\boldsymbol{H}}^*_+(\tilde{X})$. Gemäß der Vorbemerkung seien ferner $\mathfrak{X} = (\Omega, \mathfrak{A}, (P^x), (X_t), (\Theta_t), X, \mathfrak{B})$ und $\tilde{\mathfrak{X}} = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{A}}, (\tilde{P}^x), (\tilde{X}_t), (\tilde{\Theta}_t), \tilde{X}, \tilde{\mathfrak{B}})$ zugehörige Standard-Prozesse mit Lebenszeiten ζ und $\tilde{\zeta}$, und $P = (P_t)_{t \geq 0}$, $\tilde{P} = (\tilde{P}_t)_{t \geq 0}$ passende Übergangshalbgruppen mit Resolventen $U = (U_p)_{p \geq 0}$, $\tilde{U} = (\tilde{U}_p)_{p \geq 0}$.

Mit $R = P \otimes \tilde{P} = (R_t)_{t \geq 0}$ bezeichnen wir das Produkt der Halbgruppen P und $\tilde{P}$ (vgl. [8] p. 318), definiert durch $R_t\big((x, \tilde{x}), B \times \tilde{B}\big) = P_t(x, B) \cdot \tilde{P}_t(\tilde{x}, \tilde{B})$ $(t \geq 0,\ x \in X,\ \tilde{x} \in \tilde{X},\ B \in \mathfrak{B},\ \tilde{B} \in \tilde{\mathfrak{B}})$, mit $W = (W_p)_{p \geq 0}$ die Resolvente von R.

Das nachfolgende Lemma gibt eine hinreichende Bedingung dafür an, wann die Halbgruppe R von einer harmonischen Struktur auf den Produktraum $X \times \tilde{X}$ herrührt. In § 2 werden wir untersuchen, wann diese Bedingung erfüllt ist.

Lemma. *Die Halbgruppe $R = (R_t)_{t \geq 0}$ besitze die folgende Eigenschaft:*

(+) *Jede bezüglich $(R_t)_{t \geq 0}$ exzessive Funktion ist Supremum einer isotonen Folge stetiger exzessiver Funktionen.*

Dann gibt es auf $X \times \tilde{X}$ ein Garbendatum $\overline{\boldsymbol{H}}^*$ derart, daß $(X \times \tilde{X}, \overline{\boldsymbol{H}}^*)$ ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum ist, dessen positive hyperharmonische Funktionen mit den R-exzessiven übereinstimmen.

Beweis. Nach [7], [8] pp. 326–329 existiert ein Standard-Prozeß $\mathfrak{X} \otimes \tilde{\mathfrak{X}} = (\bar{\Omega}, \bar{\mathfrak{A}}, (P^z), (Z_t), (\bar{\Theta}_t))$ mit Zustandsraum $(X \times \tilde{X}, \mathfrak{B} \otimes \tilde{\mathfrak{B}})$, dessen Übergangshalbgruppe die Produkthalbgruppe R ist. Dabei besteht die Pfadmenge dieses Produktprozesses aus allen Abbildungen

$$t \mapsto Z_t(w, \tilde{w}) \quad (\text{mit } w \in \Omega,\ \tilde{w} \in \tilde{\Omega}),$$

definiert durch

$$Z_t(w, \tilde{w}) = \big(X_t(w), \tilde{X}_t(\tilde{w})\big) \text{ für } t < \bar{\zeta}(w, \tilde{w}) := \inf\big(\zeta(w), \tilde{\zeta}(\tilde{w})\big).$$

Insbesondere sind auch die Pfade des Prozesses $\mathfrak{X} \otimes \tilde{\mathfrak{X}}$ stetig auf $[0, \bar{\zeta}(\cdot)[$, wobei $\bar{\zeta}$ die Lebenszeit von $\mathfrak{X} \otimes \tilde{\mathfrak{X}}$ bezeichnet. Ferner besitzt der Produktprozeß $\mathfrak{X} \otimes \tilde{\mathfrak{X}}$ keine Absorptionspunkte, da

$\mathfrak{X}$ und $\tilde{\mathfrak{X}}$ keine besitzen. Wie eine einfache Überlegung zeigt, folgt aus der Eigentlichkeit der Potentialkerne U_0 und $\tilde{U}_0$ die von W_0.

Auf Grund der Zusatzvoraussetzung (+) erfüllt somit der Kegel $\mathfrak{E}$ aller R-exzessiven Funktionen die Eigenschaften von [3] Theorem (5.2) 2 a–d. Es existiert daher eine harmonische Struktur $\bar{\boldsymbol{H}}^*$ auf $X \times \tilde{X}$ derart, daß gilt

$$\bar{\boldsymbol{H}}^*_+(X \times \tilde{X}) = \mathfrak{E}.$$

§ 2. Produkthalbgruppen mit stark-Fellerscher Resolvente

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wann die Produkthalbgruppe R die Bedingung (+) aus § 1. erfüllt. Wie sich herausstellen wird, hängt die Beantwortung dieser Frage entscheidend davon ab, wann die Resolvente W von R stark-Fellersch ist. Zunächst erinnern wir an die folgende

Definition. Ein endlicher Kern N auf einem lokalkompakten Raum X mit abzählbarer Basis heißt *Fellersch* bzw. *stark-Fellersch* bzw. *stark-Fellersch im engeren Sinn*, wenn die Abbildung

$$x \mapsto N(x, .)$$

von X in den Raum $M(X)$ aller endlichen Radonmaße auf X stetig ist bezüglich der initialen Topologie bezüglich der Familie $\mathfrak{K}(X)$ aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger (vage Topologie) bzw. der Familie $\mathfrak{B}_b$ aller beschränkten Borel-Funktionen bzw. bezüglich der Normtopologie auf $M(X)$.
Eine Resolvente $(U_p)_{p \geq 0}$ heißt *Fellersch* (bzw. *stark-Fellersch* bzw. *stark-Fellersch im engeren Sinn*), wenn alle Kerne U_p mit $p > 0$ diese Eigenschaft besitzen.

Bemerkungen. Es sei P eine Halbgruppe submarkoffscher Kerne auf einem lokalkompakten Raum X mit abzählbarer Basis.

