BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1979

MÜNCHEN 1980

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Eine syntaktische Abgrenzung der (Δ_1^1-CA)-Analysis

Von **Gerhard Jäger** und **Kurt Schütte** in München

Als (Δ_1^1-CA)-*Analysis* bezeichnet man eine Theorie im Rahmen der Arithmetik 2. Ordnung, welche die *rekursive Zahlentheorie* mit dem Axiomenschema der *vollständigen Induktion* und außer den logischen Regeln der Prädikatenlogik 2. Ordnung nur das Axiomenschema (Δ_1^1-CA) der Δ_1^1-*Komprehension* enthält. Die *Grenzzahl* $|T|$ einer mathematischen Theorie ist die kleinste Ordinalzahl α mit der Eigenschaft, daß es keine Wohlordnung vom Ordnungstyp α gibt, die sich innerhalb der Theorie T als wohlgeordnet beweisen läßt.

Als die Grenzzahl $|\Delta_1^1\text{-}CA|$ der (Δ_1^1-CA)-Analysis erwies sich die kleinste ε_0-*kritische* Ordinalzahl, die wir (gemäß [6], § 14) mit $\varphi\varepsilon_0 0$ bezeichnen. Friedman [2] bewies zuerst $|\Delta_1^1\text{-}CA| \leq \varphi\varepsilon_0 0$, und aus Feferman [1] geht hervor, daß auch $|\Delta_1^1\text{-}CA| \geq \varphi\varepsilon_0 0$ ist. Der Beweis von Friedman benutzt modelltheoretische Methoden. Später wurde für $|\Delta_1^1\text{-}CA| \leq \varphi\varepsilon_0 0$ von Tait [3] auch ein syntaktischer Beweis mittels Schnitt-Elimination durchgeführt und von Feferman [4] ein Beweis mittels einer Funktionalinterpretation angedeutet. Alle diese Beweise benutzen das Σ_1^1-Auswahlaxiom, mit dem sich das Axiomenschema (Δ_1^1-CA) beweisen läßt. Dabei hat sich gezeigt, daß die Theorie mit dem Σ_1^1-Auswahlaxiom dieselbe Grenzzahl wie die (Δ_1^1-CA)-Analysis hat.

In der Arbeit [7], deren Ergebnisse teilweise in [8] veröffentlicht sind, wurde $|\Delta_1^1\text{-}CA| \leq \varphi\varepsilon_0 0$ erstmalig ohne Benutzung eines Auswahlprinzips bewiesen, und zwar auf der Grundlage eines formalen Teilsystems *KPN* der Mengenlehre unter Zurückführung von (Δ_1^1-CA) auf eine Δ_0-*Komprehension* und eine Δ_0-*Kollektion* entsprechend einem allgemeineren Verfahren, das in Barwise [5] dargestellt ist. In der vorliegenden Arbeit wird nun in entsprechender Weise ein syntaktischer Beweis für $|\Delta_1^1\text{-}CA| \leq \varphi\varepsilon_0 0$ im Rahmen der Arithmetik 2. Ordnung durchgeführt. Die Beschränkung dieses Beweises auf die Sprache der

Prädikatenlogik 2. Ordnung gelingt durch Einführung einer Relation $<$ zwischen Prädikaten, wobei die Bedeutung von $P < Q$ so aufzufassen ist, daß das Prädikat P früher (auf schwächerem Wege) als das Prädikat Q gebildet ist.

In § 1 wird zunächst ein formales System $D_1\,CA$ der $(\Delta_1^1\text{-}CA)$-Analysis so formuliert, wie es für die syntaktischen Untersuchungen technisch vorteilhaft ist. In § 2 wird dieses formale System in ein halbformales System D_1^* eingebettet, in dem die vollständige Induktion mittels der ω-Regel herleitbar ist und das Axiomenschema $(\Delta_1^1\text{-}CA)$ auf eine Δ_0-*Komprehension* und eine Σ_1^1-*Reflexion* zurückgeführt wird. Ähnlich wie in Tait [3] wird in D_1^* eine schwache Schnitt-Elimination durchgeführt und dann in § 3 für die Σ_1^1-Formeln eine Interpretation in einem geschichteten halbformalen System RD_1^* gegeben, womit in § 4 das gewünschte Ergebnis geliefert wird.

Das hier entwickelte Verfahren hat auch den Vorteil, daß es sich bei Hinzunahme des Deduktionsverfahrens von W. Buchholz zu einer syntaktischen Abgrenzung der $(\Delta_2^1\text{-}CA)$- Analysis verallgemeinern läßt, was mit den vorher benutzten syntaktischen Methoden nicht so leicht möglich zu sein scheint.

§ 1. Das formale System D_1CA

1.1. Die formale Sprache des Systems D_1CA

Als *Grundzeichen* verwenden wir:

1. Die Symbole 0, $'$, $\perp$, $\rightarrow$, $\forall$ und $\exists$.

2. Zeichen für n-stellige berechenbare arithmetische Funktionen und n-stellige entscheidbare arithmetische Prädikate ($n \geq 1$).

3. Je abzählbar unendlich viele freie und gebundene Zahlenvariablen.

4. Je abzählbar unendlich viele freie und gebundene Prädikatenvariablen.

5. Runde Klammern und Komma.

Nennformen werden in üblicher Weise verwendet (vgl. [6], S. 14) und mit großen Skriptbuchstaben bezeichnet.

Induktive Definition der *Terme.*

1. Das Symbol 0 ist ein Term.
2. Jede freie Zahlenvariable ist ein Term.
3. Ist t ein Term, so ist auch t' ein Term.
4. Bezeichnet f eine n-stellige berechenbare arithmetische Funktion ($n \geq 1$) und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

Terme, die nur gemäß 1. und 3. gebildet sind, heißen *Ziffern.* Sie repräsentieren die natürlichen Zahlen. Ein Term heißt *numerisch,* wenn er keine freie Zahlenvariable enthält. Jeder numerische Term hat einen berechenbaren *Wert,* der eine Ziffer ist (gemäß [6], S. 169).

Primformeln sind:

1. Das Symbol $\perp$ (*falsum*).
2. $E(t_1, \ldots, t_n)$, wenn E ein n-stelliges entscheidbares arithmetisches Prädikat ($n \geq 1$) bezeichnet und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind.
3. $U(t)$, wenn U eine freie Prädikatenvariable und t ein Term ist.

Eine Primformel heiß *konstant,* wenn sie keine freie Zahlenvariable und keine freie Prädikatenvariable enthält. Jede konstante Primformel ist in entscheidbarer Weise entweder *wahr* oder *falsch* (gemäß [6], S. 169).

Induktive Definition der *Formeln* des Systems D_1CA und des *Grades* $gr(F)$ einer Formel F.

