BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1979

MÜNCHEN 1980

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Potentialtheoretische Charakterisierung Riemannscher Flächen

Von Udo Bauermann in Frankfurt

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Es ist wohlbekannt, daß für jede offene Kreisscheibe U der komplexen Ebene $\boldsymbol{C}$ die Realteile der auf dem Abschluß $\bar{U}$ von U stetigen und in U holomorphen Funktionen dicht liegen bezüglich gleichmäßiger Konvergenz in der Menge aller stetigen Funktionen auf $\bar{U}$, die in U harmonisch sind, d. h. dort der Laplaceschen Differentialgleichung genügen. Dieser enge Zusammenhang zwischen der Garbe $\boldsymbol{A}$ der holomorphen Funktionen und der Garbe $\boldsymbol{H}$ der harmonischen Funktionen soll im folgenden in einer allgemeinen Situation untersucht werden.

Sei $(X, \boldsymbol{H})$ ein harmonischer Raum mit $1 \in \boldsymbol{H}(X)$ und sei $\boldsymbol{A}$ eine Garbe von Algebren stetiger komplexwertiger Funktionen auf X, so daß eine Basis $\mathfrak{K}$ $\boldsymbol{H}$-regulärer Mengen U existiert mit

$$\text{(A)} \qquad H(U) = \overline{\operatorname{Re} A(U)},$$

wobei $\quad H(U) := \{h \in C_{\boldsymbol{R}}(\bar{U}) : h_{|U} \in \boldsymbol{H}(U)\}$

und $\quad A(U) := \overline{\{f \in C(\bar{U}) : f_{|U} \in \boldsymbol{A}(U)\}}.$

Als Hauptergebnis erhalten wir den folgenden Satz:

X ist eine Riemannsche Fläche, $\boldsymbol{H}$ die Garbe der zugehörigen harmonischen Funktionen und der lokale Abschluß von $\boldsymbol{A}$ bezüglich lokal gleichmäßiger Konvergenz die Garbe der zugehörigen analytischen Funktionen.

Zum Beweis dieses Satzes gehen wir wie folgt vor. Im 1. Abschnitt wird gezeigt, daß $(X, \boldsymbol{H})$ ein elliptischer Raum ist.

Insbesondere folgt daraus, daß jede reguläre Menge U der Basis $\mathfrak{K}$ in einem Gleason-Part der zugehörigen Funktionenalgebra $A(U)$ enthalten ist.

Im 2. Abschnitt wird unter Ausnutzung bekannter Sätze über die Einbettung analytischer Struktur in das Spektrum einer Funktionenalgebra bewiesen, daß jeder Punkt $x \in X$ in einer analytischen Kreisscheibe liegt.

Weitere Untersuchungen der analytischen Struktur im 3. Abschnitt zeigen, daß wie im klassischen Fall die Mengen $U \in \mathfrak{K}$ ein Gleason-Part im Raum der maximalen Ideale von $A(U)$ sind.

Insgesamt stellt sich damit heraus, daß man X (bzw. die Zusammenhangskomponenten von X) bezüglich der gegebenen Topologie mit der Struktur einer Riemannschen Fläche versehen kann. Die klassische Potentialtheorie auf einer Riemannschen Fläche liefert also das einzige Beispiel, in dem harmonische und analytische Struktur in der zuvor beschriebenen Weise (A) miteinander verknüpft sind (4. Abschnitt).

Im 5. Abschnitt werden aus diesem Ergebnis weitere Kennzeichnungen Riemannscher Flächen abgeleitet.

Im letzten Abschnitt werden einige offene Probleme angegeben, die bei naheliegenden Modifikationen der Voraussetzung (A) auftreten.

0. Grundlagen und Bezeichnungen

0. 1. Funktionenalgebren

Sei X ein kompakter (Hausdorff-)Raum und A eine Algebra von stetigen komplexwertigen Funktionen auf X; A heißt *Funktionenalgebra* („*Uniform Algebra*") auf X, wenn gilt

(1) $1 \in A$;
(2) A trennt die Punkte von X;
(3) A ist abgeschlossen bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Die Menge der nichttrivialen multiplikativen linearen Funktionale auf A wird als *Spektrum* $\Sigma(A)$ der Funktionenalgebra A bezeichnet:

$$\Sigma(A) = \{\varphi \in A' : \varphi \neq 0,\ \varphi \text{ multiplikativ}\}.$$

$\Sigma(A)$ ist $\sigma(A', A)$ – kompakte Teilmenge der Einheitskugel in A'. Für $\varphi \in \Sigma(A)$ ist $\ker \varphi$ ein maximales Ideal in A. Umgekehrt ist jedes maximale Ideal von A Kern eines Elementes aus $\Sigma(A)$. Vermöge dieser Identifizierung wird $\Sigma(A)$ auch als *Raum der maximalen Ideale* von A bezeichnet.

Sei $x \in X$, $\tau_x : A \to \mathbf{C}$ der Auswertungshomomorphismus im Punkt x. Die Zuordnung $x \mapsto \tau_x$ bettet X homöomorph ein in $\Sigma(A)$.

Sei $f \in A$; als **Gelfandtransformierte** $\hat{f}$ von f wird die durch $\hat{f}(\varphi) := \varphi(f)$ auf $\Sigma(A)$ definierte Funktion bezeichnet; die Gelfandtransformation $f \mapsto \hat{f}$ ist eine lineare Isometrie von A in $C_{\mathbf{C}}(\Sigma(A))$; das Bild von A in $C_{\mathbf{C}}(\Sigma(A))$ wird mit $\hat{A}$ bezeichnet.

Ein positives Radonmaß μ auf $\Sigma(A)$ heißt *Darstellungsmaß* von A im Punkt $\varphi \in \Sigma(A)$, falls gilt:

$$\int \hat{f}\, d\mu = \hat{f}(\varphi) \text{ für alle } f \in A.$$

Die Menge aller Darstellungsmaße von A in φ ist Teilmenge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\Sigma(A)$ und wird mit $\mathfrak{M}_\varphi(A)$ bezeichnet. $\mathfrak{M}_\varphi(A)$ enthält stets das Punktmaß ε_φ. Die Menge

$$Ch(A) := \{\varphi \in \Sigma(A) : \mathfrak{M}_\varphi(A) = \{\varepsilon_\varphi\}\}$$

wird als *Choquet-Rand*, ihr Abschluß als *Šhilov-Rand* $\check{S}(A)$ bezeichnet. $\check{S}(A)$ ist Teilmenge von X; für alle $\varphi \in \Sigma(A)$ existiert ein Darstellungsmaß μ_φ, dessen Träger $T(\mu_\varphi)$ im Shilov-Rand enthalten ist.

Durch $\varphi \sim \psi : \Leftrightarrow \| \varphi - \psi \| < 2$ (wobei $\| \cdot \|$ die übliche Operatornorm in A' bezeichnet) wird auf $\Sigma(A)$ eine Äquivalenzrelation definiert; die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation werden als *Gleason-Parts* bezeichnet.