1. Ist P quasi-Fellersch, so ist jeder Kern P_t $(t > 0)$ definitionsgemäß ein Fellerscher Kern.

2. Ist der Potentialkern $U_0 = \int_0^\infty P_t \, dt$ stark-Fellersch, so folgt aus der Resolventengleichung, daß sogar die Resolvente $(U_p)_{p \geq 0}$ stark-Fellersch ist.

3. Ist $U_0 1$ reellwertig (z. B. wenn U_0 stark-Fellersch ist), so gilt für jedes $f \in \mathfrak{B}_b$ und $x \in X$

$$\lim_{t \to \infty} (P_t f)(x) = 0.$$

4. Ist $(P_t)_{t \geq 0}$ quasi-Fellersch, so folgt aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue die rechtsseitige Stetigkeit der Abbildung

$$t \mapsto (P_t f)(x)$$

für jedes $f \in C_0(X)$ und $x \in X$.

Für den Rest dieses Abschnittes seien nun $P = (P_t)_{t \geq 0}$, $\tilde{P} = (\tilde{P}_t)_{t \geq 0}$ zwei normale quasi-Fellersche Halbgruppen auf lokalkompakten Räumen X und $\tilde{X}$ mit abzählbaren Basen. Wir setzen ferner voraus, daß die Resolventen $(U_p)_{p \geq 0}$ und $(\tilde{U}_p)_{p \geq 0}$ stark-Fellersch sind. Nach [8] p. 330 ist dann jeder Kern R_t $(t > 0)$ der Produkthalbgruppe $R = P \otimes \tilde{P}$ wieder Fellersch; dagegen ist im allgemeinen der Potentialkern W_0 von R nicht stark-Fellersch, wie das Beispiel $P = \tilde{P} =$ Halbgruppe der gleichmäßigen Bewegung nach links auf $\boldsymbol{R}_+^*$ (vgl. § 3) zeigt.

Die nachfolgenden Hilfssätze dienen der Beantwortung der eingangs gestellten Fragen. Wie das vorausgehende Beispiel zeigt, benötigen wir dazu weitere Voraussetzungen.

Lemma 1. *Es sei $f \in \mathfrak{B}_b$ mit $f \geq 0$. Ist jeder Kern P_t, $t > 0$, stark-Fellersch und ist $(P_t f)(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in X$ und alle positiven rationalen Zahlen t, so gilt sogar*

$$(P_t f)(x_0) = 0$$

für alle reellen Zahlen $t \geq 0$.

Beweis. Sei $x_0 \in X$ mit $(P_t f)(x_0) = 0$ für alle rationalen Zahlen $t \geq 0$ und sei $t_0 \in \boldsymbol{R}_+^*$ beliebig. Nach Voraussetzung ist die Abbildung $P_{t_0} f$ stetig, also Supremum einer isotonen Folge $(g_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ stetiger, positiver Funktionen mit kompaktem Träger. Insbesondere gilt für jedes $t \in \boldsymbol{Q}$, $t \geq t_0$, und $n \in \boldsymbol{N}$

$$0 \leq P_{t-t_0}(g_n)(x_0) \leq P_{t-t_0}(P_{t_0} f)(x_0) = (P_t f)(x_0) = 0,$$

wegen der rechtsseitigen Stetigkeit der Abbildungen

$$t \mapsto (P_t g_n)(x_0) \quad (n \in \boldsymbol{N})$$

auf $\boldsymbol{R}_+$ (Bemerkung 4) also

$$g_n(x_0) = \lim_{t \to t_0, t > t_0} P_{t-t_0}(g_n)(x_0) = 0 \; (n \in \boldsymbol{N}),$$

und damit $(P_{t_0} f)(x_0) = 0$.

Lemma 2. *Sei g eine beschränkte positive Borel-Funktion auf $\boldsymbol{R}_+$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g_\varepsilon \in C_b(\boldsymbol{R}_+)$ mit $g_\varepsilon \geq 0$ und $\| g_\varepsilon \|_\infty \leq \| g \|_\infty$ derart, daß das Lebesgue-Maß der Menge*

$$A_\varepsilon := \{t \in \boldsymbol{R}_+ : g(t) \neq g_\varepsilon(t)\}$$

kleiner als ε ist. Verschwindet g im Unendlichen, so kann auch g_ε in $C_0(\boldsymbol{R}_+)$ gewählt werden.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Anwendung des Satzes von Lusin (vgl. [1] p. 202) auf die kompakten Räume

$$X_n := [n - 1 + \tfrac{\varepsilon}{2^{n+2}}, n - \tfrac{\varepsilon}{2^{n+2}}]$$

und die endlichen Maße $\lambda_n := \lambda^1|_{X_n}$ (= Restriktion des Lebesgue-Maßes λ^1 auf X_n; $n \in \boldsymbol{N}$) liefert die Existenz einer Folge kompakter Mengen $(K_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ mit

$$K_n \subset X_n, \; \lambda^1(X_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

derart, daß die Funktion g auf jeder der Mengen K_n stetig ist.

Die Menge $K := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ist abgeschlossen und es gilt

$$\lambda^1(\boldsymbol{R}_+ \setminus K) < \varepsilon.$$

Die Funktion $g|_K$ besitzt wegen der Normalität des topologischen Raumes $\boldsymbol{R}_+$ eine positive stetige Fortsetzung g_ε auf ganz $\boldsymbol{R}_+$ mit

$$\| g_\varepsilon |_{[n-1, n]} \|_\infty = \| g |_{K_n} \|_\infty \leq \| g \|_\infty.$$

Insbesondere verschwindet g_ε im Unendlichen, wenn g das tut. Aus $K \subset \boldsymbol{R}_+ \setminus A_\varepsilon$ folgt dann die Behauptung.

Lemma 3. *Für ein $p \geqslant 0$ sei $\tilde{U}_p$ stark-Fellersch. Dann ist für jedes $g \in C_0(\boldsymbol{R}_+)$ und jedes $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{B}}_b$ die Abbildung*

$$\langle \tilde{f}, g \rangle_p : \tilde{x} \mapsto \int_0^\infty (\tilde{P}_t \tilde{f})(\tilde{x}) \cdot g(t) \cdot e^{-pt} \, dt$$

stetig auf $\tilde{X}$.