1. Jede Primformel ist eine Formel vom Grad 0.
2. Sind A und B Formeln, so ist $(A \rightarrow B)$ eine Formel vom Grad $\max\{gr(A), gr(B)\} + 1$.
3. Ist $\mathcal{F}[0]$ eine Formel und x eine gebundene Zahlenvariable, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt, so ist $\forall x\, \mathcal{F}[x]$ eine Formel vom Grad $gr(\mathcal{F}[0]) + 1$.
4. Ist U eine freie Prädikatenvariable, $\mathcal{F}[U]$ eine Formel und X eine gebundene Prädikatenvariable, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt, so ist $\exists X\, \mathcal{F}[X]$ eine Formel vom Grad $gr(\mathcal{F}[U]) + 1$.

Eine Formel heißt *arithmetisch,* wenn sie keine gebundene Prädikatenvariable enthält.

Positivteile und *Negativteile* der Formeln, *P-Formen*, *N-Formen*, *NP-Formen* und $F \overset{s}{\vdash} G$ (*aus F folgt strukturell G*) seien entsprechend wie in [6], S. 20 definiert.

Zwei Formeln heißen *gleichwertig*, wenn sie sich nur durch numerische Terme gleicher Werte voneinander unterscheiden.

Als *Mitteilungszeichen* (auch mit Indizes) verwenden wir

a, b, c für freie Zahlenvariablen,

k, m, n für Ziffern und natürliche Zahlen,

r, s, t für Terme,

x, y, z für gebundene Zahlenvariablen,

U, V, W für freie Prädikatenvariablen,

X, Y, Z für gebundene Prädikatenvariablen,

A, B, C, F, G für Formeln,

$\mathcal{P}$ für P-Formen, $\mathcal{N}$ für N-Formen und $\mathcal{Q}$ für NP-Formen.

Induktive Definition der Σ_1^1-*Formeln* und Π_1^1-*Formeln* des Systems $D_1\,CA$.

1. Jede Primformel ist eine Σ_1^1-Formel und eine Π_1^1-Formel.

2. Eine Formel $(A \to B)$ ist genau dann eine Σ_1^1-Formel (Π_1^1-Formel), wenn A eine Π_1^1-Formel (Σ_1^1-Formel) und B eine Σ_1^1-Formel (Π_1^1-Formel) ist.

3. Eine Formel $\forall x\, \mathcal{F}[x]$ ist genau dann eine Σ_1^1-Formel (Π_1^1-Formel), wenn $\mathcal{F}[0]$ eine Σ_1^1-Formel (Π_1^1-Formel) ist.

4. Eine Formel $\exists X\, \mathcal{F}[X]$ ist genau dann eine Σ_1^1-Formel, wenn $\mathcal{F}[U]$ eine Σ_1^1-Formel ist. Sie ist keine Π_1^1-Formel.

Folgerung. Eine Formel ist genau dann sowohl eine Σ_1^1-Formel als auch eine Π_1^1-Formel, wenn sie eine arithmetische Formel ist.

Definitionen.

$(A \vee B)$ sei die Formel $((A \to \bot) \to B)$.

$(A \leftrightarrow B)$ sei die Formel $(((A \to B) \to ((B \to A) \to \bot)) \to \bot.)$

Zur Abkürzung lassen wir im allgemeinen die äußeren runden Klammern um Formeln der Gestalt $(A \to B)$ oder $(A \vee B)$ fort.

1.2. Das Herleitungsverfahren des Systems D_1CA

Axiome des Systems D_1CA:

(Ax 1) $\mathcal{P}$ $[A]$, wenn A eine wahre konstante Primformel ist.
(Ax 2) $\mathcal{N}$ $[A]$, wenn A eine falsche konstante Primformel ist.
(Ax 3) $\mathcal{Q}$ $[A, B]$, wenn A und B gleichwerige Primformeln sind.
(Ax 4) $\mathcal{F}$ $[a_1, \ldots, a_n]$, wenn $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene freie Zahlenvariablen sind, die in $\mathcal{F}$ nicht auftreten, und $\mathcal{F}$ $[m_1, \ldots, m_n]$ für je n Ziffern $m_1, \ldots, m_n$ eines der Axiome (Ax 1) — (Ax 3) ist.

$$\text{(V. I.)}\ \forall x\,(\mathcal{F}[x] \to \mathcal{F}[x']) \to (\mathcal{F}[0] \to \forall x\, \mathcal{F}[x])$$

$$(\Delta^1_1\text{-}CA)\ \forall x\,(\mathcal{A}[x] \leftrightarrow \mathcal{B}[x]) \to \exists\, Y\, \forall x (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{A}[x]),$$

wenn $\mathcal{A}$ [0] eine Σ^1_1-Formel und $\mathcal{B}$ [0] eine Π^1_1-Formel ist.

Hauptschlüsse des Systems D_1CA:

$$\text{(S 1)}\ \mathcal{N}\,[(A \to \perp)], \mathcal{N}\,[B] \vdash \mathcal{N}\,[(A \to B)],$$

wenn B nicht die Formel $\perp$ ist.

$$\text{(S 2.0)}\ \mathcal{P}\,[\mathcal{F}[a]] \vdash \mathcal{P}\,[\forall x\, \mathcal{F}[x]],$$

wenn a nicht in der Konklusion auftritt.

$$\text{(S 2.1)}\ \mathcal{N}\,[\mathcal{F}[U]] \vdash \mathcal{N}\,[\exists X\, \mathcal{F}[X]],$$

wenn U nicht in der Konklusion auftritt.

$$\text{(S 3.0)}\ \mathcal{F}[t] \to \mathcal{N}\,[\forall x\, \mathcal{F}[x]] \vdash \mathcal{N}\,[\forall x\, \mathcal{F}[x]]$$

$$\text{(S 3.1)}\ \mathcal{F}[U] \vee \mathcal{P}\,[\exists X\, \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{P}\,[\exists X\, \mathcal{F}[X]].$$

Der *Hauptteil* eines Hauptschlusses ist der bezeichnete minimale Positiv- oder Negativteil seiner Konklusion.

Schnitte des Systems D_1CA:

$$A \vee B,\ A \to B \vdash B$$

Die mit A bezeichnete Formel in den Prämissen eines Schnittes heißt die *Schnittformel* des betreffenden Schnittes.

Eine Formel heißt *herleitbar* in D_1CA, wenn sie sich aus den Axiomen mit Hilfe von Hauptschlüssen, Schnitten und Strukturschlüssen $F \overset{s}{\vdash} G$ erschließen läßt.

Anmerkungen.