Grundlegend für die Einbettung analytischer Struktur in den Raum der maximalen Ideale einer Funktionenalgebra ist der folgende

> **Einbettungssatz** ([13], Theorem 17.1): Sei A eine Funktionenalgebra mit Šhilov-Rand $\check{S}(A)$ und sei $\varphi \in \Sigma(A)$. Wenn Π, der φ enthaltende Gleason-Part von A, aus mehr als einem Punkt besteht, und wenn genau ein Darstellungsmaß von A in φ mit Träger in $\check{S}(A)$ existiert, dann ist Π eine analytische Kreisscheibe im folgenden Sinn: es gibt eine stetige bijektive Abbildung Φ der offenen Einheitskreisscheibe D in $\mathbf{C}$ auf Π, so daß für alle $f \in A$ die Funktion $\hat{f} \circ \Phi$ holomorph ist auf D.

0.2. Harmonische Räume

Sei X ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis, und sei $\boldsymbol{H}$ eine Garbe von Vektorräumen stetiger reeller Funktionen auf X.

Eine relativ kompakte offene Teilmenge U von X mit nichtleerem topologischen Rand U^* heißt (**H**-)*regulär*, wenn gilt:

(1) jede Funktion $f \in C_{\boldsymbol{R}}(U^*)$ läßt sich eindeutig zu einer stetigen Funktion $\bar{f}$ auf $\bar{U}$ fortsetzen, so daß $\bar{f}_{|U} =: H_f^U \in \boldsymbol{H}(U)$;

(2) $f \in C_{\boldsymbol{R}}^+(U^*) \Rightarrow H_f^U \geqq 0$.

Das Paar $(X, \boldsymbol{H})$ heißt *harmonischer Raum*,
wenn folgende Axiome gelten:

(1) **Trennungsaxiom:** $1 \in \boldsymbol{H}(X)$; es gibt eine Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ aus offenen Mengen von X, so daß $\boldsymbol{H}(V_i)$ die Punkte von V_i trennt.

(2) **Basisaxiom:** Es existiert eine Basis regulärer Mengen.

(3) **Konvergenzaxiom:** Das Supremum jeder auf einer offenen Menge U definierten isotonen Folge harmonischer Funktionen gehört zu $\boldsymbol{H}(U)$, falls es lokal beschränkt ist (*Konvergenzaxiom von Bauer*).

Für $U \subset X$ relativ kompakt und offen sei

$$H(U) := \{h \in C(\bar{U}) : h_{|U} \in \boldsymbol{H}(U)\}.$$

Für die folgenden Bemerkungen wird stets $H(U)$ als punktetrennend angenommen, was nach dem Trennungsaxiom für genügend kleine Mengen U gilt.

Die Begriffe Choquet-Rand $Ch(H(U))$ und Šhilov-Rand $\check{S}(H(U))$ werden analog zu ihrer Definition in 0.1. eingeführt. Die Vektorräume $H(U)$ sind simplizial, d. h. zu jedem Punkt aus U existiert genau ein Darstellungsmaß bezüglich $H(U)$, das von $Ch(H(U))$ getragen wird ([5]). Falls U regulär ist, also $H(U) \cong C_{\boldsymbol{R}}(U^*)$ und damit $Ch(H(U)) = \check{S}(\mathrm{H}(U)) = U^*$ gilt, wird dieses Darstellungsmaß für einen Punkt $x \in U$ durch die positive Linearform $f \mapsto H_f^U(x)$ auf $C(U^*)$ gegeben (Darstellungssatz von Riesz) und als das zu x und U gehörende *harmonische Maß* μ_x^U bezeichnet.

Die Vektorräume $H(U)$ sind Montelräume ([8], Ex. 11. 1. 1.).

Soweit nicht gesonderte Definitionen erfolgen, richtet sich die Bezeichnungsweise bei Begriffen aus der Theorie der Funktionenalgebren nach Gamelin ([9]) und Stout ([13]), bei Begriffen aus der Potentialtheorie nach Constantinescu-Cornea ([8]).

0. 3. Standardvoraussetzung

Im folgenden sei X ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis sowie $\boldsymbol{A}$ eine Garbe von Algebren stetiger komplexwertiger Funktionen auf X mit $1 \in \boldsymbol{A}(X)$.

Für jede offene relativ kompakte Teilmenge U von X sei

$$A(U) := \overline{\{f \in C_{\mathbf{C}}(\bar{U}) : f_{|U} \in \boldsymbol{A}(U)\}},$$

wobei der Abschluß bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $\bar{U}$ zu bilden ist. Falls dann $A(U)$ die Punkte von $\bar{U}$ trennt, ist $A(U)$ eine Funktionenalgebra.

$\boldsymbol{H}$ sei eine Garbe von Vektorräumen stetiger reeller Funktionen auf X, so daß $(X, \boldsymbol{H})$ ein harmonischer Raum ist.

Die durch $\boldsymbol{A}$ gegebene und die harmonische Struktur auf X seien durch folgende Beziehung miteinander verknüpft:

(A) Es gibt eine Basis $\mathfrak{L}$ der Topologie von X, bestehend aus regulären Mengen, so daß für alle $U \in \mathfrak{L}$ gilt:

$$\overline{Re\, A(U)} = H(U).$$

Bemerkungen

(1) Gemäß dem Trennungsaxiom kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß für alle $U \in \mathfrak{L}$ $H(U)$ die Punkte von $\bar{U}$ trennt und damit $A(U)$ eine Funktionenalgebra ist.

(2) Für alle offenen Mengen $U \subset X$ gilt $Re\, \boldsymbol{A}(U) \subset \boldsymbol{H}(U)$.

(3) Für $U \subset X$ offen sei

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(U) := \left\{ f \in C_{\mathbf{C}}(U) : \begin{array}{l} f \text{ lokal gleichmäßig approximier-} \\ \text{bar durch Funktionen aus } \boldsymbol{A} \end{array} \right\}$$

($\tilde{\boldsymbol{A}}(U)$ ist die Algebra der $\boldsymbol{A}(U)$-holomorphen Funktionen 1. Stufe auf U im Sinne von Rickart [12]).

$\tilde{\boldsymbol{A}}$ ist dann eine Garbe von Algebren mit den Eigenschaften

(a) $\overline{\boldsymbol{A}(U)} \subset \tilde{\boldsymbol{A}}(U)$,

(b) $A(U) \subset \{f \in C(\bar{U}) : f_{|U} \in \tilde{\boldsymbol{A}}(U)\}$,

(c) $\overline{Re\, A(U)} = \overline{Re\, \tilde{A}(U)} = H(U)$

jeweils für alle $U \in \mathfrak{L}$. Dabei ergibt sich (c), weil für $V \subset \bar{V} \subset U$ die harmonischen Maße $\mu^V_\cdot$ Darstellungsmaße sind, also $Ch(Re\, A(U)) \subset U^*$ gilt.

(4) Da die Räume $\boldsymbol{H}(U)$ Montelräume sind, enthält jede punktweise gegen eine Funktion h konvergente und beschränkte Folge

harmonischer Funktionen auf U eine lokal gleichmäßig gegen h konvergierende Teilfolge. Wegen $Re\, \boldsymbol{A}(U) \subset \boldsymbol{H}(U)$ gilt dann: ist $\{f_n\}_{n \in N}$ Folge in $\boldsymbol{A}(U)$, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert, so daß außerdem die Folge $\{|f_n|\}_{n \in N}$ beschränkt ist, dann kann man eine Teilfolge auswählen, deren Realteile und Imaginärteile lokal gleichmäßig konvergieren; also liegt f in $\tilde{\boldsymbol{A}}(U)$.