Beweis. Nach Voraussetzung sind die Abbildungen

$$\langle \tilde{f}, 1\rangle_p := \int_0^\infty (\tilde{P}_t \tilde{f}) \cdot e^{-pt}\, dt = \tilde{U}_p \tilde{f},$$

sowie

$$\langle \tilde{f}, e^{-q \cdot id}\rangle_p = \int_0^\infty (\tilde{P}_t \tilde{f}) \cdot e^{-(p+q)t}\, dt = \tilde{U}_{p+q} \tilde{f} \quad (q \geq 0)$$

stetig.

Der von den Funktionen g_q, $q \geq 0$,

$$g_q : \overline{\boldsymbol{R}}_+ \mapsto \boldsymbol{R}$$

$$g_q(t) = \begin{Bmatrix} e^{-qt} & \text{falls } t \in \boldsymbol{R}_+ \\ 0 & \text{falls } t = \infty \end{Bmatrix} (q > 0)$$

und $g_0 = 1$ aufgespannte Vektorraum G bildet eine verschränkt punktetrennende Unteralgebra von $C(\overline{\boldsymbol{R}}_+)$. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß existiert somit zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g_\varepsilon \in G$ mit $g_\varepsilon(\infty) = 0$ und

$$\sup_{t \geq 0} |g_\varepsilon(t) - g(t)| < \varepsilon.$$

Also konvergiert die Folge $(\langle \tilde{f}, g_{1/n}\rangle_p)_{n \in \boldsymbol{N}}$ stetiger Funktionen wegen

$$\|\langle \tilde{f}, g\rangle_p - \langle \tilde{f}, g_{1/n}\rangle_p\|_\infty \leq \int_0^\infty \tilde{P}_t |\tilde{f}| \cdot |g(t) - g_{1/n}(t)| \cdot e^{-pt}\, dt$$

$$\leq \frac{1}{n} \cdot \tilde{U}_p |\tilde{f}| \quad (n \in \boldsymbol{N})$$

und der Lokal-Beschränktheit von $\tilde{U}_p |\tilde{f}|$ gleichmäßig gegen $\langle \tilde{f}, g\rangle_p$.

Lemma 4. *Sei $p \geq 0$ derart, daß $\tilde{U}_p$ stark-Fellersch ist, und seien g bzw. $\tilde{f}$ beschränkte Borel-Funktionen auf $\boldsymbol{R}_+$ bzw. $\tilde{X}$. Im Falle $p = 0$ verschwinde g im Unendlichen. Dann ist die Abbildung*

$$\langle \tilde{f}, g\rangle_p : \tilde{x} \mapsto \int_0^\infty (\tilde{P}_t \tilde{f})(\tilde{x}) \cdot g(t) \cdot e^{-pt}\, dt$$

stetig auf $\tilde{X}$.

Beweis. Nach Lemma 2 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g_\varepsilon \in C_b(\boldsymbol{R}_+)$ mit $\|g_\varepsilon\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ derart, daß das Lebesgue-Maß der Menge $A_\varepsilon := \{t \in \boldsymbol{R}_+ : g_\varepsilon(t) \neq g(t)\}$ kleiner als ε ist, und mit $g_\varepsilon \in C_0(\boldsymbol{R}_+)$ im Falle $p = 0$. Somit gilt

$$\| \langle \tilde{f}, g \rangle_p - \langle \tilde{f}, g_\varepsilon \cdot e^{-\frac{p}{2} \cdot id} \rangle_{\frac{p}{2}} \|_\infty =$$

$$= \sup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \left| \int_{A_\varepsilon} (\tilde{P}_t \tilde{f})(\tilde{x}) \cdot (g(t) \cdot e^{-\frac{p}{2} t} - g_\varepsilon(t) \cdot e^{-\frac{p}{2} t}) \cdot e^{-\frac{p}{2} t} \, dt \right|$$

$$\leq 2 \| g \|_\infty \cdot \| \tilde{f} \|_\infty \cdot \varepsilon.$$

Aus der Stetigkeit von $\langle \tilde{f}, g_\varepsilon \cdot e^{-\frac{p}{2} id} \rangle_{\frac{p}{2}}$ (vgl. Lemma 3) folgt die Stetigkeit von $\langle \tilde{f}, g \rangle_p$.

Zusatz. *Im Falle $p > 0$ genügt: g integrierbar bezüglich $e^{-p \cdot id} \cdot \lambda^1$.*

Denn: Der Raum G aus Lemma 3 liegt dicht in $C(\overline{\boldsymbol{R}}_+)$; somit liegt G auch dicht in $L^1(\overline{\boldsymbol{R}}_+, e^{-p \cdot id} \cdot \lambda^1)$, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $g_\varepsilon \in G$ mit

$$\int_0^\infty | g(t) - g_\varepsilon(t) | \cdot e^{-pt} \, dt < \varepsilon.$$

Dann gilt:

$$\| \langle \tilde{f}, g \rangle_p - \langle \tilde{f}, g_\varepsilon \cdot e^{-\frac{p}{2} id} \rangle_{\frac{p}{2}} \|_\infty = \sup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \left| \int_0^\infty (\tilde{P}_t \tilde{f})(\tilde{x}) \, [g(t) - \right.$$

$$\left. - g_\varepsilon(t)] \, e^{-pt} \, dt \right| \leq \| \tilde{f} \|_\infty \cdot \int_0^\infty | g(t) - g_\varepsilon(t) | \, e^{-pt} \, dt \leq \| \tilde{f} \|_\infty \cdot \varepsilon.$$

Lemma 5. *Jeder Kern P_t mit $t > 0$ sei stark-Fellersch.*

a) *Zu jeder konvergenten Folge $(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ in X mit Grenzwert x_0 existiert ein endliches Maß m auf X derart, daß alle Maße $P_t(x_n, .)$ $(t > 0,\ n \in \boldsymbol{N}_0)$ absolut-stetig sind bezüglich m.*

b) *Für jedes $p \geq 0$ sind die Maße μ_n $(n \in \boldsymbol{N}_0)$, definiert durch*

$$\mu_n(A) := \int_0^\infty \int_X 1_A(t, y) \, P_t(x_n, dy) \, e^{-pt} \, dt$$

(wobei A eine Borelsche Teilmenge von $\boldsymbol{R}_+ \times X$ ist), absolut-stetig bezüglich des Maßes $\mu := e^{-p \cdot id} \cdot \lambda^1 \otimes m$.