1. Die Menge der in D_1CA herleitbaren Formeln ist nicht rekursiv aufzählbar, weil sich nicht allgemein entscheiden läßt, ob eine Formel ein $(Ax\ 4)$ ist. Man könnte das formale System D_1CA auf ein formales System D_1CA_0 einschränken, dessen herleitbare Formeln rekursiv aufzählbar sind, indem man anstatt $(Ax\ 4)$ ein vollständiges Axiomensystem für die primitiv-rekursiven Funktionen und Prädikate verwendet. Jede Formel, die in einem solchen formalen System D_1CA_0 herleitbar ist, ist auch in dem nichtkonstruktiven System D_1CA herleitbar. Wir gewinnen jedoch für das einfacher formulierbare und umfassendere System D_1CA dieselbe ordinalzahltheoretische Abgrenzung wie für D_1CA_0.

2. Es würde hier genügen, anstatt der Hauptschlußregeln (S 3.0) und (S 3.1) folgende einfacheren Schlußregeln zu verwenden:

$$\mathcal{N}\ [\mathcal{F}\ [t]] \vdash \mathcal{N}\ [\forall\, x\, \mathcal{F}\ [x]]$$
$$\mathcal{P}\ [\mathcal{F}\ [U]] \vdash \mathcal{P}\ [\exists\, X\ \mathcal{F}\ [X]]$$

Die hier verwendete Wahl der Hauptschlüsse hat jedoch die Eigenschaft, daß die Strukturschlüsse bei Fortfall der Axiomenschemata (V. I.) und $(\Delta^1_1\text{-}CA)$ ableitbar und somit als Grundschlüsse entbehrlich werden, was sich bei den beweistheoretischen Untersuchungen der folgenden Paragraphen als technisch vorteilhaft erweist.

§ 2. Das halbformale System D_1^*

Wir ersetzen in diesem Paragraphen die Schlußregel (S 2.0) durch die ω-Regel (S 2.0*), mit der das Axiomenschema (V. I.) herleitbar wird. Dabei werden die freien Zahlenvariablen entbehrlich. Außerdem führen wir eine Relation $<$ zwischen Prädikatenvariablen ein, mit der beschränkte Prädikatenquantoren gebildet werden. Hiermit wird es möglich, das Axiomenschema $(\Delta^1_1\text{-}CA)$ auf eine Δ_0-Komprehension und eine Σ^1_1-Reflexion zurückzuführen und die Schnitte starker Komplexität zu eliminieren. Die Relation $<$ wird hier rein formal behandelt und erst in § 3 axiomatisch interpretiert.

2.1. Die formale Sprache des Systems D_1^*

Grundzeichen des Systems D_1^* sind das Symbol $<$ und die Grundzeichen des Systems D_1CA unter Ausschluß der freien Zahlenvariablen.

Terme des Systems D_1^* sind die numerischen Terme des Systems D_1CA. Jeder Term des Systems D_1^* hat also einen berechenbaren Wert.

Primformeln des Systems D_1^* sind:

1. Diejenigen Primformeln des Systems D_1CA, die keine freien Zahlenvariablen enthalten.

2. $U < V$, wenn U und V freie Prädikatenvariablen sind.

Induktive Definition der *Formeln* des Systems D_1^* und des *Grades* $gr(F)$ einer Formel F.

1.–3. entsprechend wie für D_1CA.

4. Ist U eine freie Prädikatenvariable, $\mathcal{F}[U]$ eine Formel und X eine gebundene Prädikatenvariable, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt, so ist $\exists X \mathcal{F}[X]$ eine Formel mit einem *unbeschränkten Prädikatenquantor* $\exists X$ und $\exists X < U \mathcal{F}[X]$ eine Formel mit einem *beschränkten Prädikatenquantor* $\exists X$. Beide Formeln haben den Grad $gr(\mathcal{F}[U]) + 1$.

Eine Formel, in der kein unbeschränkter Prädikatenquantor auftritt, heißt eine Δ_0-*Formel*.

Wir verwenden die entsprechenden Mitteilungszeichen wie in D_1CA.

Induktive Definition der Σ_1^1-*Formeln* und Π_1^1-*Formeln* des Systems D_1^*.

1.–4. entsprechend wie für D_1CA (im 4. Fall für unbeschränkte Prädikatenquantoren).

5. Eine Formel $\exists X < U \mathcal{F}[X]$ ist genau dann eine Σ_1^1-Formel (Π_1^1-Formel), wenn $\mathcal{F}[U]$ eine Σ_1^1-Formel (Π_1^1-Formel) ist.

Folgerung. Eine Formel des Systems D_1^* ist genau dann sowohl eine Σ_1^1-Formel als auch eine Π_1^1-Formel, wenn sie eine Δ_0-Formel ist.

Bezeichnung. Ist F eine Formel des Systems D_1^*, so sei F_U diejenige Formel, die sich aus F ergibt, wenn jeder in F auftretende unbeschränkte Prädikatenquantor $\exists X$ durch $\exists X < U$ ersetzt wird. F_U ist dann eine Δ_0-Formel. Wir schreiben $\mathcal{F}_U[t]$ für $\mathcal{F}[t]_U$.

Induktive Definition des *Komplexitätsgrades* $kg(F)$ einer Formel F des Systems D_1^*.

1. Ist F eine Primformel, so sei $kg(F) := 0$.
2. Ist F eine Formel $(A \rightarrow B)$, so sei
$kg(F) := \max\{kg(A), kg(B)\} + 1$.
3. Ist F eine Formel $\forall x\, \mathcal{F}[x]$, so sei $kg(F) := kg(\mathcal{F}[0]) + 1$.
4. Ist F eine Formel $\exists X < U\, \mathcal{F}[X]$, so sei $kg(F) := kg(\mathcal{F}[U]) + 1$.
5. Ist F eine Formel $\exists X\, \mathcal{F}[X]$ mit einem unbeschränkten Prädikatenquantor $\exists X$, so sei

$$kg(F) := \begin{cases} 0, \text{ wenn } \mathcal{F}[U] \text{ eine } \Delta_0\text{-Formel ist,} \\ kg(\mathcal{F}[U]) + 1 \text{ sonst.} \end{cases}$$

2.2. Das Herleitungsverfahren des Systems D_1^*

Axiome des Systems D_1^*:

$(Ax\ 1)$ — $(Ax\ 3)$ entsprechend wie für D_1CA.

$(\Delta_0\text{-}CA)\ \mathcal{P}[\exists Y \forall x\, (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{A}[x])]$,

wenn $\mathcal{A}[0]$ eine Δ_0-Formel ist.

Hauptschlüsse des Systems D_1^*:

(S 1), (S 2.1), (S 3.0) und (S 3.1) entsprechend wie für D_1CA.

(S 2.0*) $\mathcal{P}[\mathcal{F}[n]]$ für jede Ziffer $n \vdash \mathcal{P}[\forall x\, \mathcal{F}[x]]$

(S 2.2) $U < V \rightarrow \mathcal{N}[\mathcal{F}[U]] \vdash \mathcal{N}[\exists X < V\, \mathcal{F}[X]]$,

wenn U nicht in der Konklusion auftritt.