(5) Ohne Einschränkung können die Elemente der Basis als zusammenhängend angenommen werden. Sei nämlich $U \in \mathfrak{L}$ und V eine Zusammenhangskomponente von U. Dann ist V regulär ([8], Proposition 1.1.3.), und es gilt offensichtlich: $\overline{Re\, A(V)} \subset H(V)$. Sei umgekehrt $h \in H(V)$; dann existiert $h' \in H(U)$ mit $h'_{|V} = h$ (man setze $h_{|V^*}$ stetig fort auf $U^* \supset V^*$ und löse das Dirichletproblem). Zu h' existiert dann eine Folge $\{f_n\}_{n \in N}$ in $A(U)$, deren Realteile auf $\bar{U}$ gleichmäßig gegen h' konvergieren. Aus $A(U)_{|\bar{V}} \subset A(V)$ folgt dann $h \in \overline{Re\, A(V)}$.

(6) Sei X eine Riemannsche Fläche, $\boldsymbol{A}$ die Garbe der analytischen Funktionen und $\boldsymbol{H}$ die Garbe der üblichen harmonischen Funktionen. Dann erfüllt $(X, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{A})$ die Standardvoraussetzung. Gezeigt wird in dieser Arbeit, daß dies das einzige Beispiel ist, welches der Standardvoraussetzung genügt.

1. Elliptizität von $(X, \boldsymbol{H})$

Gezeigt wird, daß $(X, \boldsymbol{H})$ ein elliptischer harmonischer Raum ist, d. h. jeder Punkt x von X besitzt eine Umgebungsbasis regulärer Mengen, so daß für jede solche Umgebung U von x gilt:

$$T(\mu_x^U) = U^*,$$

wobei $T(\mu)$ für jedes Maß μ auf X den Träger von μ bezeichne. Daraus läßt sich ableiten, daß die Algebren $A(U)$ für $U \in \mathfrak{L}$ antisymmetrisch und analytisch sind. Dabei folgt die Antisymmetrie sogar direkt aus der Bedingung (A) und dem Konvergenzaxiom von Bauer; insbesondere sind auch die Algebren $\boldsymbol{A}(U)$ antisymmetrisch.

1. 1. Definition.

(1) Eine abgeschlossene Teilmenge E eines harmonischen Raumes heißt *harmonische Absorptionsmenge* ([8], S. 137), wenn für alle $x \in E$ und jede reguläre Umgebung V von x gilt:

$$T(\mu_x^V) \subset E.$$

(2) Eine abgeschlossene Teilmenge $E \subset \bar{U}$, $U \in \mathfrak{L}$, heißt *Absorptionsmenge* (bezüglich $A(U)$) ([14], S. 22), falls für alle $x \in E$ und alle $\mu \in \mathfrak{M}_x(\mathrm{A}(U))$ mit Träger in $\bar{U}$ gilt:

$$T(\mu) \subset E.$$

1.2. Bemerkung: Der Durchschnitt jeder Familie von (harmonischen) Absorptionsmengen ist wieder eine Absorptionsmenge. Insbesondere existiert also zu jedem Punkt x eine kleinste, den Punkt x enthaltende Absorptionsmenge, nämlich der Durchschnitt aller diesen Punkt enthaltenden (harmonischen) Absorptionsmengen.

1.3. Satz: Äquivalent sind:

(1) $(X, \boldsymbol{H})$ ist ein elliptischer harmonischer Raum.

(2) Für alle $U \in \mathfrak{L}$ ist U in einem Gleason-Part von $\Sigma(A(U))$ enthalten.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $U \in \mathfrak{L}$; da $(X, \boldsymbol{H})$ elliptisch ist, besitzt U keine nichttrivialen harmonischen Absorptionsmengen im harmonischen Raum $(U, \boldsymbol{H}_{|U})$. Wegen $\overline{Re\, A(U)} = H(U)$ gilt für alle $x \in \bar{U}$:

$$\mathfrak{M}_x(A(U)) = \mathfrak{M}_x(H(U)).$$

Seien $x, y \in U$; dann sind μ_x^U und μ_y^U die zugehörigen minimalen Darstellungsmaße bezüglich $H(U)$. μ_x^U und μ_y^U sind beiderseits absolut stetig (dies gilt sogar ohne die Voraussetzung der Regularität von U; [6], Proposition 1.2.); insbesondere sind diese Maße also nicht beideseits singulär. Nach [13], Theorem 16.6 folgt: x und y sind in einem Gleason-Part von $\Sigma(A(U))$ enthalten.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $U \in \mathfrak{L}$, also U in einem Gleason-Part von $\Sigma(A(U))$ enthalten. Damit gilt für je zwei Punkte $x, y \in U$: es gibt Darstellungsmaße μ_x und μ_y mit Träger in $\check{S}(A(U))$, die beiderseits absolut stetig sind mit beschränkter Radon-Nikodym-Ableitung ([13], Theorem 16.6); wegen der Simplizialität von $H(U)$ und wegen $\mathfrak{M}_x(A(U)) = \mathfrak{M}_x(H(U))$ sind dies genau die harmonischen Maße. Insbesondere gilt also:

$$T(\mu_x^U) = T(\mu_y^U).$$

Die harmonischen Maße μ_x^U haben also für alle $x \in U$ denselben Träger. Wegen $Ch(H(U)) = U^*$ folgt:

$$T(\mu_x^U) = U^* \text{ für alle } x \in U.$$

Also ist $(X, \boldsymbol{H})$ elliptisch. $\circ$

1.4. Bemerkung: Für Mengen $U \in \mathfrak{L}$ gilt:

$$\overline{Re\, A(U)} = H(U) \cong C_{\boldsymbol{R}}(U^*).$$

Die Realteile von $A(U)$ liegen also dicht in den stetigen reellen Funktionen auf $\check{S}(A(U)) = U^*$. $A(U)$ ist somit eine *Dirichlet-Algebra* auf U^*, und es gilt:

$$\{\mu \in \mathfrak{M}_x(A(U)) : T(\mu) \subset \check{S}(A(U))\} = \{\mu_x^U\}$$

für alle $x \in U$. Jedes Maß μ_x^U ist also insbesondere ein *Jensenmaß* für x ([13], Definition 11.6, Theorem 11.10).

1.5. Bezeichnungen: Sei $U \in \mathfrak{L}$, $x \in U$.

(1) $\Pi(x) := \{\varphi \in \Sigma(A(U)) : \|\varphi - \tau_x\| < 2\}$
$\Pi(x)$ ist also der x enthaltende Gleason-Part von $\Sigma(A(U))$.

(2) $P(x) := \Pi(x) \cap U$.

(3) Mit A_x wird die kleinste x enthaltende Absorptionsmenge (bzgl. $A(U)$) bezeichnet.

1.6. Satz: Für alle $U \in \mathfrak{L}$ und alle $x \in U$ gilt:

$$A_x \cap U = P(x).$$

Beweis: „$\supset$": Sei $y \in P(x)$. Falls $y \notin A_x$, existiert eine reguläre Umgebung V von y, $V \subset \overline{V} \subset [A_x \cap U$. Zum Darstellungsmaß μ_y^V gibt es dann ein Maß $\nu \in \mathfrak{M}_x(A(U))$, so daß μ_y^V absolut stetig ist bzgl. ν ([13], Theorem 16.6). Dies ist ein Widerspruch zu $T(\mu_y^V) \subset [A_x$ und $T(\nu) \subset A_x$. „$\subset$": Wiederum nach [13], Theorem 16.6, genügt es zu zeigen, daß für jedes $y \in A_x \cap U$ die minimalen Darstellungsmaße μ_x^U und μ_y^U nicht beiderseitig singulär sind.