c) *Es gibt eine Folge $(G_n)_{n \in \boldsymbol{N}_0}$ meßbarer Abbildungen ≥ 0 auf $\boldsymbol{R}_+ \times X$ mit $G_n \cdot \mu = \mu_n$ für alle $n \in \boldsymbol{N}_0$.*

d) *Es gibt eine Nullmenge $N \subset \boldsymbol{R}_+$ derart, daß für alle $t \in \boldsymbol{R}_+ \setminus N$ und $n \in \boldsymbol{N}_0$ gilt*

$$G_n(t, y) \cdot m(dy) = P_t(x_n, dy).$$

e) *Ist jeder Kern P_t, $t > 0$, sogar stark-Fellersch im engeren Sinn, so konvergiert die Funktionenfolge $(G_n(t, .))_{n \in N}$ gegen $G_0(t, .)$ in $L^1(X, m)$ für jedes $t \in \boldsymbol{R}_+ \setminus N$.*

Beweis. Ordnen wir die Menge $\boldsymbol{Q}_+$ der positiven rationalen Zahlen in eine Folge $(\varrho_n)_{n \in N}$ an, so leistet wegen Lemma 1 das Maß

$$m(.) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} \cdot P_{\varrho_n}(x_m, .)$$

das in a) Verlangte. Die Behauptungen b) und c) folgen unmittelbar aus a) und dem Satz von Radon-Nikodym.

Zum Beweis von d) sei D eine abzählbare dichte Teilmenge des Raumes $\mathfrak{K}(X)$ aller stetigen Funktionen auf X mit kompaktem Träger. Für jedes $f \in D$ und jedes $n \in \boldsymbol{N}_0$ sind die Maße $\beta_{f,n}$ und $\bar{\beta}_{f,n}$ auf $\boldsymbol{R}_+$, definiert durch

$$\beta_{f,n}(B) := \int_B (P_t f)(x_n) \cdot e^{-pt}\, dt = \mu_n(1_B \otimes f)$$

und

$$\bar{\beta}_{f,n}(B) := \int_B \Big(\int_X G_n(t, y) \cdot f(y)\, m(dy) \Big) \cdot e^{-pt}\, dt =$$
$$= \mu\big(G_n \cdot (1_B \otimes f)\big)$$

wegen c) identisch. Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Radon-Nikodym und der Abzählbarkeit von D existiert eine Nullmenge $N \subset \boldsymbol{R}_+$ so, daß die Dichtefunktionen

$$t \mapsto (P_t f)(x_n)$$

und

$$t \mapsto \int G_n(t, y) \cdot f(y)\, m(dy)$$

auf $\boldsymbol{R}_+ \setminus N$ für alle $n \in \boldsymbol{N}_0$ und $f \in D$ übereinstimmen.

Da D dicht in $\mathfrak{K}(X)$ liegt, folgt hieraus die Gleichheit der Maße $G_n(t, y) \cdot m(dy)$ und $P_t(x_n, dy)$ für jedes $t \in \boldsymbol{R}_+ \setminus N$ und $n \in \boldsymbol{N}_0$. Damit ist d) bewiesen.

Aus

$$\lim_{n \to \infty} \int | G_n(t, y) - G_0(t, y) |\, m(dy) = \lim_{n \to \infty} \| P_t(x_n, .) - P_t(x_0, .) \|$$

für alle $t \in \boldsymbol{R}_+ \setminus N$ und der Voraussetzung über $(P_t)_{t \geq 0}$ folgt schließlich e).

Satz. *Ist jeder Kern P_t, $t > 0$, stark-Fellersch im engeren Sinn, so ist die Resolvente $(W_p)_{p \geq 0}$ der Produkthalbgruppe $R = (R_t)_{t \geq 0} = P \otimes \tilde{P}$ auf $X \times \tilde{X}$ stark-Fellersch.*

Beweis. Seien $p > 0$, f eine positive beschränkte Borel-Funktion auf $X \times \tilde{X}$ und $(x_n)_{n \in N}$ bzw. $(\tilde{x}_n)_{n \in N}$ konvergente Folgen in X bzw. in $\tilde{X}$ mit Grenzwert x_0 bzw. $\tilde{x}_0$.

Für jedes $n \in \boldsymbol{N}$ setzen wir

$$I_1(n) := \int_0^\infty \left((R_t f)(x_0, \tilde{x}_0) - (R_t f)(x_n, \tilde{x}_0)\right) \cdot e^{-pt}\, dt,$$

$$I_2(n) := \int_0^\infty \left((R_t f)(x_n, \tilde{x}_0) - (R_t f)(x_n, \tilde{x}_n)\right) \cdot e^{-pt}\, dt$$

und behaupten, daß die Folge $(I_1(n) + I_2(n))_{n \in N} = ((W_p f)(x_0, \tilde{x}_0) - (W_p f)(x_n, \tilde{x}_n))_{n \in N}$ eine Nullfolge ist.

Seien dazu zunächst die Folge $(G_n)_{n \in N_0}$ und die Maße m und μ wie in Lemma 5 gewählt. Da $(P_t)_{t \geq 0}$ stark-Fellersch im engeren Sinn ist, konvergiert die Funktionenfolge $(h_n)_{n \in N}$ auf $\boldsymbol{R}_+^* \times \tilde{X}$, definiert durch

$$h_n(t, \tilde{y}) := \int_X f(y, \tilde{y})\, P_t(x_0, dy) - \int_X f(y, \tilde{y})\, P_t(x_n, dy)$$
$$(t \in \boldsymbol{R}_+^*,\ y \in \tilde{X},\ n \in \boldsymbol{N})$$

punktweise gegen 0 und ist zudem durch $2 \cdot \|f\|_\infty$ beschränkt. Somit gilt nach dem Satz von Lebesgue

$$(1) \qquad 0 = \lim_{n \to \infty} \left| \int_0^\infty \int_{\tilde{X}} h_n(t, \tilde{y})\, \tilde{P}_t(\tilde{x}_0, d\tilde{y})\, e^{-pt}\, dt \right| = \lim_{n \to \infty} |I_1(n)|.$$

