

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1978

MÜNCHEN 1979

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Über $\mathfrak{f}$ -quasiordinäre Bogen

Herrn J. Aczél zum 55. Geburtstag mit freundschaftlichen Wünschen

Von Otto Haupt

## Einleitung

0.1. In einem topologischen Bild einer abgeschlossenen Kreisscheibe, dem sogen. Grundbereich  $Q$ , sei gegeben ein System  $\mathfrak{f}$  von Bogen und Kurven  $K$  (Vgl. [1.], 1.1.), der sogen. Ordnungscharakteristiken  $K$ , kurz *OCh*. Um deutlich zu machen, daß Punkte  $z_1, \dots, z_s \in Q$  auf  $K \in \mathfrak{f}$  liegen, schreiben wir auch  $K(z_1, \dots, z_s)$  statt  $K$ . Zu  $\mathfrak{f}$  gehöre eine natürliche Zahl  $k := k(\mathfrak{f}) \geq 1$ , die sogen. Grundzahl von  $\mathfrak{f}$  mit folgender Eigenschaften: Sind die  $z_k \in K$ ,  $k = 1, \dots, k$ , verschieden und gibt es keine weiteren  $K' = K'(z_1, \dots, z_k)$  mit  $K \neq K' \in \mathfrak{f}$  ( $\mathfrak{f}$ -Unität von  $K(z_1, \dots, z_k)$ ), so ist  $K(z_1, \dots, z_k)$  stetige Funktion von  $(z_1, \dots, z_k)$  ( $\mathfrak{f}$ -Stetigkeit von  $K$ ).

0.2. Es sei  $Z$  die Menge aller  $k$ -tupel  $z := (z_1, \dots, z_k)$  mit lauter *verschiedenen*  $z_k \in Q$ . Bezüglich der  $z \in Z$  bzw. der  $K(z) := K(z_1, \dots, z_k) \in \mathfrak{f}$  hat man nun die Disjunktion: Es ist  $z$  *entweder*  $\mathfrak{f}$ -entartet, d. h. es gibt kein  $K(z) \in \mathfrak{f}$  *oder*  $\mathfrak{f}$ -ordinär, d. h. es gibt genau ein  $K(z) \in \mathfrak{f}$  *oder*  $\mathfrak{f}$ -halbordinär, d. h. es existieren mindestens zwei verschiedene  $K(z) \in \mathfrak{f}$ . Diesen Erklärungen entsprechend bezeichnen wir eine Menge  $M \subset Q$  als  $\mathfrak{f}$ -entartet bzw. als  $\mathfrak{f}$ -ordinär. bzw. als  $\mathfrak{f}$ -quasiordinär, wenn jedes  $z \in M$   $\mathfrak{f}$ -entartet bzw.  $\mathfrak{f}$ -ordinär bzw. entweder  $\mathfrak{f}$ -halbordinär oder  $\mathfrak{f}$ -ordinär ist; es ist  $M$  genau dann  $k$ -quasiordinär, wenn  $M$  keine  $\mathfrak{f}$ -entarteten  $z$  enthält.

0.3. Bei Beschränkung auf eine bestimmte Menge  $M$ , sogen. Basismenge, stellen sich jetzt, bei vorgegebenem *OCh*-System  $\mathfrak{f}$ , Fragen wie etwa diese: Ist  $M$   $\mathfrak{f}$ -entartet oder  $\mathfrak{f}$ -quasiordinär. ( $\mathbf{R} :=$  Körper d. reellen Zahlen;  $\bar{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ).

0.4. Die vorliegende Note verfolgt solche und verwandte Fragen bei *OCh*-Systemen  $\mathfrak{f}$ , die von Parabeln höchstens vom Grade  $m \geq 2$  mit  $J := [0; 1]$  als Definitionsbereich geliefert werden,

wobei diese Parabeln bezüglich  $J$  einer „Randbedingung“ genügen. Grundbereich ist dabei der Parallelstreifen  $Q := \{(\chi, \eta) : \chi \in J \wedge \eta \in \bar{\mathbf{R}}\}$  und die Basismengen sind Graphen  $G := G(f) := \{(\chi, \eta) : \chi \in J \wedge \eta = f(\chi)\}$  mit stetigem  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$ .

Unter anderem ergibt sich: Die  $\mathfrak{k}$ -quasiordinären  $G(f)$  sind gekennzeichnet durch eine Funktionalgleichung für  $f$ . Im speziellen Fall  $m = 2 (= k)$  werden alle Lösungen dieser Funktionalgleichung angegeben. Auch werden für beliebiges  $m \geq 3$  Aussagen gewonnen.

Auf Fragen wie die betr. die Funktionalgleichung für  $f$  bei  $m \geq 3$ , also insbesondere die nach der Existenz zugehöriger  $\mathfrak{k}$ -quasiordinärer  $G(f)$  hoffen wir an anderer Stelle zurückkommen zu können. Vgl. auch 3.5., Anmerkung.

Herrn H. Haller habe ich für verschiedene Bemerkungen sehr zu danken.

## 1. Bezeichnungen

1.1. Als *Bogen* werden topologische Bilder der Strecke bezeichnet. Daß  $a$  und  $b$  die Endpunkte des Bogens  $B$  sind, wird durch die Schreibweise  $B(a|b)$  angezeigt; außerdem wird  $\underline{B}(a|b) := B(a|b) \setminus \{a, b\}$  gesetzt; es ist also  $\underline{B}$  der größte offene Teilbogen in  $B$ .

1.2. Es ist  $J := [0; 1] \subset \mathbf{R}$  und  $Q := \{(\chi, \eta) : \chi \in J \wedge \eta \in \bar{\mathbf{R}}\}$ ; ferner sei  $Q_g := Q \setminus \underline{Q}$  der Rand von  $Q$ . Es ist  $Q$  der Grundbereich, in dem sich alle folgenden Betrachtungen abspielen (vgl. 0.1.). (Es ist also  $Q$  der Parallelstreifen zwischen den  $\eta$ -Parallelen durch  $(0; 0)$  und  $(1, 0)$ ).