Sei dazu $K \subset A_x \cap U^*$, K kompakt, $\mu_x^U(K) = 0$. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} \mathrm{h}\colon \bar{U} &\to \boldsymbol{R}^+ \\ y &\mapsto \mu_y(K), \end{aligned}$$

wobei

$$\mu_y = \begin{cases} \mu_y^U & \text{falls } y \in U \\ \varepsilon_y & \text{falls } y \in U^*. \end{cases}$$

Sei $\{\varphi_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ Folge aus $C_{\boldsymbol{R}}(U^*)$, φ_n monoton fallend gegen die charakteristische Funktion 1_K von K; sei $\tilde{\varphi}_n$ definiert durch

$$\tilde{\varphi}_n(y) := \begin{cases} \varphi_n(y) & \text{falls } y \in U^* \\ H_{\varphi_n}^U(y) & \text{falls } y \in U, \end{cases}$$

also $\tilde{\varphi}_n \in H(U) = \overline{Re\, A(U)}$.

Es gilt dann:

$$\inf_{n \in \boldsymbol{N}} \tilde{\varphi}_n(y) = \begin{cases} 1_K(y) & \text{falls } y \in U^* \\ \inf\limits_{n \in \boldsymbol{N}} \mu_y^U(\varphi_n) = \mu_y^U(K) & \text{falls } y \in U, \end{cases}$$

also $\inf\limits_{n \in \boldsymbol{N}} \tilde{\varphi}_n = h$. Aus dem Konvergenzaxiom folgt:

$$h_{|U} \in \boldsymbol{H}(U).$$

Sei $B := A_x \cap \overline{\{y \in \bar{U} : h(y) = 0\}}$. Da $h(x) = \mu_x^U(K) = 0$, gilt $x \in B$. Gezeigt wird nun, daß B Absorptionsmenge ist. Sei dazu $z \in B$, $\mu \in \mathfrak{M}_z(A(U))$, $T(\mu) \subset \bar{U}$.

1. Fall: $z \in U^*$; wegen $U^* = Ch(A(U))$ folgt $\mu = \varepsilon_z$, also $T(\mu) \subset B$.

2. Fall: $z \in U$; da h auf U harmonisch, also stetig ist, gilt:

$$\overline{\{y \in \bar{U} : h(y) = 0\}} \cap U = \{y \in \bar{U} : h(y) = 0\} \cap U.$$

Darüber hinaus gilt $T(\mu) \subset A_x$ wegen $z \in A_x$. Sei $M \subset \complement B$, M kompakt und $\mu(M) > 0$; es gilt:

$$\mu(M) = \mu(M \cap T(\mu) \cap U^*) + \mu(M \cap T(\mu) \cap U).$$

Falls $\mu(M \cap T(\mu) \cap U^*) > 0$, folgt wegen $h > 0$ auf M:

$$M \cap T(\mu) \cap U^* \subset K,$$

also

$$\mu(M \cap T(\mu) \cap U^*) \leqslant \mu(K) \leqslant \int \tilde{\varphi}_n \, d\mu = \tilde{\varphi}_n(z)$$

für alle $n \in \boldsymbol{N}$. Da $\lim\limits_{n \to \infty} \tilde{\varphi}_n(z) = h(z) = 0$, gilt $\mu(M \cap T(\mu) \cap$ $\cap U^*) = 0$ im Widerspruch zur Annahme.

Falls $\mu(M \cap T(\mu) \cap U) > 0$, existiert eine kompakte Menge $M' \subset M \cap T(\mu) \cap U$ mit $\mu(M') > 0$. Aus der Stetigkeit von h auf U folgt die Existenz eines $\varepsilon > 0$ mit $h > \varepsilon$ auf M'; damit ist auch $\tilde{\varphi}_n > \varepsilon$ auf M' für alle $n \in \boldsymbol{N}$. Es ist dann

$$\tilde{\varphi}_n(z) = \int_{M'} \tilde{\varphi}_n \, d\mu + \int_{\complement M'} \tilde{\varphi}_n \, d\mu \geqslant \varepsilon \cdot \mu(M') > 0.$$

Andererseits ist aber

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\tilde{\varphi}_n) = \lim_{n \to \infty} \tilde{\varphi}_n(z) = h(z) = 0$$

im Widerspruch zur Annahme.

Aus Fall 1 und Fall 2 folgt also insgesamt – zusammen mit der mehrfach benutzten Regularität von μ –, daß $T(\mu)$ Teilmenge von B ist; also ist B eine Absorptionsmenge mit $x \in B \subset A_x$.

Wegen der Minimalität von A_x folgt $A_x = B$, damit auch $\mu_y^U(K) = h(y) = 0$ für alle $y \in A_x \cap U$. Da K als beliebige μ_x^U-Nullmenge gewählt war, folgt aus der Regularität von μ_x^U, daß jedes Maß μ_y^U für $y \in A_x \cap U$ absolut stetig bzgl. μ_x^U ist. Insbesondere sind die Maße also nicht beiderseitig singulär. $\circ$

1.7. Korollar: Sei $U \in \mathfrak{L}$, $x \in U$. Dann ist $P(x)$ harmonische Absorptionsmenge im harmonischen Raum $(U, \boldsymbol{H}_{|U})$.

Beweis: Nach Satz 1.6. ist $P(x)$ abgeschlossen in U; die Behauptung ergibt sich dann sofort aus der Definition einer harmonischen Absorptionsmenge und der Tatsache, daß A_x Absorptionsmenge ist. Ist nämlich $y \in V \subset \bar{V} \subset U$, V regulär, so ist $\mu_y^V \in \mathfrak{M}_y(A(U))$. Für $y \in A_x$ gilt also:

$$T(\mu_y^V) \subset A_x \cap U = P(x). \circ$$

Korollar 1.7. zeigt, daß die Mengen $P(x) = \Pi(x) \cap U, x \in U$, eine Zerlegung von U in harmonische Absorptionsmengen liefern mit der Eigenschaft:

$$P(x) \cap P(y) = \emptyset \quad \text{falls } y \notin \mathrm{P}(x).$$

1.8. Satz: Sei $U \in \mathfrak{L}$, $x \in U$; dann gilt: $P(x) = U$.

Beweis: Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Repräsentantensystem der Gleason-Parts von $A(U)$, die Punkte aus U enthalten, $\{x_i : i \in I\} \subset U$. Dann gilt:

$$\bigcup_{i \in I} P(x_i) = U.$$

Die Familie $(P(x_i))_{i \in I}$ besteht dann aus paarweise disjunkten harmonischen Absorptionsmengen und ist damit lokal endlich ([7], Corollary 1.3.). Zu $x \in U$ existiert also eine zusammenhängende Umgebung V, $V \subset \bar{V} \subset U$, so daß $V \cap P(x_i) \neq \emptyset$ nur für endlich viele $i \in I$ gilt.