(S 3.2) $U < V \vee \mathcal{P}[\exists X < V\, \mathcal{F}[X]]$,
$\mathcal{F}[U] \vee \mathcal{P}[\exists X < V\, \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{P}[\exists X < V\, \mathcal{F}[X]]$

$$(\Sigma^1_1\text{-Ref})\ A \vee \mathcal{P}[\exists\, YA_Y] \vdash \mathcal{P}[\exists\, YA_Y],$$

wenn A eine Σ^1_1-Formel ist.

Schnitte des Systems D_1^* ensprechend wie für D_1CA.

Der *Komplexitätsgrad* eines Schnittes ist der Komplexitätsgrad $kg(A)$ seiner Schnittformel A.

Anmerkung. Bei den Hauptschlüssen (S 3.2) und $(\Sigma^1_1\text{-Ref})$ ist ebenso wie bei den Hauptschlüssen (S 3.0) und (S 3.1) der in der Konklusoin auftretende Hauptteil auch in den Prämissen als entsprechender Minimalteil aufgenommen. Hierdurch wird erreicht, daß die Strukturschlüsse ableitbar werden. Wesentlich für $(\Sigma^1_1\text{-Ref})$ ist nur, daß hiermit die Formel

$$A \to \exists\, YA_Y$$

für jede Σ^1_1-Formel A herleitbar wird.

Kleine griechische Buchstaben (auch mit Indizes) bezeichnen im folgenden immer *Ordinalterme* des Bezeichnungssystems OT (für die Ordinalzahlen $< \Gamma_0$), das in [6], § 14 beschrieben ist.

Induktive Definition von $D_1^* \mathrel{|\!\frac{\alpha}{m}} F$.

1. Ist F ein Axiom des Systems D_1^*, so gelte $D_1^* \mathrel{|\!\frac{\alpha}{m}} F$ für jeden Ordinalterm α aus OT und jede natürliche Zahl m.

2. Gilt $D_1^* \mathrel{|\!\frac{\alpha_i}{m}} F_i$ mit $\alpha_i < \alpha$ für jede Prämisse F_i eines Hauptschlusses des Systems D_1^* oder eines Schnittes, dessen Komplexitätsgrad $< m$ ist, so gelte $D_1^* \mathrel{|\!\frac{\alpha}{m}} F$ für die zugehörige Konklusion F.

Folgerung. $D_1^* \mathrel{|\!\frac{\alpha}{m}} F,\ \alpha \leq \beta,\ m \leq n \Rightarrow D_1^* \mathrel{|\!\frac{\beta}{n}} F.$

2.3. Deduktive Eigenschaften des Systems D_1^*

$F \vdash G$ heißt ein *schwacher Schluß*, wenn

$$D_1^* \mathrel{|\!\frac{\alpha}{m}} F \Rightarrow D_1^* \mathrel{|\!\frac{\alpha}{m}} G$$

für alle α aus OT und jede natürliche Zahl m gilt.

Man beweist leicht durch Herleitungsinduktion:

Umsetzungsregel. Sind F und G gleichwertige Formeln, so ist $F \vdash G$ ein schwacher Schluß.

Substitutionsregel. $\mathcal{F}[U] \vdash \mathcal{F}[V]$ ist ein schwacher Schluß, wenn U nicht in $\mathcal{F}$ auftritt.

Inversionsregeln. Schwache Schlüsse sind:

a) $\mathcal{N}\ [(A \to B)] \vdash \mathcal{N}\ [(A \to \bot)]$
b) $\mathcal{N}\ [(A \to B)] \vdash \mathcal{N}\ [B]$
c) $\mathcal{P}\ \ [\forall x \mathcal{F}[x]] \vdash \mathcal{P}\ [\mathcal{F}[t]]$
d) $\mathcal{N}\ [\exists X \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{N}\ [\mathcal{F}[U]]$
e) $\mathcal{N}\ [\exists X < V \mathcal{F}[X]] \vdash U < V \to \mathcal{N}\ [\mathcal{F}[U]]$

Der Beweis der Inversionsregeln c), d) und (e) erfolgt unter Benutzung der Umsetzungsregel und der Substitutionsregel.

Strukturschlußregel. Gilt $F \overset{s}{\vdash} G$, so ist $F \vdash G$ ein schwacher Schluß.

Der Beweis der Strukturschlußregel erfolgt unter Benutzung der Inversionsregeln (ähnlich wie in [6], S. 23).

Tautologiesatz. Ist F eine Formel vom Grad n, so gilt $D_1^* \overset{2n}{\underset{0}{\vdash}} \mathcal{Q}[F, F]$ für jede NP-Form $\mathcal{Q}$.
Beweis durch Induktion nach n (ähnlich wie in [6], S. 21).

1. Schnittlemma. Ist A eine Formel $\forall x \mathcal{F}[x]$ mit $kg(A) = m$, so gilt

$$D_1^* \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}} A \vee B,\ D_1^* \overset{\beta}{\underset{m}{\vdash}} A \to B \Rightarrow D_1^* \overset{\alpha+\beta}{\underset{m}{\vdash}} B$$

Beweis durch Induktion nach β mit der Strukturschlußregel und der Inversionsregel c).

2. Schnittlemma. Ist A eine Formel $\exists X \mathcal{F}[X]$ oder $\exists X < V \mathcal{F}[X]$ mit $kg(A) = m > 0$, so gilt

$$D_1^* \overset{\alpha}{\underset{m}{\vdash}} A \vee B,\ D_1^* \overset{\beta}{\underset{u}{\vdash}} A \to B \Rightarrow D_1^* \overset{\beta+\alpha}{\underset{m}{\vdash}} B$$

Beweis durch Induktion nach α mit der Strukturschlußregel und den Inversionsregeln d) und e).

Reduktionssatz. Aus $D_1^* \overset{\alpha}{\underset{m+2}{\vdash}} F$ folgt $D_1^* \overset{\omega^\alpha}{\underset{m+1}{\vdash}} F$.

Beweis durch Induktion nach α mit den beiden Schnittlemmata, der Strukturschlußregel und den Inversionsregeln a) und b).

Schwacher Schnitt-Eliminationssatz. Gilt $D_1^* \frac{|\alpha}{|m} F$ mit $\alpha < \varepsilon_0$, so gibt es $\beta < \varepsilon_0$ mit $D_1^* \frac{|\beta}{|1} F$.

Beweis mit dem Reduktionssatz durch Induktion nach m.

2.4. Einbettung von D_1CA in D_1^*

(V. I.)-**Lemma.** Für jede Formel $\mathcal{F}$ [o] gilt

$D_1^* \frac{|\omega}{|0} \forall x (\mathcal{F}[x] \to \mathcal{F}[x']) \to (\mathcal{F}[0] \to \forall x\, \mathcal{F}[x])$.