1.3. Die Basismengen (vgl. 0.3.) sind Bogen  $G(f)$ , deren Endpunkte in  $Q_g$  liegen und die sich parallel zur  $\eta$ -Achse topologisch auf  $J$  projizieren. Die Ordnungscharakteristiken sind ebenfalls Bogen, nämlich Parabeln, d. h. Graphen  $G(\phi)$  von Polynomen  $\phi : J \rightarrow \mathbf{R}$  mit Endpunkten in  $Q_g$ , die einer Randbedingung (vgl. 2.1.) genügen und die sich ebenfalls parallel zur  $\eta$ -Achse topologisch auf  $J$  projizieren. Ist  $G(f)$  orientiert, so kann und soll jedes  $G(\phi)$  so orientiert werden, daß die Anfangspunkte von  $G(f)$  und den  $G(\phi)$  sich aufeinander projizieren.

1.4. Mit der Abkürzung  $POW(M) :=$  Kardinalzahl von  $M$ , erklären wir  $M$  als von endlichen Punktordnungswert

$POW(M; \mathfrak{f})$  bzw. von beschränktem  $POW(M; \mathfrak{f}) = r (< +\infty)$  bezüglich des  $OCh$ -Systems  $\mathfrak{f}$  unserer Parabeln, wenn für alle  $K \in \mathfrak{f}$  gilt:  $POW(M \cap K)$  ist endlich bzw. wenn  $\max \{POW(M \cap K) : K \in \mathfrak{f}\} = r$  existiert.

## 2. Das System $\mathfrak{f}$ der Ordnungscharakteristiken

2.1. Es sei  $m$  eine natürliche Zahl,  $m \geq 2$ , und  $p: J \rightarrow \mathbf{R}$  mit

$$p(x) := \sum_{\mu=0}^m g_{\mu} \chi^{\mu} \text{ mit } \chi_{\mu} \in J \text{ und konstanten } g_{\mu} \in \mathbf{R}.$$

Es sei  $P$  die Menge aller dieser  $p$  und  $G(p)$  der Graph von  $p$ . Als  $OCh$   $K \in \mathfrak{f}$  erklärt man diejenigen  $G(p)$ , für die außerdem die

$$\text{Randbedingung } p(1) = \tilde{\alpha} p(0)$$

mit einem für alle  $p$  gleichen (d. h. konstanten)  $\tilde{\alpha} \in \mathbf{R}$  erfüllt und wobei  $\tilde{\alpha}$  im übrigen beliebig wählbar ist. Das System der Ordnungscharakteristiken  $K$  ist also

$$\mathfrak{f} := \mathfrak{f}(\tilde{\alpha}) := \{K : K := G(p) \wedge p \in P \wedge p(1) = \tilde{\alpha} p(0)\}.$$

Es liegen die  $K$  bis auf ihre Endpunkte in  $\underline{Q}$  und es ist  $m$  die Grundzahl von  $\mathfrak{f}$ . (vgl. auch weiter unten).

2.2. Man setze jetzt  $x := (\chi_1, \dots, \chi_m)$ . Es ist  $x \in J^m$  und es sei

$$(S) \quad S := \{x : x := (\chi_1, \dots, \chi_m) \wedge \bigwedge_{\mu} \chi_{\mu} \in J \wedge \chi_{\mu} \neq \chi_{\varrho} \text{ für } \mu \neq \varrho\}.$$

Zur Bestimmung eines  $K \in \mathfrak{f}$  durch  $m$  Punkte  $z_{\mu} := (\chi_{\mu}, \eta_{\mu})$  mit  $\eta_{\mu} \in \mathbf{R}$ ,  $x \in S$ , hat man die Gleichungen für die  $m+1$  „Unbekannten“  $g_{\mu}$ :

$$\langle p \rangle \quad \begin{aligned} g_0 \chi_{\mu}^m + \dots + g_{m-1} \chi_{\mu}^1 + g_m &= \eta_{\mu}, \quad \mu = 1, \dots, m \\ g_0 + \dots + g_{m-1} + g_m (1 - \tilde{\alpha}) &= 0. \end{aligned}$$

Zwecks Untersuchung von  $\langle p \rangle$  bezeichnen wir mit  $M_r(x) := M_r(\chi_1, \dots, \chi_r)$  die  $r, r$ -Matrix mit den Zeilen  $(\chi_{\varrho}^{r-1} \chi_{\varrho}^{r-2} \dots \chi_{\varrho}^0)$ ,  $\varrho = 1, \dots, r$ .

Bekanntlich ist dann

$$V_r(x) := \det M_r(x) = (-1)^{\binom{2}{2}} \prod_{\tau < \varrho} (\chi_{\varrho} - \chi_{\tau}), \quad \tau, \varrho = 1, \dots, r.$$

Die  $m + 1, m + 1$ -Matrix  $m_{m+1}(x, \tilde{\alpha})$  der linken Seiten von  $\langle p \rangle$ , also

$$M_{m+1}(x, \tilde{\alpha}) := \begin{pmatrix} \chi_1^m & \dots & \chi_1 & \chi_1^0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \chi_m^m & \dots & \chi_m & \chi_m^0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 - \tilde{\alpha} \end{pmatrix}$$

besitzt dann die Determinante

$$\det M_{m+1}(x, \tilde{\alpha}) = V_{m+1}(\chi_1, \dots, \chi_m, 1) - \tilde{\alpha} V_m(x) \prod_{\mu=1}^m \chi_\mu = \\ = (-1)^{\binom{m+1}{2}} V_m(x) W_m(x, \tilde{\alpha}) \quad \text{mit}$$

$$W_m(x, \tilde{\alpha}) := (1 - \chi_1) \dots (1 - \chi_m) - (-1)^m \tilde{\alpha} \chi_1 \dots \chi_m.$$

Im Folgenden *setzen* wir abkürzend

$\alpha := (-1)^m \tilde{\alpha}$ , also  $\tilde{\alpha} = (-1)^m \alpha$ , wobei dann auch  $\alpha$  (für jedes  $m$ ) beliebig (in  $\mathbf{R}$ ) wählbar ist.