Da $(P(x_i))_{i \in I}$ die Menge U überdeckt, gibt es $i_1, \ldots, i_n \in \mathrm{I}$ mit

$$V \subset \bigcup_{j=1}^{n} P(x_{i_j}).$$

Da $P(x_i)$ abgeschlossen ist in U, ist auch jede Menge $P(x_i) \cap V$ abgeschlossen in V, damit aber wegen des Zusammenhangs von V:

$$V = P(x_i) \cap V$$

für genau ein $i \in I$, $i \in \{i_1, \ldots, i_n\}$.

Insbesondere gilt also $x \in P(x_i)$, damit $P(x_i) = P(x)$. Dann ist $P(x_i)$ offene Teilmenge von U. Da U als zusammenhängend vorausgesetzt war, gilt die Behauptung. $\circ$

1.9. Korollar: $(X, \boldsymbol{H})$ ist ein elliptischer harmonischer Raum.

Beweis: Aus Satz 1.8. folgt die Gültigkeit von (2) in Satz 1.3. ○

1.10. Korollar: U ist abgeschlossen in $\Pi(x)$ ($x \in U$).

Beweis: $\bar{U}$ ist abgeschlossen in $\Sigma(A(U))$ und es ist $U = \bar{U} \cap \Pi(x)$ nach Satz 1.8.. ○

Aus dem bisher Gezeigten ergeben sich weitere Eigenschaften der Funktionenalgebren $A(U)$.

1.11. Satz: Für alle $U \in \mathfrak{L}$ ist $A(U)$ eine antisymmetrische Funktionenalgebra, d. h. $A(U) \cap C_{\boldsymbol{R}}(\bar{U}) = \boldsymbol{R}$.

Beweis: Sei $U \in \mathfrak{L}$. Wenn $A(U)$ nicht antisymmetrisch ist, existiert $f \in A(U) \cap Re\, A(U)$, f nicht konstant. Sei $x \in U$,

$$g := f - f(x) \in A(U) \cap Re\, A(U).$$

Dann gilt:

$$g^2 \in A(U) \cap Re\, A(U)^+,$$

ohne Einschränkung noch $g^2 \leqslant 1$.

Die Funktion $-g^2 + 1$ gehört also zu $A(U)$ und ist „*Peak-Funktion*" für die Menge $\{y \in \bar{U} : f(y) = f(x)\}$, d. h.

$$-g^2(y) + 1 \begin{cases} \geqslant 0 & \text{für alle } y \in \bar{U} \\ = 1 & \text{für alle } y \in \{z \in \bar{U} : f(z) = f(x)\} \\ < 1 & \text{für alle } y \in \bar{U} \setminus \{z \in \bar{U} : f(z) = f(x)\}. \end{cases}$$

Die Folge $\{(-g^2 + 1)^n{}_{|U}\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ ist also absteigende Folge positiver harmonischer Funktionen auf U; nach dem Konvergenzaxiom von Bauer folgt:

$$\tilde{g} := \inf_{n \in \boldsymbol{N}} (-g^2 + 1)^n{}_{|U} \in \boldsymbol{H}(U).$$

Wegen $\tilde{g}(U) \subset \{0, 1\}$ folgt dann aus Stetigkeitsgründen und dem Zusammenhang von U:

$$-g^2 + 1 \equiv 1 \text{ auf } U, \text{ also auch auf } \bar{U},$$

im Widerspruch zur Annahme, daß f nicht konstant ist. Also ist $A(U)$ eine antisymmetrische Algebra. ○

1.12. **Bemerkung:** Aus Satz 1.11. ergibt sich unmittelbar, daß für jedes offene Gebiet U die Algebra $A(U)$ antisymmetrisch ist. Man hat nur zu beachten, daß für $V \subset \bar{V} \subset U$ gilt: $A(U)_{|\bar{V}} \subset A(V)$.

1.13. **Satz:** Für alle $U \in \mathfrak{L}$ ist $A(U)$ eine analytische Funktionenalgebra, d. h. die Nullstellen in U jeder nicht konstanten Funktion aus $A(U)$ sind isoliert.

Beweis: Sei Π_U der Gleason-Part von $\sum (A(U))$, der U enthält. Da $A(U)$ eine Dirichlet-Algebra ist, existiert nach dem Einbettungssatz (s. 0.1.) eine stetige bijektive Abbildung $\Phi_U: D \to \Pi_U$ (wobei $D = \{z \in \mathbf{C}: |z| < 1\}$), so daß für alle $f \in A(U)$ die Komposition $\hat{f} \circ \Phi_U$ holomorph ist auf D. Falls sich also die Nullstellen von f in U häufen, folgt aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen sofort $\hat{f} \circ \Phi_U \equiv 0$, also $f \equiv 0$ auf U und damit auf $\bar{U}$.$\circ$

1.14. **Bemerkung:** Auch Satz 1.13. erlaubt eine unmittelbare Übertragung auf die Algebren $A(U)$, $U \subset X$ zusammenhängend: die Nullstellen jeder in U nicht konstanten Funktion $f \in A(U)$ sind isoliert.

2. Konstruktion einer analytischen Struktur auf X

Seien $U \in \mathfrak{L}$ und Π_U der U enthaltende Gleason-Part von $\Sigma(A(U))$. Da $A(U)$ eine Dirichlet-Algebra ist, existiert nach dem in 0.1. zitierten Einbettungssatz eine stetige bijektive Abbildung $\Phi_U: D \to \Pi_U$, so daß $\hat{f} \circ \Phi_U$ holomorph ist für alle $f \in A(U)$. Gezeigt wird im folgenden, daß die Umkehrung dieser Einbettung Φ_U auf U stetig und ihr Real- und Imaginärteil dort harmonisch sind. Verwendet wird dazu die in [10] von K. Hoffman gegebene Beschreibung von Φ_U für logmodulare Algebren (s. Satz 2.3.).

Für $\varphi \in \Pi_U$ sei μ_φ das zugehörige (eindeutig bestimmte) Randmaß, also $\mu_\varphi \in \mathfrak{M}_\varphi(A(U))$, $T(\mu_\varphi) = U^*$. Mit $H^2(\mu_\varphi)$ wird der Abschluß von $A(U)$ in $L^2(\mu_\varphi)$ bezeichnet; ferner sei

$$H^2_{\mu_\varphi} := \{f \in H^2(\mu_\varphi) : \int f\, d\mu_\varphi = 0\}.$$

Sei $\psi \in \Pi_U$, $\psi \neq \varphi$.

2.1. Lemma: Die Abbildung $\tilde{\varphi} : f \mapsto \int f\, d\mu_\varphi$ von $H^2(\mu_\varphi)$ in $\boldsymbol{C}$ ist ein beschränktes multiplikatives lineares Funktional auf $H^2(\mu_\varphi)$, deren Restriktion auf $A(U)$ mit φ übereinstimmt.