Seien nun für $n \in \boldsymbol{N}$ und $y \in X$

$$f_y : \tilde{X} \mapsto \boldsymbol{R}$$
$$\tilde{y} \mapsto f(y, \tilde{y})$$

und

$$g_n(y) := \int_0^\infty ((\tilde{P}_t f_y)(\tilde{x}_0) - (\tilde{P}_t f_y)(\tilde{x}_n)) \cdot (G_n(t, y) - G_0(t, y)) \cdot e^{-pt}\, dt,$$

$$h_n(y) := \int_0^\infty ((\tilde{P}_t f_y)(\tilde{x}_0) - (\tilde{P}_t f_y)(\tilde{x}_n)) \cdot G_0(t, y) \cdot e^{-pt}\, dt.$$

Da G_0 μ-integrierbar ist, ist für m-fast alle y die Funktion $t \mapsto G_0(t, y)$ bezüglich $e^{-p \cdot id} \cdot \lambda^1$ integrierbar. Dann ist der Zusatz zu Lemma 4 anwendbar, so daß für m-fast alle $y \in X$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} h_n(y) = 0 \text{ und } |h_n(y)| \leq 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \int_0^\infty G_0(t, y) \cdot e^{-pt}\, dt.$$

Da die Funktion $y \mapsto \int G_0(t, y) \cdot e^{-pt}\, dt$ bezüglich des Maßes m integrierbar ist, gilt wiederum nach dem Satz von Lebesgue

$$(2) \qquad 0 = \lim_{n \to \infty} \int h_n(y)\, m(dy) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_0^\infty \int_X \Big(\int_{\tilde{X}} f(y, \tilde{y})\, \tilde{P}_t(\tilde{x}_0, d\tilde{y}) - \int_{\tilde{X}} f(y, \tilde{y})\, \tilde{P}_t(\tilde{x}_n, d\tilde{y}) \Big) P_t(x_0, dy) \cdot e^{-pt}\, dt$$

$$= \lim_{n \to \infty} (W_p(f)(x_0, \tilde{x}_0) - W_p(f)(x_0, \tilde{x}_n)).$$

Nach Lemma 5e) konvergieren die Funktionen

$$H_n : t \mapsto \int_X |G_n(t, y) - G_0(t, y)|\, m(dy) \quad (n \in \boldsymbol{N})$$

auf $\boldsymbol{R}_+^*$ fast-überall gegen 0 und sind durch die Konstante 2 beschränkt. Abermals nach dem Satz von Lebesgue gilt somit

$$(2') \quad 0 = 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \lim_{n \to \infty} \int_0^\infty H_n(t) \cdot e^{-pt}\, dt \geq \lim_{n \to \infty} \Big| \int_X g_n(y)\, m(dy) \Big|.$$

Fassen wir (1), (2) und (2′) zusammen, so erhalten wir schließlich die Behauptung:

$$\lim_{n \to \infty} |(W_p f)(x_0, \tilde{x}_0) - (W_p f)(x_n, \tilde{x}_n)| \leq \lim_{n \to \infty} |I_1(n)| + |I_2(n)| = 0.$$

Bemerkung. Wie der Beweis des Satzes zeigt, ist für jede beschränkte Borel-Funktion f auf $X \times \tilde{X}$ und jedes $p > 0$ die Abbildung $W_p f$ partiell-stetig auf $X \times \tilde{X}$, falls jeder Kern P_t, $t > 0$, stark-Fellersch ist. Hieraus erhalten wir:

Korollar. *Ist jeder Kern P_t, $t > 0$, stark-Fellersch, so gibt es ein Referenzmaß auf $X \times \tilde{X}$; d. h. es existiert ein endliches Maß μ auf $X \times \tilde{X}$ mit*

$$\mu(A) = 0 \Leftrightarrow W_p(\cdot, A) = 0$$

für alle Borel-Mengen $A \subset X \times \tilde{X}$ und alle (oder ein) $p \geq 0$.

Beweis. Seien $(x_n)_{n \in N}$ und $(\tilde{x}_n)_{n \in N}$ dichte Folgen in X und $\tilde{X}$. Wir setzen

$$\mu(\cdot) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} \cdot W_1((x_n, \tilde{x}_m), \cdot).$$

Aus $W_{p_0}(\cdot, A) = 0$ für eine Borel-Menge A und ein $p_0 \geq 0$ folgt aus der Resolventengleichung sofort

$$W_p(\cdot, A) = 0 \text{ für alle } p \geq 0,$$

und damit

$$\mu(A) = 0.$$

Umgekehrt folgt aus $\mu(A) = 0$ zunächst $W_1((x_n, \tilde{x}_m), A) = 0$ für alle $n, m \in \boldsymbol{N}$, sodann wegen der partiellen Stetigkeit

$$W_1((x_n, \tilde{x}), A) = 0 \text{ für alle } \tilde{x} \in \tilde{X}$$

und schließlich

$$W_1(\tilde{z}, A) = 0 \text{ für alle } \tilde{z} \in X \times \tilde{X}.$$

Korollar. *Ist $\tilde{U}_0 1$ stetig und reellwertig, und ist jeder Kern P_t, $t > 0$, stark-Fellersch im engeren Sinn, so ist das Potential $W_0 f$ stetig und reellwertig für jede beschränkte Borel-Funktion f auf $X \times \tilde{X}$. Ist $\tilde{U}_0 1$ sogar beschränkt, so ist W_0 ein beschränkter Kern.*

Beweis. Im ersten Teil des Beweises zeigen wir zunächst die Reellwertigkeit und Stetigkeit von $W_0 1$. Seien dazu $x \in X$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

Wegen $W_0 1(x, \tilde{x}) \leq \tilde{U}_0 1(\tilde{x})$ ist $W_0 1$ reellwertig und beschränkt, falls $\tilde{U}_0 1$ es ist. Da die Funktion $t \mapsto P_t 1(x)$ monoton fallend ist, verschwindet die Funktion

$$h : t \mapsto P_t 1(x) - a$$

im Unendlichen, wobei $a = \inf_{t \geq 0} P_t 1(x)$ ist. Nach Lemma 4 ist die Abbildung

$$\tilde{y} \mapsto \int_0^\infty h(t) \cdot \tilde{P}_t\, 1(\tilde{y})\, dt$$

stetig, nach Voraussetzung also auch die Abbildung

$$\tilde{q}(.) := \int_0^\infty P_t\, 1(x) \cdot \tilde{P}_t\, 1(.)\, dt = \int_0^\infty h(t) \cdot \tilde{P}_t 1(.)\, dt + \tilde{U}_0 1(.) \cdot a.$$

Seien nun d und $\tilde{d}$ zwei die Topologien von X und $\tilde{X}$ definierende Metriken. Nach Voraussetzung und dem soeben Bewiesenen existiert ein $\delta > 0$ derart, daß gilt

a) Für alle $y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ folgt $\| P_\varepsilon(x, .) - P_\varepsilon(y, .) \| < \varepsilon$;

b) Für alle $\tilde{y} \in \tilde{X}$ mit $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) < \delta$ folgt $| \tilde{q}(\tilde{x}) - \tilde{q}(\tilde{y}) | < \varepsilon$.