Entsprechend wird *gesetzt*:

$$W(x, \alpha) := W_m(x, \tilde{\alpha}) = (1 - \chi_1) \dots (1 - \chi_m) - \alpha \chi_1 \dots \chi_m$$

und

$$M(x, \alpha) := M_{m+1}(x, \tilde{\alpha}).$$

2.3. Bevor auf die Diskussion von  $\langle p \rangle$  eingegangen wird, seien einige, später benützte Bemerkungen zusammengestellt, die sich auf  $W(x, \alpha)$  mit  $x := (\chi_1, \dots, \chi_m) \in J^m$  beziehen.

2.3.1. (I) Es sei  $j: (x \rightarrow x)$  mit  $x \in J^m$  die Identität. Dann ist  $W(j, \alpha)$  *stetige* Funktion von  $j$  im  $J^m$ , also (vgl. 2.2., (S)) nicht nur in  $S$ , weil jetzt auch  $\chi_\mu = \chi_\varrho$  für  $\mu \neq \varrho$  zugelassen ist.

(II) Für  $x = (\chi_1, \dots, \chi_m)$  werde *gesetzt*

$$x^r := (\chi_1, \dots, \chi_{r-1}, \chi_{r+1}, \dots, \chi_m) \in J^{m-1} \text{ sowie} \\ P(x^r) := \prod_{\varrho \neq r} (1 - \chi_\varrho), \quad Q(x^r) := \prod_{\varrho \neq r} \chi_\varrho.$$

Für jedes  $r = 1, \dots, m$ , hat man dann

$$W(x, \alpha) = P(x^r) - \chi_r W(x^r, -\alpha) \text{ und} \\ W(x^r, -\alpha) = P(x^r) + \alpha Q(x^r).$$

(III) Aus (II) folgt: Es ist

$$W(j, x^r, \alpha) := W(\chi_1, \dots, \chi_{r-1}, j, \chi_{r+1}, \dots, \chi_m, \alpha)$$

bei konstantem  $(x^r, \alpha)$ , d. h. konstanten  $x^r$  und  $\alpha$ , konstant genau für  $W(x^r, -\alpha) = 0$ .

(III 1) Unter Voraussetzung der Konstanz von  $(x^r, \alpha)$  und von  $W(j, x^r, \alpha)$  ist  $W(x, \alpha) \geq 0$ ; und zwar  $W(x, \alpha) > 0$ , wenn  $\bar{m}_r := \max \{\chi_\rho : \chi_\rho \neq \chi_r\} < 1$  bzw.  $W(x, \alpha) = 0$ , wenn  $\bar{m}_r = 1$  (Denn aus den Vor. folgt  $W(x, \alpha) = P(x^r)$ ). Bei  $\bar{m}_r = 1$  folgt aus  $W(x^r, -\alpha) = 0$ , daß entweder  $\alpha = 0$  oder ein  $\chi_\rho = 0$  ist für  $\rho \neq r$ .

(III 2) Ein nicht konstantes  $W(j, x^r, \alpha)$  ist streng isoton bzw. streng antiton, je nachdem  $W(x^r, -\alpha) < 0$  bzw.  $> 0$  (bei konstantem  $(x^r, \alpha)$ ).

(III 3) Im Falle  $\alpha \geq 0$  ist  $W(j, x^r, \alpha)$ , soweit nicht konstant, streng antiton für jedes  $r = 1, \dots, m$  (bei konstantem  $(x^r, \alpha)$ ).

2.3.2. Es werde gesetzt:  $S^+ := \{x; x \in J^m \wedge W(x, \alpha) > 0\} =: S^+(\alpha) \subset J^m$ ,  $S^- := \{x; x \in J^m \wedge W(x, \alpha) < 0\} =: S^-(\alpha)$ ,  $S^0 := \{x; x \in J^m \wedge W(x, \alpha) = 0\} =: S^0(\alpha)$ . O. B. d. A. sei dabei  $0 \leq \chi_1 \leq \dots < \chi_\mu \leq \chi_{\mu+1} \leq \dots \leq \chi_m \leq 1$ , für alle  $x$ .

Behauptung. (a) Es ist  $J^m = S^+(\alpha) \cup S^0(\alpha) \cup S^-(\alpha)$  eine Zerlegung von  $J^m$ .

(b) Für alle  $\alpha$  ist  $S^+(\alpha) \neq \emptyset$  und  $S^0(\alpha) \neq \emptyset$ ; und es ist  $S^-(\alpha) = \emptyset$  genau für  $\alpha = 0$  oder  $\alpha < 0$ . Es enthält  $S^0(\alpha)$  die (von  $\alpha$  unabhängige) Menge  $S_0 := \{x; x \in J^m \wedge \chi_1 = 0 \wedge \chi_m = 1\}$ ; dabei ist  $S^0 = S_0$  genau für  $\alpha < 0$ . Für  $\alpha = 0$  ist  $S^0(0) = \{x; x \in J^m \wedge \chi_m = 1\}$ .

(c) Bezogen auf die übliche Topologie in  $J^m$  sind  $S^+(\alpha)$  und  $S^-(\alpha)$  offen in  $J^m$  für alle  $\alpha$ . Hingegen ist  $S^0(\alpha)$  für alle  $\alpha$  Randmenge, d. h. abgeschlossen und nirgends dicht in  $J^m$ .