Beweis: Die Linearität von $\tilde{\varphi}$ ist klar. Seien $f, g \in H^2(\mu_\varphi)$, $\{f_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$, $\{g_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ Folgen aus $A(U)$ mit

$$f_n \xrightarrow{n \to \infty} f,\ g_n \xrightarrow{n \to \infty} g \text{ in } L^2(\mu_\varphi).$$

Da μ_φ endliches Maß ist, konvergieren dann f_n bzw. g_n gegen f bzw. g auch in $L^1(\mu_\varphi)$ und die Folge $\{f_n \cdot g_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ gegen $f \cdot g$:

$$\begin{aligned} &\int |fg - f_n g_n|\, d\mu_\varphi = \int |fg - f_n g + f_n g - f_n g_n|\, d\mu_\varphi \\ &\leqslant \int |fg - f_n g|\, d\mu_\varphi + \int |f_n g - f_n g_n|\, d\mu_\varphi \\ &\leqslant \|g\|_2 \cdot \|f - f_n\|_2 + \|f_n\|_2 \cdot \|g - g_n\|_2 \xrightarrow{n \to \infty} 0, \end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die Norm in $L^2(\mu_\varphi)$ bezeichnet. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(f \cdot g) &= \int f \cdot g\, d\mu_\varphi = \lim_{n \to \infty} \int f_n g_n\, d\mu_\varphi \\ &\lim_{n \to \infty} \varphi(f_n) \cdot \varphi(g_n) = \tilde{\varphi}(f) \cdot \tilde{\varphi}(g). \end{aligned}$$

Die Beschränktheit von $\tilde{\varphi}$ auf $H^2(\mu_\varphi)$ folgt ebenso aus der Hölderschen Ungleichung:

$$|\tilde{\varphi}(f)| = |\int f\, d\mu_\varphi| \leqslant \int |f|\, d\mu_\varphi \leqslant \|f\|_2$$

also $\|\tilde{\varphi}\| = 1.$ ○

2.2. Bemerkung: Da φ und ψ in einem Gleason-Part liegen, sind die minimalen Maße μ_φ und μ_ψ beiderseits absolut stetig mit beschränkter Radon-Nikodym-Ableitung ([13], Theorem 16.6). Folglich gilt:

$$|\psi(f)| \leqslant K \cdot |\varphi(f)| \leqslant K \cdot \|f\|_2$$

für alle $f \in A(U)$ und geeignetes $K \in \boldsymbol{R}^+$. ψ läßt sich also zu einem stetigen multiplikativen linearen Funktional auf $H^2(\mu_\varphi)$ fortsetzen.

Der folgende Satz dient der Beschreibung der Einbettungsabbildung $\Phi_U : D \to \Pi_U$.

2.3. Satz: ([10], Theorem 7.2). Sei G die orthogonale Projektion der 1 auf den abgeschlossenen Teilraum von $H^2(\mu_\varphi)$, der von $\ker \psi = \{f \in A(U) : \psi(f) = 0\}$ aufgespannt wird. Dann gilt:

$$\int G \, d\mu_\varphi = k^2, \ 0 < k < 1.$$

Sei
$$Z := \frac{1}{k} \cdot \frac{k^2 - G}{1 - G}.$$

Dann gilt:

(1) $Z \in H^2(\mu_\varphi)$, $|Z| = 1$ μ_φ-fast sicher;

(2) $\mu_\psi = \dfrac{|1 - G|^2}{1 - k^2} \mu_\varphi = \dfrac{1 - k^2}{|1 - kZ|^2} \mu_\varphi$;

(3) $Z \cdot H^2(\mu_\varphi) = H^2_{\mu_\psi}$;

(4) für $f \in H^2(\mu_\varphi)$, $a_n := \int \bar{Z}^n \cdot f \, d\mu_\varphi$ gilt:

$$\psi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (\psi(Z))^n.$$

Beweis: [10], Seite 309ff. ○

Nach Bemerkung 2.2 lassen sich alle $\psi \in \Pi_U$ eindeutig zu einem stetigen multiplikativen linearen Funktional auf $H^2(\mu_\varphi)$ fortsetzen. Damit definiert

$$\hat{Z} : \Pi_U \to \mathbf{C}$$
$$\psi \mapsto \hat{Z}(\psi) := \tilde{\psi}(Z)$$

eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften ([10], Theorem 7.4):

(1) $\hat{Z}$ ist injektiv auf D;

(2) $\hat{Z}^{-1} : D \to \Pi_U$ ist stetig, bijektiv und es gilt: $\hat{f} \circ \hat{Z}^{-1}$ ist holomorph für alle $f \in A(U)$.

Durch $\Phi_U := \hat{Z}^{-1}$ wird also die gewünschte analytische Struktur in Π_U eingebettet.

2.4. Satz: Die Einschränkung F_U von Φ_U^{-1} auf U ist stetig, insgesamt ist also F_U ein Homöomorphismus. Ferner sind $\operatorname{Re} F_U$ und $\operatorname{Im} F_U$ harmonisch auf U.

Beweis: Da $Z \in H^2(\mu_\varphi)$, existiert eine Folge $\{f_n\}_{n \in N}$ in $A(U)$, die in $L^2(\mu_\varphi)$ gegen Z konvergiert. Da μ_φ endlich ist, konvergiert die Folge auch in $L^1(\mu_\varphi)$ gegen Z. Ferner sind für beliebiges $\psi \in \Pi_U$ die minimalen Maße μ_φ und μ_ψ beiderseits absolut stetig mit beschränkter Radon-Nikodym-Ableitung, also $L^1(\mu_\varphi) \cong$ $\cong L^1(\mu_\psi)$ und es gilt:

$$f_n \xrightarrow{n \to \infty} Z \text{ in } L^1(\mu_\psi) \text{ für alle } \psi \in \Pi_U.$$

Da das Integral stetig ist auf $L^1(\mu_\psi)$, folgt:

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu_\psi = \int Z \, d\mu_\psi.$$

Dies liefert zusammen mit der Stetigkeit von $\tilde{\psi}$ auf $H^2(\mu_\varphi)$ (Lemma 2.1.):

$$\tilde{\psi}(Z) = \lim_{n \to \infty} \psi(f_n) = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu_\psi = \int Z d\mu_\psi.$$

Insbesondere gilt also für alle $x \in U$:

$$F_U(x) = \int Z \, d\mu_x^U.$$

Wegen $|Z| = 1$ μ_φ-fast überall, also μ_x^U-fast überall für alle $x \in U$, folgt ([8], Proposition 1.1.4.):

$$x \mapsto \int \operatorname{Re} Z \, d\mu_x^U$$

und

$$x \mapsto \int \operatorname{Im} Z \, d\mu_x^U$$

sind harmonisch auf U, also auch stetig.
Dies zeigt, daß F_U auf U stetig ist. ○

2.5. **Bemerkung:** Der Beweis von Satz 2.4. zeigt, daß F_U punktweiser Limes von Funktionen aus $A(U)$ ist:

$$F_U(x) = \tilde{\tau}_x(Z) = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu_x^U = \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

wenn dabei $\{f_n\}_{n \in N}$ Folge aus $A(U)$ ist, die in $L^2(\mu_\varphi)$ gegen Z konvergiert.

2.6. **Satz:** $(X, \boldsymbol{H})$ genügt dem Konvergenzaxiom von Doob: die obere Einhüllende einer isotonen Folge von harmonischen Funktionen auf einer offenen Teilmenge U von X ist harmonisch, wenn sie endlich ist auf einer dichten Teilmenge von U.

Beweis: Sei $U \subset X$ offen.