Beweis. $\mathcal{F}$ [o] habe den Grad m. Man beweist durch Induktion nach n mit dem Tautologiesatz, mit Hauptschlüssen (S 1) und (S 3.0) und mit der Strukturschlußregel

$$D_1^* \frac{|2m+2n}{|0} \forall x (\mathcal{F}[x] \to \mathcal{F}[x']) \to (\mathcal{F}[0] \to \mathcal{F}[n])$$

für jede Ziffer n. Mit (S 2.0*) folgt die Behauptung.

Eine Formel F heiße *endlich herleitbar*, wenn es $\alpha < \omega$ und m gibt, so daß $D_1^* \frac{|\alpha}{|m} F$ gilt.

Beschränkungslemma. Endlich herleitbare Formeln sind:

a) $F_U \to F$, wenn F eine Σ_1^1-Formel ist.

b) $F \to F_U$, wenn F eine Π_1^1-Formel ist.

Beweis durch Induktion nach $gr(F)$.

$(\Delta_1^1\text{-}CA)$-**Lemma.** Ist $\mathcal{A}$ [o] eine Σ_1^1-Formel und $\mathcal{B}$ [o] eine Π_1^1-Formel, so ist die Formel

$$\forall x (\mathcal{A}[x] \leftrightarrow \mathcal{B}[x]) \to \exists Y \forall x (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{A}[x])$$

endlich herleitbar.

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir

$$\begin{aligned}
&A :\Leftrightarrow \forall x (\mathcal{A}[x] \leftrightarrow \mathcal{B}[x])\\
&B :\Leftrightarrow \exists Y \forall x (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{A}[x])\\
&\mathcal{C}[U] :\Leftrightarrow \exists Y \forall x (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{A}_U[x])\\
&\mathcal{D}[U] :\Leftrightarrow \forall x (\mathcal{B}_U[x] \to \mathcal{A}_U[x])
\end{aligned}$$

Dann sind offenbar folgende Formeln endlich herleitbar:

(1) $\qquad A \to \forall x (\mathcal{B}[x] \to \mathcal{A}[x])$

(2) $$\forall x(\mathcal{A}_U[x] \to \mathcal{A}[x]) \to (\forall x\,(\mathcal{B}[x] \to \mathcal{B}_U[x]) \to ((\mathcal{C}[U] \to (\mathcal{D}[U] \to (A \to B))))$$

Aus dem Beschränkungslemma folgt, daß die Formeln

$$\forall x(\mathcal{A}_U[x] \to \mathcal{A}[x]) \text{ und } \mathcal{A} x\,(\mathcal{B}[x] \to \mathcal{B}_U[x])$$

endlich herleitbar sind. Nach der Strukturschlußregel und durch Schnitte mit (2) folgt

$$\mathcal{C}[U] \to (\mathcal{D}[U] \to (A \to B))$$

$\mathcal{C}[U] \vee (\mathcal{D}[U] \to (A \to B))$ ist ein Axiom (Δ_0-CA). Durch einen Schnitt folgt

$$\mathcal{D}[U] \to (A \to B)$$

Mit einem Hauptschluß (S. 2.1) folgt

(3) $$\exists Y \mathcal{D}[Y] \to (A \to B)$$

$\forall x(\mathcal{B}[x] \to \mathcal{A}[x])$ ist eine Σ_1^1-Formel. Aus (1) folgt daher nach der Strukturschlußregel und mit einem Hauptschluß (Σ_1^1-Ref)

(4) $$\exists Y \mathcal{D}[Y] \vee (A \to B)$$

Aus (3) und (4) folgt die Behauptung durch einen Schnitt.

Definition. Eine Formel F^* das Systems D_1^* heißt eine *numerische Spezialisierung* einer Formel F das Systems D_1CA, wenn F^* durch Einsetzungen von Ziffern für freie Zahlenvariablen aus F hervorgeht.

Einbettungssatz. Ist F eine in D_1CA herleitbare Formel, so gibt es m und n derart, daß $D_1^* \mathrel{|\!\!\frac{\omega+n}{m}} F^*$ für jede numerische Spezialisierung F^* von F gilt.

Beweis. Mit dem (V. I.)-Lemma und dem (Δ_1^1-CA)-Lemma ergibt sich, daß es zu jedem Axiom F_i des Systems D_1CA eine natürliche Zahl m_i gibt, so daß $D_1^* \mathrel{|\!\!\frac{\omega}{m_i}} F_i^*$ für jede numerische Spezialisierung F_i^* von F_i gilt. Hieraus folgt die Behauptung, da jede Herleitung des formalen Systems D_1CA endlich ist, jedem Hauptschluß des Systems D_1CA ein Hauptschluß des Sytems D_1^* entspricht und für D_1^* die Strukturschlßregel gilt.

§ 3. Das geschichtete halbformale System RD_1^*

Wir ordnen den unbeschränkten Prädikatenquantoren Schichten aus OT zu und lassen $(\Delta_0\text{-}CA)$ und $(\Sigma^1_1\text{-Ref})$ fort. Hierbei werden alle Schnitte eliminierbar. $(\Delta_0\text{-}CA)$ wird durch Einführung von λ-Prädikatoren herleitbar, und $(\Sigma^1_1\text{-Ref})$ wird für Σ^1_1-Formeln interpretiert.

3.1. Die formale Sprache des Systems RD_1^*

Als *Grundzeichen* des Systems RD_1^* verwenden wir:

1. Alle Grundzeichen des Systems D_1^*.
2. Das Symbol λ.
3. Ordinalterme > 0 aus OT (als obere Indizes von gebundenen Prädikatenvariablen).

Terme, *Ziffern* und *konstante Primformeln* seien wie in D_1^* definiert.

Induktive Definition der *Formeln* und *Prädikatoren* des Systems RD_1^* und ihrer *Schichten*.

1. Jede konstante Primformel ist eine Formel der Schicht 0.
2. Jede freie Prädikatenvariable ist ein Prädikator der Schicht 0.
3. Ist P^σ ein Prädikator der Schicht σ und t ein Term, so ist $P^\sigma(t)$ eine Formel der Schicht σ.
4. Ist P^σ ein Prädikator der Schicht σ und Q^τ eine Prädikator der Schicht τ, so ist $P^\sigma < Q^\tau$ eine Formel der Schicht $\max\{\sigma, \tau\}$.
5. Ist A eine Formel der Schicht σ und B eine Formel der Schicht τ, so ist $(A \rightarrow B)$ eine Formel der Schicht $\max\{\sigma, \tau\}$.
6. Ist $\mathcal{F}[0]$ eine Formel der Schicht σ und x eine gebundene Zahlenvariable, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt, so ist $\forall x\, \mathcal{F}[x]$ eine Formel der Schicht σ und $\lambda x\, \mathcal{F}[x]$ ein Prädikator der Schicht σ.
7. Ist U eine freie Prädikatenvariable, $\mathcal{F}[U]$ eine Formel der Schicht σ, P^τ ein Prädikator der Schicht τ und X eine gebundene Prädikatenvariable, die weder in P^τ noch in $\mathcal{F}$ auftritt, so ist $\exists X < P^\tau\, \mathcal{F}[X]$ eine Formel der Schicht $\max\{\sigma, \tau\}$.