(d) Es ist  $S^+(\alpha)$  für alle  $\alpha$  und, für alle  $\alpha$  mit  $S^-(\alpha) \neq \emptyset$ , auch  $S^-(\alpha)$  zusammenhängend in  $J^m$  (und sogar bogenverknüpft).

Beweis *Betr.* (a) und (b). Klar. – *Betr.* (c) Wegen der Stetigkeit von  $W(j, \alpha)$  sind  $S^\pm(\alpha)$  offen. Es sei  $x' := (\chi'_1, \dots, \chi'_m) \in S^0(\alpha)$ , wobei wieder  $0 \leq \chi'_1 \leq \dots \leq \chi'_\mu \leq \chi'_{\mu+1} \leq \dots \leq$

$\leq \chi'_m \leq 1$ . - Wir unterscheiden: (A 1) Im Fall  $\alpha = 0$  ist  $P(x') = 0 (= \Pi_\mu(1 - \chi'_\mu))$ , also  $\chi'_m = 1$ , während  $P(x'') > 0$  für  $x'' \in S^+$ ; man kann aber  $x''_m$  beliebig nahe bei 1, also  $x''$  beliebig nahe bei  $x'$  wählen. - (A -) Im Falle  $\alpha < 0$  ist  $P(x'')$  oder (und)  $Q(x'')$  ( $= \Pi_\mu \chi''_\mu$ ) positiv für  $x'' \in S^+$  und wieder  $x''$  beliebig nahe bei  $x'$  wählbar. - (A +) Im Falle  $\alpha > 0$  gibt es (wegen der strengen Antitonie von  $W(j, x^r, \alpha)$ ) zu  $x'$  beliebig benachbarte  $x'' \in S^+$  und  $x'' \in S^-$ .

*Betr.* (d) Es sei  $x^i := (\chi_1^i, \dots, \chi_m^i) \in S^+$ ,  $i = 1, 2$ , mit  $0 \leq x_\mu^i \leq x_{\mu+1}^i \leq 1$ ,  $1 \leq \mu \leq m-1$ . Man setzt  $x'' = (\chi_1, \dots, \chi_m)$  mit  $\chi_\mu := \min\{\chi_\mu^1, \chi_\mu^2\}$ , sodaß  $\chi_\mu \leq \chi_{\mu+1}$  für  $1 \leq \mu \leq m$ . Für  $\chi_\mu^i(t) := t\chi_\mu^i + (1-t)\chi_\mu^i$  mit  $1 \leq t \leq 1$  gilt  $\chi_\mu^i(0) = \chi_\mu^i$  und  $\chi_\mu^i(1) = \chi_\mu$ . Setzt man  $x_\mu^i(t) := (\chi_1, \dots, \chi_{\mu-1}, \chi_\mu^i(t), \dots, \chi_m^i)$ , so hat man  $x_\mu^i(1) = x_{\mu+1}^i(0)$ . - *Im Fall*  $\alpha \geq 0$  ist (gemäß 2.3.1., (III 3))  $W(x_\mu^i(j), \alpha)$  konstant oder streng anton (in  $j$  bei konstanten  $\chi_\mu^i$  und  $\varrho = 1, \dots, m$ ), mithin  $W(x_\mu^i, \alpha) > 0$ , wenn  $W(x_{\mu-1}^i, \alpha) > 0$ . Durch Induktion nach  $\mu$  (bei Weglassung von Konstanzintervallen) folgt  $x \in S^+$ , wenn  $x^1, x^2 \in S^+$ . Und da  $x$  mit  $x^1$  und mit  $x^2$  durch je einen in  $S^+$  verlaufenden Streckenzug verbunden ist, ergibt sich die Beh. für  $\alpha \geq 0$  und  $S^+$ . - Analog ergibt sich die Beh. für  $S^- \neq \emptyset$  bei  $\alpha \geq 0$ . - Im Fall  $\alpha < 0$  ist  $S^- = \emptyset$  (2.3.2., (b)) und  $x^i \in S^+$  genau für  $P(x^i)$  oder (und)  $Q(x^i) > 0$ ; dabei ist z. B.  $P(x^i)$  stetig und streng anton für jedes  $\chi_\mu^i$  (bei im übrigen konstanten  $\chi_\varrho^i$  mit  $\varrho \neq \mu$ ). Ist nun Erstens  $P(x^i) > 0$  für  $i = 1$  sowohl als für  $i = 2$ , so kann man wie im Falle  $\alpha > 0$  für  $S^+$  schließen. Ist aber Zweitens etwa  $P(x^1) > 0$ , indes  $P(x^2) = 0$ , so geht man in  $S^+$  stetig von  $x^1$  zu  $x^2$  über; weil  $Q(x^2) > 0$ , ist dies möglich.

2.4. Vereinbarung. Bisher war  $x \in J^m$  angenommen worden; demgegenüber werde von jetzt ab, soweit nicht anderes bemerkt,  $x \in S$  (vgl. 2.2., (S)) angenommen, also  $0 \leq \chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_\mu < \chi_{\mu+1} < \dots < \chi_m \leq 1$ . Demgemäß ist dann  $S^\pm$  bzw.  $S^0$  zu verstehen als  $S^\pm \cap S$  bzw.  $S^0 \cap S$ .

Auch die  $S^\pm \cap S$  sind offen und zusammenhängend.

2.4.1. Hinsichtlich  $\langle p \rangle$  bzw.  $M(x, \alpha)$  (vgl. 2.2.) gilt:

Für alle  $x \in S$  und  $\alpha \in \mathbf{R}$  ist  $m \leq \text{Rang } M(x, \alpha) \leq m + 1$ ; und zwar ist  $\text{Rang } M(x, \alpha) = m$  genau für  $W(x, \alpha) = 0$ .

Denn in  $M(x, \alpha)$  ist die  $m, m$ -Matrix  $M_m(x)$  enthalten mit  $\det M_m(x) = V_m(x) \neq 0$  für alle  $x \in S$  (unabhängig von  $\alpha$ ).