(1) Seien $h \in \boldsymbol{H}(U)$ und $V \in \mathfrak{L}$, $V \subset \bar{V} \subset U$. Dann gilt:

$$h_{|\bar{V}} \in H(V) = \overline{\operatorname{Re} A(V)}.$$

Sei $\{\operatorname{Re} f_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ Folge in $\operatorname{Re} A(V)$, die auf $\bar{V}$ gleichmäßig gegen $h_{|\bar{V}}$ konvergiert. Dann konvergiert die Folge $\{\operatorname{Re} \hat{f}_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ gleichmäßig auf $\Sigma(A(V))$ gegen eine stetige Funktion $\hat{h}$ mit $\hat{h}_{|\bar{V}} = h_{|\bar{V}}$. Die Folge $\{\operatorname{Re} f_n \circ \Phi_V\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ ist damit eine Folge harmonischer Funktionen auf D, die dort gleichmäßig gegen $\hat{h} \cdot \Phi_V$ konvergiert. Die Funktion $\hat{h} \cdot \Phi_V$ ist also stetig und harmonisch auf D.

(2) Sei nun $\{h_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ isotone Folge aus $\boldsymbol{H}(U)$, $h := \sup\limits_{n \in \boldsymbol{N}} h_n$ sei endlich auf einer dichten Teilmenge von U.
Sei $V \in \mathfrak{L}$, $V \subset \bar{V} \subset U$. Mit den Bezeichnungen von (1) ist dann $\{\hat{h}_n \circ \Phi_V\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ eine isotone Folge harmonischer Funktionen auf D und $\hat{h} \circ \Phi_V := \sup\limits_{n \in \boldsymbol{N}} h_n \circ \Phi_V$ ist endlich in mindestens einem Punkt von D. Im klassischen Fall gilt das Konvergenzaxiom von Brelot, d. h. das Supremum einer isotonen Folge harmonischer Funktionen auf D ist bereits dann harmonisch, wenn es in einem Punkt endlich ist. Folglich ist $\hat{h} \circ \Phi_V$ stetig auf D, insbesondere also lokal beschränkt.

Nach Satz 2.4. ist F_V ein Homöomorphismus, damit

$$(\hat{h} \circ \Phi_{V | F_V(V)}) \circ F_V = \hat{h} \circ F_V^{-1} \circ F_V = h$$

eine stetige Funktion auf V. Insgesamt ist damit h lokal beschränkt auf U, nach dem Konvergenzaxiom von Bauer also harmonisch auf U. ○

2.7. **Bemerkung:** Aus der Elliptizität von $(X, \boldsymbol{H})$ und dem Konvergenzaxiom von Doob ergibt sich nunmehr eine weitgehende Verschärfung von Korollar 1.9.: $(X, \boldsymbol{H})$ ist ein Brelot-Raum ([1], Satz 1.5.6.).

3. Charakterisierung der Gleason-Parts Π_U

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß für die Mengen U der Basis $\mathfrak{L}$ gilt: $\Pi_U = U$. Die Beweise beruhen hauptsächlich auf Ergebnissen der Potentialtheorie in elliptischen Räumen.

Sei $U \in \mathfrak{L}$; die Bezeichnungen des vorigen Abschnittes werden weiterverwendet; insbesondere sei F_U die Restriktion der Einbettungsabbildung Φ_U^{-1} auf U.

3.1. Satz: Es gilt: $F_U \in \tilde{A}(U)$.

Beweis: Sei $x_0 \in U$. Nach Satz 2.4. und Bemerkung 2.5. existiert eine Folge $\{f_n\}_{n \in N}$ in $A(U)$ mit den Eigenschaften:

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = F_U(x) = \int Z \, d\mu_x^U$ für alle $x \in U$;

(2) $f_n \xrightarrow{n \to \infty} Z$ in $L^1(\mu_x^U)$ für alle $x \in U$.

Durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge, die wieder mit $\{f_n\}_{n \in N}$ bezeichnet wird, kann also erreicht werden:

$$\|f_n - Z\|_1 < 2^{-n},$$

wobei $\|\cdot\|_1$ die Norm in $L^1(\mu_{x_0}^U)$ bezeichne.

Sei
$$F := \sum_{n \in N} |f_n - Z|.$$

Dann gilt:
$$\int F \, d\mu_{x_0}^U = \int \sum_{n \in N} |f_n - Z| \, d\mu_{x_0}^U$$
$$= \sum_{n \in N} \int |f_n - Z| \, d\mu_{x_0}^U \leqslant \sum_{n \in N} 2^{-n} \leqslant 2.$$

Folglich liegt F in $L^1(\mu_{x_0}^U)$ und damit in $L^1(\mu_x^U)$ für alle $x \in U$, da die harmonischen Maße alle gegenseitig absolut stetig sind. F ist also fast sicher endlich bezüglich jedes harmonischen Maßes μ_x^U, $x \in U$.

Damit ist die Funktion

$$H_F^U : x \mapsto \int F \, d\mu_x^U$$

harmonisch auf U (Satz 2.6., [1], Satz 1.1.8). Nun gilt:

$$|\operatorname{Re} f_n - \operatorname{Re} Z| \leqslant |f_n - Z| \leqslant F,$$

also
$$-\operatorname{Re} Z - F \leqslant \operatorname{Re} f_n \leqslant \operatorname{Re} Z + \mathrm{F}.$$

Durch Integration dieser Ungleichung nach μ_x^U ergibt sich:

$$-\int \operatorname{Re} Z \, d\mu_x^U - H_F^U(x) \leqslant \operatorname{Re} f_n(x) \leqslant \int \operatorname{Re} Z \, d\mu_x^U + H_F^U(x),$$

also $-\operatorname{Re} F_U(x) - H_F^U(x) \leqslant \operatorname{Re} f_n(x) \leqslant \operatorname{Re} F_U(x) + H_F^U(x)$ für alle $x \in U$.

Da F_U und H_F^U auf U stetig sind, ist also die Folge $\{\operatorname{Re} f_n\}_{n\in N}$ auf U lokal gleichmäßig beschränkt und konvergiert dort punktweise gegen $\operatorname{Re} F_U$. In 0.2. wurde bereits bemerkt, daß die Räume $\boldsymbol{H}(V)$, $V \subset X$ offen, Monteläume sind, also jede lokal beschränkte und punktweise konvergente Folge eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält. Ohne Einschränkung kann daher angenommen werden, daß $\operatorname{Re} f_n$ auf U lokal gleichmäßig gegen F_U konvergiert.

Analog folgert man diese Eigenschaft für die Folge der Imaginärteile; insgesamt gilt also: f_n konvergiert gegen F_U lokal gleichmäßig auf U. Nach Definition von $\tilde{\boldsymbol{A}}(U)$, (0.3. Bemerkung 3) gehört also F_U zu $\tilde{\boldsymbol{A}}(U)$, genauer sogar zum Abschluß $\overline{\boldsymbol{A}(U)}$ von $\boldsymbol{A}(U)$ bezüglich lokal gleichmäßiger Konvergenz.$_\circ$

Zum Beweis von $F_U(U) = D$ benötigen wir die folgenden Hilfssätze.

3.2. Lemma: Sei $f \in \overline{\boldsymbol{A}(U)}$, f nicht konstant. Dann ist auch $|f|$ nicht konstant.

Beweis: Sei $f = u + iv$, f nicht konstant.
Annahme: es gibt $\alpha \in \boldsymbol{R}^+$ mit $|f(x)| = \alpha$ für alle $x \in U$.