8. Ist U eine freie Prädikatenvariable, $\mathcal{F}[U]$ eine Formel der Schicht σ, X eine gebundene Prädikatenvariable, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt, und $\tau > 0$, so ist $\exists X^\tau \mathcal{F}[X]$ eine Formel der Schicht $\max\{\sigma,\tau\}$.

Wir verwenden die entsprechenden Mitteilungszeichen wie in D_1^* und außerdem P^σ, Q^σ, R^σ als Mitteilungszeichen für Prädikatoren der Schicht σ.

Induktive Definition des *Ranges* $rk(F)$ einer Formel F des Systems RD_1^*.

1. Ist F eine konstante Primformel oder eine Formel $U(t)$, so sei $rk(F) := 0$.

2. Ist F eine Formel $P^\sigma < Q^\tau$, so sei $rk(F) := \omega \cdot \max\{\sigma, \tau\}$.

3. Ist F eine Formel $(A \rightarrow B)$, so sei
$rk(F) := \max\{rk(A), rk(B)\} + 1$.

4. Ist F eine Formel $\forall x \mathcal{F}[x]$ oder $\lambda x \mathcal{F}[x](t)$, so sei
$rk(F) := rk(\mathcal{F}[0]) + 1$.

5. Ist F eine Formel $\exists X < P^\tau \mathcal{F}[X]$ oder $\exists X^\tau \mathcal{F}[X]$ der Schicht σ, so sei $rk(F) := \max\{\omega \cdot \sigma, rk(\mathcal{F}[U]) + 1\}$.

Folgerungen.

1. Für jede Formel F der Schicht σ gilt $\omega \cdot \sigma \leq rk(F) < \omega \cdot \sigma + \omega$.

2. Ist $\mathcal{F}[U]$ eine Formel einer Schicht $> \sigma$, so hat jede Formel $\mathcal{F}[P^\sigma]$ denselben Rang wie $\mathcal{F}[U]$.

Ranglemma.

a) A und B haben kleinere Ränge als $(A \rightarrow B)$.

b) $\mathcal{F}[t]$ hat einen kleineren Rang als $\forall x \mathcal{F}[x]$ und als $\lambda x \mathcal{F}[x](t)$.

c) Ist $\sigma < \tau$, so hat $\mathcal{F}[P^\sigma]$ einen kleineren Rang als $\exists X < Q^\tau \mathcal{F}[X]$ und als $\exists X^\tau \mathcal{F}[X]$.

Beweise entsprechend wie in [6], S. 199.

Als *geschichtete Quantoren* der Schicht σ bezeichnen wir die Prädikatenquantoren der Gestalt $\exists X^\sigma$.

Induktive Definition des *positiven* und *negativen Auftretens* von geschichteten Quantoren in einer Formel des Systems RD^*_1.

1. Ist F eine konstante Primformel oder eine Formel $P^\sigma(t)$ oder $P^\sigma < Q^\tau$, so tritt in F kein geschichteter Quantor positiv oder negativ auf.

2. In einer Formel $(A \rightarrow B)$ tritt ein geschichteter Quantor genau dann positiv (negativ) auf, wenn er in A negativ (positiv) oder in B positiv (negativ) auftritt.

3. In einer Formel $\forall x\, \mathcal{F}[x]$ tritt ein geschichteter Quantor genau dann positiv (negativ) auf, wenn er in $\mathcal{F}[0]$ positiv (negativ) auftritt.

4. In einer Formel $\exists X < P^\sigma\, \mathcal{F}[X]$ tritt ein geschichteter Quantor genau dann positiv (negativ) auf, wenn er in $\mathcal{F}[U]$ positiv (negativ) auftritt.

5. In einer Formel $\exists X^\sigma\, \mathcal{F}[X]$ tritt der geschichtete Quantor $\exists X^\sigma$ positiv auf. Außerdem tritt in dieser Formel ein geschichteter Quantor genau dann positiv (negativ) auf, wenn er in $\mathcal{F}[U]$ positiv (negativ) auftritt.

3.2. Das Herleitungsverfahren des Systems RD^*_1

Axiome des Systems RD^*_1:

$(Ax\ R\ 1)$ $\mathcal{P}[A]$, wenn A eine wahre konstante Primformel oder eine Formel $P^\sigma < Q^\tau$ mit $\sigma < \tau$ ist.

$(Ax\ R\ 2)$ $\mathcal{N}[A]$, wenn A eine falsche konstante Primformel oder eine Formel $P^\sigma < Q^\tau$ mit $\tau \leq \sigma$ oder eine Formel $\exists X < P^0\, \mathcal{F}[X]$ ist.

$(Ax\ R\ 3)$ $\mathcal{Q}[U(s), U(t)]$, wenn s und t gleichen Wert haben.

Hauptschlüsse des Systems RD^*_1:

(S 1), (S 2.0*) und (S 3.0) entsprechend wie für D^*_1.

(RS 2.1*) $\mathcal{N}[\mathcal{F}[P^\sigma]]$ für alle P^σ mit $\sigma < \tau \vdash \mathcal{N}[\exists X^\tau\, \mathcal{F}[X]]$

(RS 2.2*) $\mathcal{N}[\mathcal{F}[P^\sigma]]$ für alle P^σ mit $\sigma < \tau \vdash \mathcal{N}[\exists X < Q^\tau \mathcal{F}[X]]$, wenn $\tau > 0$ ist.

(RS 3.1) $\mathcal{F}[P^\sigma] \vee \mathcal{P}[\exists X^\tau \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{P}[\exists X^\tau\, \mathcal{F}[X]]$, wenn $\sigma < \tau$ ist.

(RS 3.2) $\mathcal{F}[P^\sigma] \vee \mathcal{P}[\exists X < Q^\tau \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{G}\mathcal{V}[\exists X < Q^\tau \mathcal{F}[X]]$,
wenn $\sigma < \tau$ ist.

(S 4) $\mathcal{E}[\mathcal{F}[t]] \vdash \mathcal{E}[\lambda x \mathcal{F}[x](t)]$,
wenn $\mathcal{E}$ eine P-Form oder eine N-Form ist.

Schnitte des Systems RD_1^* entsprechend wie für D_1CA und D_1^*. Der *Rang* eines Schnittes ist der Rang $rk(A)$ seiner Schnittformel A.

Induktive Definition von $RD_1^* \mathrel{|\!\frac{\alpha}{\varrho}} F$.

1. Ist F ein Axiom des Systems RD_1^*, so gelte $RD_1^* \mathrel{|\!\frac{\alpha}{\varrho}} F$ für alle α und alle ϱ aus OT.