Die  $x \in S^0$  werden als irregulär bezeichnet und die  $x \in S \setminus S^0$  als regulär (für jedes  $\alpha$ ).

2.4.2. Neben den  $x \in S$  werden  $y := (\chi, \eta) \in J \times \mathbf{R}$  betrachtet und  $z := (y_1, \dots, y_m)$  mit  $y_\mu = (\chi_\mu, \eta_\mu)$ ; dabei wird  $x(z) := (\chi_1, \dots, \chi_m)$  gesetzt und  $Z := \{z : x(z) \in S\}$  (Es ist  $G(f) \subset J \times \mathbf{R}$ , vgl. 3.1.).

Bei Benutzung der in o.2. eingeführten Bezeichnungen hat man jetzt:

(I) Es ist  $z \in Z$  entweder  $\mathfrak{k}$ -entartet oder  $\mathfrak{k}$ -halbordinär genau dann, wenn  $x(z)$  irregulär ist. Ferner ist  $z \in Z$   $\mathfrak{k}$ -ordinär genau für reguläres  $x(z)$ .

(II) Die einzigen, für alle  $\alpha$ , insbesondere also für  $\alpha = 0$ , irregulären  $x \in S$  sind die  $x^0 = (0 = \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{m-1}, \chi_m = 1) \in S$ .

(III) Die einzigen für  $\alpha = 0$  irregulären  $x \in S$  sind die mit  $\chi_m = 1$ .

(IV) Ein  $z \in Z$  mit irregulärem  $x(z)$  ist  $\mathfrak{k}$ -halbordinär genau dann, wenn die  $(m+1, m+2)$ -Matrix

$$M(x, \alpha, \eta) := \begin{pmatrix} \chi_1^m & \dots & \chi_1 & 1 & \eta_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_m^m & \dots & \chi_m & 1 & \eta_m \\ 1 & \dots & 1 & 1 - \tilde{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

den Rang  $m$  besitzt. Für alle  $z$  mit irregulärem  $x(z)$  und mit  $\text{Rang } M(x, \alpha, \eta) = m+1$  und nur für solche  $z$  ist  $z$   $\mathfrak{k}$ -entartet.

Anmerkung. Weil  $S^0$  nirgends dicht in  $S$  ist, spielt  $m$  die Rolle der Grundzahl für  $\mathfrak{k}$ .

### 3. Die Grundbogen

3.1. Es sei  $f: J \rightarrow \mathbf{R}$  stetig in  $J$ . Als Grundbogen  $G$  diene  $G := G(f) := \text{Graph } f := \{(\chi, \eta) : \chi \in J \wedge \eta := f(\chi)\}$ . Es ist  $G$



$\mathbb{F}$ -normal, d. h. ist  $y_\mu := (\chi_\mu, f(\chi_\mu))$ , und entspricht die Reihenfolge  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$  der Orientierung von  $J$ , so die entsprechende Reihenfolge der  $y_\mu$  (einer Orientierung von  $G(f)$  und einer Orientierung von  $K \in \mathbb{F}$ , wenn die  $y_\mu \in G \cap K$ .

3.2. Zu jedem  $G$  existiert eine in  $(J \times \mathbf{R})^m$  dichte Menge von  $\mathbb{F}$ -ordinären  $z \in Z$ ; denn die Menge  $S \setminus S^0$  der  $\mathbb{F}$ -regulären  $x \in S$  ist dicht in  $S$  und für solche  $x$  ist  $\langle p \rangle$  bei beliebigen  $\eta_\mu = f(\chi_\mu)$ , wenn  $x = (\chi_1, \dots, \chi_m)$ , eindeutig lösbar (Zu jedem irregulären  $x$  gibt es  $G$ , für die  $x$  ein  $\mathbb{F}$ -entartetes  $z \in Z$  liefert.)

3.3. Es erhebt sich jetzt die Frage nach allen Grundbogen  $G = G(f)$ , die  $\mathbb{F}$ -quasiordinär sind (im Sinne von o.2.: wobei also  $M = G$ ). Diese  $G$  sind definitionsgemäß gekennzeichnet dadurch, daß die Gleichungen  $\langle p \rangle$  mit  $\eta_\mu = f(\chi_\mu)$ ,  $\mu = 1, \dots, m$ , lösbar sind für alle  $x \in S$ . Zu den  $\mathbb{F}$ -quasiordinären  $G$  gehören trivialerweise alle  $OCh$  für alle  $\alpha$  bei beliebigem  $m$ .

**Satz.** Bei gegebenem  $\alpha \in \mathbf{R}$  ist  $G(f)$   $\mathbb{F}$ -quasiordinär genau dann, wenn für  $x \in S^0$ , also für alle irregulären  $x \in S$  d. h. mit

$$\langle W_0 \rangle \quad W(x, \alpha) = 0$$

die Funktionalgleichung

$$\langle f \rangle 0 = \sum_{\mu=1}^m d_\mu f(\chi_\mu) = \det \begin{pmatrix} \chi_1^{m-1} & \dots & \chi_1 & 1 & f(\chi_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_m^{m-1} & & \chi_m & 1 & f(\chi_m) \\ 1 & \dots & \dots & 1 & (1 - \tilde{\alpha}) & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. In  $\langle f \rangle$  bedeutet also  $d_\mu$  diejenige, mit geeignetem Vorzeichen versehene Determinante, welche aus der in  $\langle f \rangle$  rechterhand stehenden Determinante  $d$  durch Streichen der  $\mu$ -ten Zeile und der letzten Spalte resultiert (Entwicklung von  $d$  nach den Elementen der letzten Spalte). Mit der Abkürzung  $x^\mu$  (wie in 2.3.1.) hat man also

$$\langle d_\mu \rangle \quad d_\mu = (-1)^\mu V_{m-1}(x^\mu) \cdot W(x^\mu, -\alpha) \text{ mit}$$

$$\langle W(x^\mu, -\alpha) \rangle \quad W(x^\mu, -\alpha) = \prod_{v \neq \mu} (1 - \chi_v) + \alpha \prod_{v \neq \mu} \chi_v.$$

**Bemerkung.** Im Falle  $\alpha \leq 0$  ist jedes  $G(f)$   $\mathbb{F}$ -ordinär bezüglich des Teilsystems von  $\mathbb{F}$ , das keine  $OCh$  durch Endpunkte von  $G(f)$  enthält.