Aus a) ergibt sich

a') Für alle $y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ und alle $t \geq \varepsilon$ gilt

$$| (P_t 1)(x) - (P_t 1)(y) | = | P_\varepsilon(P_{t-\varepsilon} 1)(x) - P_\varepsilon(P_{t-\varepsilon} 1)(y) | \leq$$
$$\leq \| P_\varepsilon(x, .) - P_\varepsilon(y, .) \| \cdot \| P_{t-\varepsilon} 1 \|_\infty < \varepsilon.$$

Somit ergibt sich für alle $(y, \tilde{y}) \in X \times \tilde{X}$ mit $d(x, y) < \delta$ und $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) < \delta$ die Abschätzung

$$| (W_0 1)(x, \tilde{x}) - (W_0 1)(y, \tilde{y}) | \leq$$
$$\leq | (W_0 1)(x, \tilde{x}) - (W_0 1)(x, \tilde{y}) | + | (W_0 1)(x, \tilde{y}) - (W_0 1)(y, \tilde{y}) | \leq$$
$$\leq | \tilde{q}(\tilde{x}) - \tilde{q}(\tilde{y}) | + \int_0^\infty | (P_t\, 1)(x) - (P_t\, 1)(y) | \cdot (\tilde{P}_t\, 1)(\tilde{y})\, dt <$$
$$< \varepsilon + \int_0^\varepsilon \ldots + \int_\varepsilon^\infty \ldots \leq \varepsilon + 2\,\varepsilon + \varepsilon \cdot (\tilde{U}_0\, 1)(\tilde{y}).$$

Aus der lokalen Beschränktheit von $\tilde{U}_0\, 1$ folgt dann die Stetigkeit von $W_0\, 1$.

Sei nun f eine beschränkte (ohne Einschränkung der Allgemeinheit: positive) Borel-Funktion auf $X \times \tilde{X}$. Weil $(W_p)_{p \geq 0}$ stark-Fellersch ist, ist wegen [4] Ex. II. 2.16 jede exzessive Funktion, insbesondere also $W_0 f$ und $W_0(\| f \|_\infty - f)$, nach unten halbstetig. Aus der Stetigkeit von $W_0 f + W_0(\| f \|_\infty - f) = \| f \|_\infty \cdot W_0\, 1$ folgt die Behauptung.

Korollar. *Unter der Voraussetzung des vorangehenden Korollars erfüllt die Produkthalbgruppe $(R_t)_{t \geq 0}$ die Bedingung (+) aus § 1; d. h.: Jede bezüglich (R_t) exzessive Funktion f ist Supremum einer isotonen Folge stetiger, reellwertiger exzessiver Funktionen.*

Beweis. Aus [9] Theorem 12.1 folgt die Existenz einer Folge $(g_n)_{n \in N}$ beschränkter, positiver, universell meßbarer Funktionen mit $(W_0 g_n)_{n \in N} \uparrow \tilde{f}$. Die Funktionen $W_0 g_n$ sind exzessiv und reellwertig; ihre Stetigkeit ergibt sich wie im Beweis des vorangehenden Korollars.

§ 3. Produktfähige harmonische Räume

Um die Ergebnisse der Paragraphen 1 und 2 zusammenfassen zu können, treffen wir die folgende

Definition. Ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum $(X, \boldsymbol{H}^*)$ mit abzählbarer Basis heiße *produktfähig*, wenn es eine zu ihm passende Halbgruppe $P = (P_t)_{t \geq 0}$ mit der folgenden Eigenschaft gibt:

Ist $(\tilde{X}, \tilde{\boldsymbol{H}}^*)$ ein beliebiger weiterer $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum und $\tilde{P} = (\tilde{P}_t)_{t \geq 0}$ eine passende Halbgruppe mit stark-Fellerschem Potentialkern, so existiert ein „harmonischer Produktraum" $(X \times \tilde{X}, \bar{\boldsymbol{H}}^*)$; d. h. es gibt ein Garbendatum $\bar{\boldsymbol{H}}^*$ auf $X \times \tilde{X}$ derart, daß $(X \times \tilde{X}, \bar{\boldsymbol{H}}^*)$ ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum und $\bar{\boldsymbol{H}}^*_+(X \times \tilde{X})$ gleich der Menge der $P \otimes \tilde{P}$-exzessiven Funktionen ist.

Aus dem in den §§ 1 und 2 Bewiesenen folgt nun sofort der

Satz. *Ist jeder Kern P_t, $t > 0$, stark-Fellersch im engeren Sinn, so ist $(X, \boldsymbol{H}^*)$ produktfähig.*

Beispiele. 1) Der harmonische Raum der Lösungen der Laplace-Gleichung auf $]0,1[$ ist produktfähig. Dies folgt entweder aus der Tatsache, daß die Halbgruppe der Brownschen Bewegung auf $]0,1[$ stark-Fellersch im engeren Sinn ist, und aus obigem Satz, oder aus dem nachfolgenden Satz.

2) Der harmonische Raum $(\boldsymbol{R}^*_+, \boldsymbol{H}^*_\delta)$ aus [6] Theorem 2.1.2. (mit der offenen Menge $\boldsymbol{R}^*_+ = \boldsymbol{R}_+ \setminus \{0\} \subset \boldsymbol{R}$ als Grundraum), dessen hyperharmonische Funktionen die lokal wachsenden und nach unten halbstetigen Funktionen sind, ist nicht produkt-fähig.

In der Tat: Wir werden im folgenden sehen, daß $(\boldsymbol{R}^*_+, \boldsymbol{H}^*_\delta)$ der „typische Vertreter" eines nicht-produktfähigen Raumes ist.