2. Gilt $RD_1^* \mathrel{|\!\frac{\alpha_i}{\varrho}} F_i$ mit $\alpha_i < \alpha$ für jede Prämisse F_i eines Hauptschlusses des Systems RD_1^* oder eines Schnittes, dessen Rang $< \varrho$ ist, so gelte $RD_1^* \mathrel{|\!\frac{\alpha}{\varrho}} F$, für die zugehörige Konklusion F.

Folgerung. $RD_1^* \mathrel{|\!\frac{\alpha}{\varrho}} F,\ \alpha \leq \beta,\ \varrho \leq \sigma \Rightarrow RD_1^* \mathrel{|\!\frac{\beta}{\sigma}} F$

3.3. Deduktive Eigenschaften des Systems RD_1^*

Schwache Schlüsse sind entsprechend wie in D_1^* zu verstehen. Ähnlich wie für D_1^* ergeben sich für RD_1^* die *Umsetzungsregel*, die *Inversionsregeln* zu (S 1), (S 2.0*), (RS 2.1*), (RS 2.2*) und (S 4) und die *Strukturschlußregel*.

Ersetzungslemma. Entsteht G aus einer Formel F des Systems RD_1^* dadurch, daß gewisse geschichtete Quantoren $\exists X^\sigma$ der Schicht σ, die in F positiv auftreten, durch $\exists X < P^\sigma$ ersetzt werden, so ist $F \vdash G$ ein schwacher Schluß.

Beweis durch Herleitungsinduktion.

$\sum$-Persistenz. Entsteht G aus einer Formel F des Systems RD_1^* dadurch, daß gewisse geschichtete Quantoren $\exists X^\tau$ der Schicht τ, die in F positiv auftreten, durch entsprechende geschichtete Quantoren $\exists X^\sigma$ einer Schicht $\sigma > \tau$ ersetzt werden, so ist $F \vdash G$ ein schwacher Schluß.

Beweis durch Herleitungsinduktion.

Tautologiesatz. Ist F eine Formel vom Rang ϱ, so gilt $RD_1^* \mathrel{|}\!\frac{2\varrho}{0}\; \mathcal{Q}[F, F]$ für jede NP-Form $\mathcal{Q}$.

Beweis durch Induktion nach ϱ aufgrund des Ranglemmas ähnlich wie für den Tautologiesatz des Systems D_1^*.

Starker Schnitt-Eleminationssatz. Aus $RD_1^* \mathrel{|}\!\frac{\alpha}{\varrho}\; F$ folgt $RD_1^* \mathrel{|}\!\frac{\varphi\varrho\alpha}{0}\; F$. (Dabei ist φ die in [6], S. 90 definierte Funktion von OT.)

Beweis entsprechend wie für Theorem 22.7 in [6], S. 203.

3.4. Einbettung von D_1^* in RD_1^*

Definition der *σ-Interpretationen* für $\sigma > 0$.

Eine Formel F^σ des Systems RD_1^* heißt eine *σ-Interpretation* einer Formel F des Systems D_1^*, wenn F^σ durch folgende Ersetzungen aus F hervorgeht:

1. Für jede in F auftretende freie Prädikatenvariable wird ein Prädikator einer Schicht $< \sigma$ eingesetzt.

2. Jeder in F auftretende unbeschränkte Prädikatenquantor $\exists X$ wird durch $\exists X^\sigma$ ersetzt.

Folgerung. Jede σ-Interpretation einer Formel des Systems D_1^* hat eine Schicht $\leq \sigma$ und einen Rang $< \omega \cdot \sigma + \omega$.

Σ-Lemma. Ist F^σ eine σ-Interpretation einer Σ_1^1-Formel des Systems D_1^*, so tritt jeder geschichtete Quantor der Schicht σ, der in F^σ auftritt, positiv in F^σ auf.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen.

Interpretationssatz. Gilt $D_1^* \mathrel{|}\!\frac{\alpha}{1}\; F$ für eine Σ_1^1-Formel F des Systems D_1^* und ist $\sigma = \omega^\alpha \cdot \beta \neq 0$, so gilt

$$RD_1^* \mathrel{|}\!\frac{\omega \cdot \sigma + 2\alpha}{\omega \cdot \sigma + \omega}\; F^\sigma$$

für jede σ-Interpretation F^σ von F.

Beweis durch Induktion nach α.

1. F sei eines der Axiome (Ax 1)–(Ax 3) des Systems D_1^*. Dann ist F^σ ein Axiom ($Ax\ R$ 1) oder ($Ax\ R$ 2) oder eine Formel $\mathcal{Q}[A, B]$, wobei A und B gleichwertige Formeln einer Schicht $< \sigma$

sind. Im letzten Fall folgt die Behauptung aus dem Tautologiesatz und der Umsetzungsregel des Systems RD_1^*.

2. F sei ein Axiom $(\Delta_0 - CA)$. Dann ist F^σ eine Formel

$$\mathcal{P}[\exists Y^\sigma \forall x (Y(x) \leftrightarrow \mathcal{A}[x])],$$

wobei $\mathcal{A}[\mathrm{o}]$ eine Formel einer Schicht $< \sigma$ ist. Es gibt daher $\gamma < \omega \cdot \sigma$ mit

$$RD_1^* \left|\frac{\gamma}{0}\right. \forall x (\lambda z \mathcal{A}[z](x) \leftrightarrow \mathcal{A}[x]) \vee F^\sigma$$

Mit einem Hauptschluß (RS 3.1) folgt die Behauptung.

3. $D_1^* \left|\frac{\alpha}{1}\right. F$ sei durch einen Hauptschluß des Systems D_1^* erschlossen. Dann sind die Prämissen dieses Hauptschlusses ebenfalls Σ_1^1-Formeln. Daher folgt die Behauptung unmittelbar aus der I.V. (Induktionsvoraussetzung), wenn es sich nicht um einen Hauptschluß (Σ_1^1-Ref) handelt. Andernfalls ist F eine Formel $\mathcal{P}[\exists Y A_Y]$, wobei A eine Σ_1^1-Formel ist, und man hat $\alpha_0 < \alpha$ mit

(1) $$D_1^* \left|\frac{\alpha_0}{1}\right. A \vee \mathcal{P}[\exists Y A_Y]$$

F^σ ist eine Formel $\mathcal{P}^\sigma[\exists Y^\sigma \mathcal{A}[Y]]$, wobei $\mathcal{A}[U]$ eine Schicht $< \sigma$ hat. Es gibt $\sigma_0 < \sigma$ derart, daß bei der Bildung von F^σ für die in F auftretenden freien Prädikatenvariablen nur Prädikatoren von Schichten $\leq \sigma_0$ eingesetzt sind. Hierzu gibt es β_0 mit

$$\sigma_0 < \tau := \omega^{\alpha_0} \cdot \beta_0 < \sigma = \omega^\alpha \cdot \beta$$