3.3.1. Für jedes  $x \in S^0$  läßt sich  $\chi_m$  in Abhängigkeit von  $\chi_1, \dots, \chi_{m-1}$  und  $\alpha$  darstellen als (vgl. 2.3.1.)

$$\langle m \rangle \quad \chi_m := \varphi_m(\chi_1, \dots, \chi_{m-1}, \alpha) = \\ = (W(x^m, -\alpha))^{-1} \cdot (1 - \chi_1) \dots (1 - \chi_{m-1}).$$

Dabei ist  $W(x^m, -\alpha) \neq 0$  für jedes  $\alpha$ . — Aus  $W(x^m, -\alpha) = 0$  würde nämlich (wegen  $\chi_\mu < 1, \mu = 1, \dots, m-1$ ) folgen, daß  $\alpha < 0$  und dann (wegen  $W(x, \alpha) = 0$ )  $\chi_1 = 0$ ; daher wäre  $W(x^m, -\alpha) = (1 - \chi_1) \dots (1 - \chi_{m-1}) > 0$  im Widerspruch zu  $W(x^m, -\alpha) = 0$ .

Daraus ergibt sich die folgende

*Kennzeichnung der  $\mathbb{k}$ -quasiordinären  $G(f)$  durch die Funktionalgleichung*

$$\langle f \rangle \quad 0 = d_m f(\varphi_m) + \sum_{\mu=1}^{m-1} (d_\mu \circ \varphi_m) f(\chi_\mu),$$

wobei  $0 \leq \chi_1 < \dots < \chi_{m-1} < 1$ ,  $(\chi_1, \dots, \chi_m)$  irregulär und

$$d_m = V_{m-1}(x^m) W(x^m, -\alpha) \quad \text{sowie}$$

$$d_\mu \circ \varphi_m = (-1)^\mu V_{m-1}(\chi_1, \dots, \chi_{\mu-1}, \chi_{\mu+1}, \dots, \chi_{m-1}, \varphi_m) \cdot \\ \cdot W(\chi_1, \dots, \chi_{\mu-1}, \chi_{\mu+1}, \dots, \varphi_m, -\alpha).$$

3.4. Bestimmung der  $\mathbb{k}$ -quasiordinären Bogen  $G(f)$  im Falle  $m = 2$ . Hier ist  $\alpha = \bar{\alpha}$ .

Zwecks Bestimmung der Lösungen von  $\langle W_0 \rangle$  und  $\langle f \rangle$  (vgl. 3.3.) setzen wir

$$\langle t \rangle \quad t(j) := (1 - \alpha)j - 1,$$

sodaß  $\langle f \rangle$  sich schreibt in der Gestalt

$$\langle f' \rangle \quad t(\chi_2)f(\chi_1) = t(\chi_1)f(\chi_2) \quad \text{für alle irregulären } (\chi_1, \dots, \chi_m).$$

3.4.1. Der Fall  $\alpha = 0$ .

Für  $m = 2$  hat man den

**Satz.** (1) *Es ist  $t(\chi) = 0$  für ein  $\chi \in [0; 1]$ , falls  $\alpha = 0$ , genau dann, wenn  $\chi = 1$ .*

(2) *Für  $\alpha = 0$  wird die Gesamtheit der  $\mathbb{k}$ -quasiordinären  $G(f)$  geliefert durch die Gesamtheit der stetigen  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $f(1) = 0$  (zu diesen  $G(f)$  gehören insbesondere die OCh.).*

Beweis. *Betr.* (1). Folgt aus  $\chi \in [0; 1]$ . – *Betr.* (2) Für  $\alpha = 0$  ist  $S^0 := \{(\chi_1, 1) : 0 \leq \chi_1 < 1\}$ . Ferner ist  $t(\chi) = \chi - 1$ , also  $t(\chi_1) \neq 0$  und  $t(1) = 0$ . Daher folgt aus  $t(\chi_1)f(1) = t(1)f(\chi_1)$  (d. h. aus  $\langle f \rangle$ ), daß  $f(1) = 0$  genau für  $\mathbb{k}$ -quasiordinäres  $G(f)$  (gemäß 3.3.1.)).

3.4.2. Der Fall  $\alpha \neq 0$ .

*Satz.* Für  $m = 2$  und  $\alpha \neq 0$  gilt:

(1) Im Falle  $\alpha < 0$  liefern alle  $f$  mit  $f(1) = \alpha f(0)$  und nur sie ein  $\mathbb{k}$ -quasiordinäres  $G(f)$ .

(2) Im Falle  $\alpha > 0$  liefert  $f$  genau dann ein  $\mathbb{k}$ -quasiordinäres  $G(f)$ , wenn  $f$  darstellbar ist in der Gestalt  $f = t \cdot q$ . Dabei besitzt  $t$  die in 3.4.,  $\langle t \rangle$ , angegebene Bedeutung und  $q$  genügt der Gleichung  $q = q \circ h := q(h)$ , wobei

$$\langle h \rangle \quad h := (j - 1) : t(j).$$

*Zusatz.* (1) Im Fall  $\alpha < 0$  ist  $\mathbb{k}$ -ordinär jeder offene Bogen  $G = G(f)$  mit in  $J$  stetigem, im übrigen beliebigem  $f$ .