Bekanntlich ist die quasi-Fellersche Halbgruppe $\delta = (\delta_t)_{t \geq 0}$ der gleichmäßigen Bewegung nach links auf $\boldsymbol{R}^*_+$, definiert durch

$$\delta_t(s,.) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{s-t}(.) \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ wenn } \begin{Bmatrix} 0 \leq t < s \\ 0 < s \leq t \end{Bmatrix},$$

eine zu $(\boldsymbol{R}_+^*, \boldsymbol{H}_\delta^*)$ passende Halbgruppe mit stark-Fellerschem Potentialkern

$$\tilde{U}_0(s,.) = \int_0^s \varepsilon_{s-t}(.)\, dt = \int_0^s \varepsilon_t(.)\, dt.$$

Das oben angekündigte Ergebnis besagt nun insbesondere zum einen, daß $(\boldsymbol{R}_+^*, \boldsymbol{H}_\delta^*)$ als „Testraum" verwendet werden kann, zum anderen, daß die Bedingung an die Halbgruppe im vorangehenden Satz in Wirklichkeit auch notwendig ist.

Satz. *Ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum mit abzählbarer Basis $(X, \boldsymbol{H}^*)$ ist genau dann produktfähig, wenn er die folgende Bedingung erfüllt:*

(*) *Zu einer geeigneten passenden Halbgruppe $P = (P_t)_{t \geq 0}$ gibt es eine harmonische Produktstruktur $\bar{\boldsymbol{H}}^*$ auf $X \times \boldsymbol{R}_+^*$ derart, daß $\bar{\boldsymbol{H}}_+^*(X \times \boldsymbol{R}_+^*)$ die Menge der bezüglich $R = P \otimes \delta$ exzessiven Funktionen ist.*

Jeder Kern P_t, $t > 0$, ist dann notwendig stark-Fellersch im engeren Sinn.

Beweis. Definitionsgemäß erfüllt ein produktfähiger harmonischer Raum die Bedingung (*). Zum Beweis der Umkehrung zeigen wir, daß (*) zur Folge hat, daß P stark-Fellersch im engeren Sinn ist. Aus dem vorangehenden Satz folgt dann die Produktfähigkeit von $(X, \boldsymbol{H}^*)$.

Für jede Borel-Funktion g auf X mit $0 \leq g \leq 1$ setzen wir

$$\begin{aligned} H(g) : X \times \boldsymbol{R}_+^* &\to \boldsymbol{R} \\ (x, t) &\mapsto (P_t g)(x) \end{aligned}$$

und behaupten, daß $H(g)$ harmonisch bezüglich des Produktraumes $(X \times \boldsymbol{R}_+^*, \bar{\boldsymbol{H}}^*)$ ist. Den Beweis führen wir in zwei Schritten:

Zunächst zeigen wir, daß die Funktionen $H(g)$ und $u - H(g)$ exzessiv sind, wobei u eine beliebige superharmonische Funktion auf $X \times \boldsymbol{R}_+^*$ ist mit $u \geq H(g)$. Für $s, t > 0$ und $x \in X$ gilt nämlich

$$(\mathrm{R}_s(H(g)))(x,t) = \int_X \int_0^\infty H(g)(y,\tau)\,\delta_s(t,d\tau)\,P_s(x,dy) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{wenn } t \leq s \\ \int_X H(g)(y,t-s)\,P_s(x,dy) = (P_t g)(x) = H(g)(x,t) & \text{wenn } t > s, \end{cases}$$

sowie

$$(R_s u)(x,t) \leq u(x,t) \text{ und } (R_s u)(x,t) = 0, \text{ wenn } t \leq s;$$

insgesamt also

$$R_s(H(g)) \leq H(g); \lim_{s \to 0} R_s(H(g)) = H(g)$$

und

$$R_s(u - H(g)) \leq 1_{X \times]s,\infty[} \cdot (u - H(g)) \leq u - H(g),$$
$$\lim_{s \to 0} R_s(u - H(g)) = u - H(g).$$

Damit ist die Exzessivität von $H(g)$ und $u - H(g)$ bewiesen. Weil es zu jedem Punkt (x,t) eine offene Umgebung V und eine superharmonische Funktion u auf $X \times \boldsymbol{R}_+^*$ gibt, die auf V harmonisch ist, und $H(g)$ majorisiert (etwa $u = \hat{R}_2^{X \times \boldsymbol{R}_+^* \setminus V}$ für genügend kleines V), folgt hieraus die Harmonizität von $H(g)$.

Die Familie $(H(g))_{0 \leq g \leq 1}$ (wenn g alle positiven Borel-Funktionen mit $\|g\|_\infty \leq 1$ durchläuft) ist eine durch 1 gleichmäßig beschränkte Familie harmonischer Funktionen auf $X \times \boldsymbol{R}_+^*$, also gleichgradig stetig. Hieraus folgt die Stetigkeit der Abbildung

$$X \to M_+^1(X)$$
$$x \mapsto P_t(x,.),$$

wenn dabei der Raum $M_+^1(X)$ aller positiven Radon-Maße mit Gesamtmasse ≤ 1 auf X mit der Normtopologie (Totalvariation) versehen wird. Definitionsgemäß bedeutet dies gerade, daß P stark-Fellersch im engeren Sinn ist.

Korollar. $(\boldsymbol{R}_+^*, \boldsymbol{H}_\delta^*)$ *ist nicht produktfähig.*

Beweis. Im ersten Teil des Beweises zeigen wir: Ist $a \geq 0$ und $\tilde{\delta} = (\tilde{\delta}_t)_{t \geq 0}$ eine zum harmonischen Raum $(]a,\infty[, \boldsymbol{H}_\delta^* |_{]a,\infty[})$ passende Halbgruppe derart, daß die Lebenszeit $\tilde{\zeta}$ des zugehörigen Standard-Prozesses fast-sicher endlich ist, so nimmt jeder Kern

$\tilde{\delta}_t$ $(t \geq 0)$ nur die Werte 0 und 1 an. Wegen Translationsinvarianz können wir beim Beweis o. B. d. A. $a = 0$ annehmen.