A^τ sei diejenige τ-Interpretation der Formel A, bei der für die in A auftretenden freien Prädikatenvariablen dieselben Prädikatoren wie bei der Bildung von F^σ in F eingesetzt sind. Aus $\mathcal{P}^\sigma$ bilden wir $\mathcal{P}^\tau$, indem wie jeden in $\mathcal{P}^\sigma$ auftretenden geschichteten Quantor der Schicht σ durch einen entsprechenden geschichteten Quantor der Schicht τ ersetzen. Aus (1) folgt nach I.V.

$$RD_1^* \left|\frac{\omega \cdot \tau + 2\alpha_0}{\omega \cdot \tau + \omega}\right. A^\tau \vee \mathcal{P}^\tau[\exists Y^\tau \mathcal{A}[Y]]$$

Nach dem Σ-Lemma folgt aufgrund der Σ-Persistenz

(2) $$RD_1^* \left|\frac{\omega \cdot \tau + 2\alpha_0}{\omega \cdot \tau + \omega}\right. A^\tau \vee \mathcal{P}^\sigma[\exists Y^\sigma \mathcal{A}[Y]]$$

P^τ sei ein beliebiger Prädikator der Schicht τ. $\mathcal{A}[P^\tau]$ ist diejenige Formel, die sich aus A^τ ergibt, wenn jeder in A^τ auftretende geschichtete Quantor $\exists X^\tau$ der Schicht τ durch $\exists X < P^\tau$ ersetzt wird. Aus (2) folgt daher nach dem Ersetzungslemma

$$RD_1^* \,\Big|\tfrac{\omega\cdot\tau+2\alpha_0}{\omega\cdot\tau+\omega}\; \mathcal{A}[P^\tau] \vee \mathcal{P}^\sigma[\exists Y^\sigma \mathcal{A}[Y]]$$

Hieraus folgt die Behauptung mit einen Hauptschluß (RS 3.1).

4. $D_1^* \,\Big|\tfrac{\alpha}{1}\; F$ sei durch einen Schnitt erschlossen. Ist die Schnittformel eine Primformel des Systems D_1^*, so folgt die Behauptung aus der I.V. Andernfalls hat die Schnittformel die Gestalt $\exists X \mathcal{A}[X]$, wobei $\mathcal{A}[U]$ eine Δ_0-Formel ist. Dann hat man $\alpha_i < \alpha$ ($i = 1, 2$) mit

(1) $\quad D_1^* \,\Big|\tfrac{\alpha_1}{1}\; \exists X \mathcal{A}[X] \vee F$

(2) $\quad D_1^* \,\Big|\tfrac{\alpha_2}{1}\; \exists X \mathcal{A}[X] \to F$

Aus (2) folgt nach der Inversionsregel d) des Systems D_1^*

(3) $\quad D_1^* \,\Big|\tfrac{\alpha_2}{1}\; \mathcal{A}[U] \to F,$

wobei U weder in $\mathcal{A}$ noch in F auftreten möge. Bei (1) und (3) handelt es sich um Σ_1^1-Formeln. Nach I.V. folgt daher

(4) $\quad RD_1^* \,\Big|\tfrac{\omega\cdot\sigma+2\alpha_1}{\omega\cdot\sigma+\omega}\; \exists X^\sigma \mathcal{A}^\sigma[X] \vee F^\sigma$

(5) $\quad RD_1^* \,\Big|\tfrac{\omega\cdot\sigma+2\alpha_2}{\omega\cdot\sigma+\omega}\; \mathcal{A}^\sigma[P^\tau] \to F^\sigma$ für alle P^τ mit $\tau < \sigma$.

Aus (5) folgt mit einem Hauptschluß (RS 2.1*)

(6) $\quad RD_1^* \,\Big|\tfrac{\omega\cdot\sigma+2\alpha_2+1}{\omega\cdot\sigma+\omega}\; \exists X^\sigma \mathcal{A}^\tau[X] \to F^\sigma$

Aus (4) und (6) folgt die Behauptung durch einen Schnitt.

§ 4. Beweistheoretische Abgrenzung des Systems D_1CA

Eine Formel des Systems D_1CA heißt *geschlossen*, wenn sie keine freie Zahlenvariable enthält. Jede geschlossene arithmetische Formel des Systems D_1CA ist zugleich eine Formel der Systeme D_1^* und RD_1^*. Sie ist eine Σ_1^1-Formel des Systems D_1^* und eine σ-Interpretation von sich selbst (für alle $\sigma > 0$).

Abgrenzungssatz. Ist F eine geschlossene arithmetische Formel, die im formalen System D_1CA herleitbar ist, so gibt es $\gamma < \varphi\varepsilon_0 0$ mit $RD_1^* \,\Big|\tfrac{\gamma}{0}\; F$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt nach dem Einbettungssatz, daß es $\alpha < \omega \cdot 2$ und eine natürliche Zahl m gibt, so daß $D_1^* \,|\!\frac{\alpha}{m}\, F$ gilt. Dann gibt es nach dem schwachen Schnitt-Eliminationssatz $\beta < \varepsilon_0$ mit $D_1^* \,|\!\frac{\beta}{1}\, F$. Nach dem Interpretationssatz folgt

$$RD_1^* \,\Big|\!\frac{\omega^{1+\beta}+2\beta}{\omega^{1+\beta}+\omega}\, F$$

Nach dem starken Schnitt-Eliminationssatz folgt $RD_1^* \,|\!\frac{\gamma}{0}\, F$ für $\gamma = \varphi(\omega^{1+\beta} + \omega)(\omega^{1+\beta} + 2\beta) < \varphi\varepsilon_0 0$.
Aus diesem Abgrenzungssatz folgt in bekannter Weise, daß die formalisierte transfinite Induktion in D_1CA nicht bis $\varphi\varepsilon_0 0$ herleitbar ist. Hiermit ist $|\Delta_1^1 - CA| \leq \varphi\varepsilon_0 0$ bewiesen.

Literatur

[1] S. Feferman, Systems of predicative analysis. Journal of Symbolic Logic 29, 1–30 (1964).

[2] H. Friedman, Subsystems of analysis and set theory. Dissertation M. I. T. (1967).

[3] W. W. Tait, Normal derivability in classical logic. The Syntax and Semantics of Infinitary Languages, 204–236. Springer Lecture Notes in Math. 72 (1968).

[4] S. Feferman, Ordinals and functionals in proof theory. Proc. Int. Congr. Maths, vol. 1, 229–235 (1971).

[5] J. Barwise, Admissible Sets and Structures. Springer Berlin-Heidelberg-New York (1975).

[6] K. Schütte, Proof Theory. Springer Berlin-Heidelberg-New York (1977).

[7] G. Jäger, Beweistheoretische Untersuchung eines Teilsystems der Mengenlehre. Diplomarbeit München (1977).

[8] G. Jäger, Beweistheorie von KPN. Erscheint im Archiv f. Math. Logik und Grundl.