(2) Im Fall  $\alpha > 0$  gilt: Für jedes  $\mathbb{k}$ -quasiordinäre  $G(f)$  ist  $f$  darstellbar als

$$\langle w \rangle \quad f = t^{-1} \cdot (w + (w \circ h)), \quad \text{also } q = w + (w \circ h),$$

wobei  $w : J \rightarrow \mathbf{R}$  stetig, im übrigen aber beliebig ist. Umgekehrt wird durch jedes  $f$  der Gestalt  $\langle w \rangle$  ein  $\mathbb{k}$ -quasiordinäres  $G(f)$  geliefert. (Für  $\alpha > 0$  ist  $h > 0$  und streng antiton.).

Beweis. *Betr.* (1). Für  $\alpha < 0$  ergibt sich aus  $W(x, \alpha) = 0$ , daß  $\chi_1 = 0$  und  $\chi_2 = 1$  das einzige irreguläre  $(\chi_1, \chi_2)$  ist. Für dieses  $(0, 1)$  ergibt sich aber aus  $\langle f \rangle$ , daß  $f(0) = g_2$  und  $f(1) = g_0 + g_1 + g_2 = \alpha f(0)$ , wobei  $g_0$  und  $g_1$  beliebig. Und da  $(0, 1)$  bei  $\alpha < 0$  das einzige irreguläre Paar ist, liefert jedes (stetige)  $f$  mit  $f(1) = \alpha f(0)$  ein  $\mathbb{k}$ -quasiordinäres  $G(f)$ .

*Betr.* (2). (A) Für  $\alpha > 0$  läßt sich  $\langle f' \rangle$  in Rücksicht auf 3.3.1,  $\langle m \rangle$ , so schreiben:

$$\langle f \rangle \quad (t \circ h) \cdot f = t \cdot (f \circ h) \text{ in } J.$$

Außerdem gilt

$$\langle h^2 \rangle \quad h \circ h = j.$$

(Es ist  $h > 0$  und streng antiton, weil  $h'(\chi) \cdot (t(\chi))^2 = -\alpha < 0$  in  $J$ ).

(B) Ist  $f$  Lösung von  $\langle f \rangle$  und  $q := t^{-1} \cdot f$ , so ergibt  $\langle f \rangle$ , daß  $qoh = (toh)^{-1} \cdot (foh) = t^{-1} \cdot f = q$ . – Ist andererseits  $\bar{q} := \bar{q}oh$  und  $\bar{q} := t^{-1} \cdot \bar{f}$ , so gilt  $(toh) \cdot \bar{f} = (toh) \cdot t \cdot \bar{q} = (toh) \cdot t \cdot (\bar{q}oh) = (toh) \cdot t \cdot (toh)^{-1} \cdot (foh) = t \cdot (foh) = (toh) \cdot f$ ; es genügt also jedes  $\bar{f}$  mit  $\bar{f} := t \cdot \bar{q}$  und  $\bar{q} = \bar{q}oh$  der Gleichung  $\langle f \rangle$ . Hat man ein stetiges, im übrigen beliebiges  $w|J$  und setzt  $\bar{q} := w + (woh)$ , so gilt  $\bar{q}oh = (woh) + w$  (wegen  $\langle h^2 \rangle$ ), also  $\bar{q} = \bar{q}oh$ , sodaß  $f := t^{-1} \cdot (w + (woh))$  eine Lösung von  $\langle f \rangle$  liefert.

3.4.3. Erwähnt sei noch Folgendes:

Für alle  $\tilde{\alpha}$  und  $m$  gilt: (I) Jeder  $\mathbb{F}$ -quasiordinäre Grundbogen  $G(f)$  genügt der gleichen „Randbedingung“ wie die  $OCh$ , d. h. es ist  $f(1) = \tilde{\alpha}f(0)$ . – (II) Unter den Parabeln von höchstens dem Grade  $m$  sind die  $OCh$  die einzigen  $\mathbb{F}$ -quasiordinären Bogen (sozusagen sind dies die „trivialen“  $\mathbb{F}$ -quasiordinären Bogen).

Beweis. Betr. (I) Da  $(\chi_1 = 0, \chi_2 = 1)$  irregulär ist für alle  $\alpha$ , folgt aus  $\langle f \rangle$  für alle  $\mathbb{F}$ -quasiordinären  $G(f)$ , daß  $t(1)f(0) = t(0)f(1)$ . Wegen  $t(0) = -1$  und  $t(1) = -\tilde{\alpha}$  folgt  $f(1) = \tilde{\alpha}f(0)$ . – Betr. (II) Gemäß (I) genügen die  $OCh$  der „Randbedingung“ (vgl. 2.1.).

3.5. Grundbogen mit vorgegebenem Punktordnungswert bezüglich  $\mathbb{F}$ .

Satz. Zu jedem  $\tilde{\alpha}$  und  $m \geq 2$  sowie zu jedem  $n \geq m$  gibt es Grundbogen  $G(f)$  mit  $POW((G(f); \mathbb{F})) = n$ .

Beweis. Fall  $n \geq m + 1$ . Man wähle  $f := g_n j^n + g_{n-1} j^{n-1} + \dots + g_{m+1} j^{m+1}$ . Ist dann  $K = G(p)$  mit  $p(j) := g_0 j^m + \dots + g_m$  und  $g_0 + \dots + g_{m-1} + (1 - \tilde{\alpha})g_m = 0$ , ferner  $K \in \mathbb{F}$  sonst beliebig, so besitzt bei passender Wahl der  $g_n, \dots, g_{m+1}$  das Polynom  $f(j) - p(j)$  genau  $n$  reelle Nullstellen in  $(0; 1)$ , so daß also  $G(f)$  und  $K$  genau  $n$  Punkte gemeinsam haben; andererseits kann kein  $f(j) - p(j)$  mehr als  $n$  Nullstellen besitzen (sofern es nicht Nullpolynom ist). – Fall  $n = m$ . Für  $p(j) := j(j - \chi_2) \dots (j - \chi_{m-1})(j - 1)$  gilt  $K = G(p) \in \mathbb{F}$  bei

beliebigem  $\alpha \in \mathbf{R}$ ; für  $G := G(\vec{f})$  mit  $\vec{f} := \text{konst.} = 0$  ist ferner  $POW(G \cap K) = m$ , wobei  $G \cap K$  abgesehen von den Endpunkten nur Schnittpunkte besitzt, deren jeder einfach zu zählen ist. Und wegen  $p(\chi) \neq 0$  für zu 0 bzw. zu 1 hinreichend benachbarte  $\chi \in (0; 1)$  leistet  $f(j) = \beta j + \gamma$  für geeignete, absolut hinreichend kleine  $\beta, \gamma$  mit  $\beta \neq (\tilde{\alpha} - 1) \gamma$  das Gewünschte.