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, (P^x), (X_t), (\Theta_t), \boldsymbol{R}_+^*, \mathfrak{B})$ der zur Halbgruppe δ der gleichmäßigen Bewegung nach links gehörige Standard-Prozeß mit $\Omega = \boldsymbol{R}_+^*$, $\zeta(\omega) = \omega$ und $X_t(\omega) = \omega - t$ für $0 < t < \omega$. Da δ und $\tilde{\delta}$ zu $(\boldsymbol{R}_+^*, \boldsymbol{H}_\delta^*)$ passen, besitzen sie dieselben Trefferverteilungen; d. h. die Kerne δ_K und $\tilde{\delta}_K$ (zur Definition vgl. [4] p. 61) auf der Alexandroff-Kompaktifizierung $\overline{\boldsymbol{R}}_+^*$ von $\boldsymbol{R}_+^*$ stimmen überein für jede kompakte Teilmenge K von $\overline{\boldsymbol{R}}_+^*$.

In der Tat: Sei zunächst $K \subset \boldsymbol{R}_+^*$ abgeschlossen. Dann gilt für jedes $x > 0$

$$\delta_K(x, .) = \varepsilon_x^K(.) = \tilde{\delta}_K(x, .),$$

und für den Alexandroff-Punkt $\Delta \in \overline{\boldsymbol{R}}_+^* \setminus \boldsymbol{R}_+^*$

$$\delta_K(\Delta, .) = 0 = \tilde{\delta}_K(\Delta, .).$$

Für eine beliebige kompakte Teilmenge K von $\overline{\boldsymbol{R}}_+^*$ mit $\Delta \in K$, eine Borelsche Teilmenge B von $\boldsymbol{R}_+^*$ und $x \in \overline{\boldsymbol{R}}_+^*$ gilt

$$\begin{aligned}
\delta_K(x, B) &= E^x(1_B \circ X_{T_K}) = \\
&= E^x(1_B \circ X_{T_K} \cdot 1_{\{T_{K\setminus\{\Delta\}} < \infty\}}) + E^x(1_B \circ X_{T_K} \cdot 1_{\{T_{K\setminus\{\Delta\}} = \infty\}}) \\
&= E^x(1_B \circ X_{T_{K\setminus\{\Delta\}}} \cdot 1_{\{T_{K\setminus\{\Delta\}} < \infty\}}) + 0 \\
&= \delta_{K\setminus\{\Delta\}}(x, B) = \tilde{\delta}_{K\setminus\{\Delta\}}(x, B) = \tilde{\delta}_K(x, B),
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\delta_K(x, \{\Delta\}) &= \delta_K(x, \overline{\boldsymbol{R}}_+^*) - \delta_K(x, \boldsymbol{R}_+^*) = P^x(\{T_K < \infty\}) - \\
&- \delta_K(x, \boldsymbol{R}_+^*) = \tilde{P}^x(\{\tilde{T}_K < \infty\}) - \tilde{\delta}_K(x, \boldsymbol{R}_+^*) = \tilde{\delta}_K(x, \{\Delta\}),
\end{aligned}$$

wegen $T_K < \infty$ P^x-fast sicher, $\tilde{T}_K < \infty$ $\tilde{P}^x$-fast sicher.

Somit sind die Voraussetzungen von [4] Theorem V.5.1 erfüllt. Es existiert demnach eine Zeittransformation τ so, daß $\tilde{\delta}$ die Übergangshalbgruppe des transformierten Prozesses $(\Omega, \mathfrak{A}, (P^x), (X_{\tau_t}), (\Theta_{\tau_t}), \boldsymbol{R}_+^*, \mathfrak{B})$ ist. Insbesondere nimmt jedes $\tilde{\delta}_t$, $t \geq 0$, nur die Werte 0 und 1 an wegen

$$\tilde{\delta}_t(s, A) = P^s(\{X_{\tau_t} \in A\})\ (s > 0,\ A \in \mathfrak{B}).$$

Sei nun $(\tilde{\delta}_t)_{t \geq 0}$ eine beliebige zu $(\boldsymbol{R}_+^*, \boldsymbol{H}_\delta^*)$ passende Halbgruppe. Wir wenden den ersten Teil des Beweises auf die beim

Eintritt in $]0, \frac{1}{n}]$ gestoppten Halbgruppen $(\tilde{\delta}_t^n)_{t \geq 0}$, $n \in \boldsymbol{N}$, an und erhalten: Jeder Kern $\tilde{\delta}_t^n$ nimmt nur die Werte 0 und 1 an. Weil für jedes $B \in \mathfrak{B}$, $x \in \boldsymbol{R}_+^*$ und $t \geq 0$ gilt

$$\tilde{\delta}_t(x, B) = \lim_{n \to \infty} \tilde{\delta}_t^n(x, B),$$

nimmt auch $\tilde{\delta}_t$ nur die Werte 0 und 1 an. Dann kann aber die Abbildung

$$\begin{aligned} s &\mapsto \tilde{\delta}_t(s, .) \\ \boldsymbol{R}_+^* &\to M_+^1(\boldsymbol{R}_+^*) \end{aligned}$$

nicht stetig sein.

Literatur

[1] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. Walter de Gruyter, Berlin–New York (1974), 2. Auflage.

[2] Bauer, H.: Harmonic spaces and associated Markov processes. In: Potential theory, 23–67 (CIME, 1° Ciclo, Stresa 2–10, Luglio 1969). Rom: Edizioni Cremonese (1970).

[3] Bliedtner, J., Hansen, W.: Markov processes and harmonic spaces. Z. Wahrsch.theorie verw. Gebiete, Bd. 42, 309–325 (1978).

[4] Blumenthal, R. M., Getoor, R. K.: Markov processes and potential theory. Academic Press, New York (1968).

[5] Boboc, N., Constantinescu, C., Cornea, A.: Semigroups of transitions on harmonic spaces. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 12, 763–805 (1967).

[6] Constantinescu, C., Cornea, A.: Potential Theory on Harmonic Spaces. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1972).

[7] Cairoli, R.: Sur les produits de semi-groupes de transition et leurs réalisations. C. R. Acad. Sci. Paris, 261 (1965), 619–622.

[8] Cairoli, R.: Produits de semi-groupes de transition et produits de processus. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, vol. 15 (1966), 311–384.

[9] Dynkin, E. B.: Markov processes. Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg (1965).

[10] Hansen, W.: Konstruktion von Halbgruppen und Markoffschen Prozessen. Invent. Math. 3, 179–214 (1967).

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1979

Band/Volume: 1978

Autor(en)/Author(s): Schirmeier Ursula

Artikel/Article: Produkte harmonischer Räume 5-22