Anmerkung. Auf die Frage, ob es  $\mathfrak{k}$ -quasiordinäre Bogen  $G$  mit  $POW(G; \mathfrak{k}) \geq m + 1$  gibt, die keine *OCh* sind, soll später zurückgekommen werden.

### 3.6. Singuläre Punkte auf Grundbogen.

Eine *OCh*  $K$  ist durch  $m$  ihrer Punkte nicht eindeutig bestimmt, wenn für diese  $m$  Punkte  $z_\mu := (\chi_\mu, \eta_\mu) \in K$ ,  $\mu = 1, \dots, m$ , das  $m$ -tupel  $(\chi_1, \dots, \chi_m)$  irregulär ist. Demgegenüber gilt der

1. Satz. *Es sei  $\underline{K} \in \mathfrak{k}$  bei beliebigem  $\tilde{\alpha}$  und  $m$ . Durch  $m + 1$  Punkte aus  $\underline{K}$  ist  $\underline{K}$  stets eindeutig bestimmt.*

Dieser Satz ergibt sich aus dem

2. Satz. *Für beliebige  $\tilde{\alpha}$ ,  $m$  gilt: Es sei  $Y := (z_1, \dots, z_{m-1})$  ein  $(m - 1)$ -tupel von verschiedenen, in  $\underline{K}$  enthaltenen Punkten ( $\underline{K} \in \mathfrak{k}$ ). Für irgend zwei (verschiedene) Punkte  $z^i \in \underline{K} \setminus Y$ ,  $i = 1, 2$ , ist mindestens eines der in  $\underline{K}$  enthaltenen  $m$ -tupel  $(Y, z^i)$   $\mathfrak{k}$ -ordinär.*

Zusatz. Für alle auf  $\underline{K}$  zwischen  $z^1$  und  $z^2$  gelegenen  $z$  ist das  $m$ -tupel  $(Y, z)$  ebenfalls  $\mathfrak{k}$ -ordinär.

Beweis. Es sei  $z_\nu := (\chi_\nu, \eta_\nu)$ ,  $\nu = 1, \dots, m - 1$ , und  $z^i := (\chi^i, \eta^i)$ ,  $i = 1, 2$ , ferner sei gesetzt  $x^i := (\chi_1, \dots, \chi_{m-1}, \chi^i)$ , wobei o. B. d. A.  $\chi_\nu < \chi_{\nu+1}$  angenommen werde, aber  $\chi^i$  auch zwischen den  $\chi_\nu$  liegen darf. Nun sei etwa  $x^1$  irregulär, also  $W(x^1, \alpha) = 0 = (1 - \chi_1) \dots (1 - \chi_{m-1}) - \chi^1 A$ , wobei  $A := (1 - \chi_1) \dots (1 - \chi_{m-1}) + \alpha \chi_1 \dots \chi_{m-1}$ . Wegen  $z_\nu \in \underline{K}$  ist dabei  $(1 - \chi_1) \dots (1 - \chi_{m-1}) > 0$  und wegen  $z^1 \in \underline{K}$  auch  $\chi^1 \neq 0$ . Aus  $W(x^1, \alpha) = 0$  folgt also  $A \neq 0$ . Gemäß 2.3.1., (III), und da  $A$  von  $\chi^1$  nicht abhängt, ändert sich  $W((\chi_1, \dots, \chi_{m-1}, j), \alpha)$  stetig und streng monoton bei stetiger, streng monotoner Überführung von  $\chi^1$  in  $\chi^2$ . Es ist also  $W(x^2, \alpha) \neq 0$ , d. h.  $(Y, z^2)$  ist regulär.

3.6.1. Jeder Grundbogen  $G = G(f)$  ist  $\mathbb{k}$ -normal (vgl. 3.1.). Unter der Voraussetzung, daß  $K$  durch je  $m + 1$  seiner Punkte eindeutig bestimmt ist, gilt daher für jedes  $G$  mit höchstens endlichem  $POW(G; \mathbb{k}) \geq m + 1$  der Monotonie- und folglich auch der Kontraktionssatz, gemäß [1], 2.3. und 2.4. Zuzufolge [1], 4.1.2., hat man daher:

Jeder Grundbogen  $G$  von höchstens endlichem  $POW(G; \mathbb{k}) \geq m + 1$  besitzt mindestens einen  $\mathbb{k}$ -singulären Punkt  $z$ , d. h. ein  $z$ , dessen beliebig kleine Umgebungen auf  $G$  einen  $POW \geq m + 1$  besitzen.

#### Literatur

- [1] Haupt-Künneth, Geometrische Ordnungen. Heidelberg-New York 1967.
- [2] Haupt-Künneth, Über sogenannte entartete Mengen usw. Manuscripta math. **3** (1970) 391–412.
- [3] H. Künneth, Normalität bei  $\mathbb{k}$ -ordinären Bogen. Sitz.-Ber. Bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl. 1971, 77–80.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1979

Band/Volume: [1978](#)

Autor(en)/Author(s): Haupt Otto

Artikel/Article: [Über k-quasiordinäre Bogen 71-83](#)