Dann gilt $\qquad |f|^2 = u^2 + v^2 = \alpha^2,$

also $\qquad u^2 = \alpha^2 - v^2.$

u^2 und v^2 sind subharmonische Funktionen; sei nämlich $x \in U$, $V \in \mathfrak{L}$, $x \in V \subset \overline{V} \subset U$; aus

$$0 \leqslant \int (u - u(x))^2 \, d\mu_x^V \leqslant \int u^2 \, d\mu_x^V - u^2(x)$$

folgt: $\qquad \int u^2 \, d\mu_x^V \geqslant u^2(x);$

analog ergibt sich die Subharmonizität von v^2. Aus $u^2 = \alpha^2 - v^2$ folgt andererseits, daß u^2 auch superharmonisch ist, insgesamt also $u^2 \in \boldsymbol{H}(U)$. $(u - u(x))^2$ ist somit eine positive harmonische Funktion auf U mit einer Nullstelle in x. Da $(X, \boldsymbol{H})$ elliptisch ist, folgt $u \equiv u(x)$, d. h. u ist konstant auf U; dann gilt dies aber auch für v und damit für f im Widerspruch zur Voraussetzung.$_\circ$

3.3. Lemma: Sei $f \in \overline{\boldsymbol{A}(U)}$. Dann ist $|f|$ subharmonisch auf U.

Beweis: Sei $f = u + iv$. Aus der Darstellung

$$|u| = \sup(u, 0) - \inf(u, 0)$$

folgt die Subharmonizität von $|u|$, da das Supremum zweier subharmonischer Funktionen wieder subharmonisch ist.

Es gilt dann für alle $V \in \mathfrak{L}$, $V \subset \bar{V} \subset U$, $x \in V$:

$$|u(x)| \leqslant \int |u| \, d\mu_x^V \leqslant \int |f| \, d\mu_x^V.$$

Da die die Subharmonizität von $|f|$ kennzeichnende Ungleichungim Fall $f(x) = 0$ trivial ist, kann also $f(x) \neq 0$ und ohne Einschränkung sogar $f(x) = u(x) = 1$ angenommen werden (durch Übergang zu $f/f(x)$).

Dann folgt aus der Ungleichung für $|u|$

$$|f(x)| \leqslant \int |f| \, d\mu_x^V,$$

also die Subharmonizität von $|f|$ auf U.○

3.4. Satz: $F_U(U)$ ist offen Teilmenge von D.

Beweis: (1) Sei $K \subset D$, K kompakt. Da Φ_U stetig ist, ist $\Phi_U(K)$ kompakte Teilmenge von Π_U. Nach Korollar 1.10. ist U abgeschlossen in Π_U. Folglich ist $\Phi_U(K) \cap U$ kompakt in Π_U und damit in U. Dies zeigt insgesamt, daß $F_U^{-1}(K)$ kompakt ist in U für alle $K \subset D$, K kompakt.

(2) Sei $\alpha := \sup\limits_{x \in U} |F_U(x)|$; ferner sei $x_0 \in U$, $F_U(x_0) = z_0 \in D$.

Dann gilt:
$$|F_U(x_0)| < \alpha.$$

Ist nämlich $|F_U(x_0)| = \alpha$, dann ist $s := \alpha - |F_U|$ eine positive superharmonische Funktion auf U mit einer Nullstelle in x_0; aus der Elliptizität von $(X, \boldsymbol{H})$ folgt dann:

$$|F_U| = \alpha,$$

mit Lemma 3.2. somit ein Widerspruch, da F_U nicht konstant ist.

Sei $\varrho > 0$ so gewählt, daß

$$|F_U(x_0)| + 2\varrho < \alpha$$

und
$$\overline{D(z_0, 2\varrho)} = \{w \in \boldsymbol{C} : |w - z_0| \leqslant 2\varrho\} \subset D.$$

Sei $z \in D(z_0, \varrho) = \{w \in \boldsymbol{C} : |w - z_0| < \varrho\}$.

Annahme: $z \notin F_U(U)$.

Sei dann $\quad V_\varrho := \{x \in U : |F_U(x) - z_0| < 2\varrho\}$.

Wegen der Stetigkeit von F_U ist V_ϱ offene Teilmenge von U; V_ϱ ist auch relativ kompakt in U, denn $F_U^{-1}\left(\overline{D(z_0, 2\varrho)}\right)$ ist kompakt in U nach (1) und es ist $V_\varrho \subset F_U^{-1}(D(z_0, 2\varrho))$.
Damit folgt:

$$V_\varrho^* \subset \{x \in U : |F_U(x) - z_0| = 2\varrho\}.$$

Sei $R : \boldsymbol{C} \setminus \{z\} \to \boldsymbol{C}$ definiert durch

$$R(w) := \frac{1}{w - z}.$$

R ist holomorph in $\boldsymbol{C} \setminus \{z\}$, also dort lokal gleichmäßig approximierbar durch eine Folge $\{p_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ von Polynomen. Damit ist die Funktion $F := R \circ F_U = \lim\limits_{n \to \infty} p_n \circ F_U$ aus $\overline{\boldsymbol{A}(U)}$, da $p \circ F_U \in \overline{\boldsymbol{A}(U)}$ für jedes Polynom p und $z \notin F_U(U)$ nach Annahme.

Für $x \in U$ ist dann

$$F(x) = \frac{1}{F_U(x) - z},$$

also
$$|F(x_0)| = \frac{1}{|F_U(x_0) - z|} = \frac{1}{|z_0 - z|}.$$

Gemäß Lemma 3.3 ist $|F|$ subharmonisch auf U, aus dem Minimumprinzip folgt somit

$$|F(x_0)| \leqslant \sup_{x \in V_\varrho^*} |F(x)|,$$

also
$$\frac{1}{|z_0 - z|} \leqslant \sup_{x \in V_\varrho^*} |F(x)| = \sup_{x \in V_\varrho^*} \frac{1}{|F_U(x) - z|}.$$

Da $z \in D(z_0, \varrho)$ und $|F_U(x) - z_0| = 2\varrho$ für Punkte $x \in V_\varrho^*$ gilt, ergibt sich:

$$\frac{1}{|z_0 - z|} \leqslant \sup_{x \in V_\varrho^*} \frac{1}{|F_U(x) - z|} < \frac{1}{|F_U(x_0) - z|} = \frac{1}{|z_0 - z|}.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $z \notin F_U(U)$. $\circ$

3.5. Satz: $F_U(U) = D$.

Beweis: Nach Korollar 1.10. ist U abgeschlossen in Π_U. Satz 3.4. zeigt, daß U auch offen ist in Π_U. Da Π_U als stetiges Bild von D zusammenhängend ist, folgt die Behauptung.$_\circ$

4. Beschreibung von $(X, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{A})$

4.1. Bemerkung: Sei $U \in \mathfrak{L}$; gemäß der Bemerkung am Schluß des Beweises von Satz 3.1. ist F_U lokal gleichmäßiger Limes von Funktionen aus $\boldsymbol{A}(U)$. Für $V \in \mathfrak{L}$, $V \subset \overline{V} \subset U$ gilt also:

$$F_{U|\overline{V}} \in \boldsymbol{A}(V).$$

4.2. Satz: Versehen mit dem Atlas $\{(U, F_U)\}_{U \in \mathfrak{L}}$ ist X (bzw. jede Zusammenhangskomponente von X) eine Riemannsche Fläche.

Beweis: Aus Satz 2.4. und Satz 3.5. folgt, daß F_U die Mengen $U \in \mathfrak{L}$ homöomorph auf eine offene Teilmenge von $\boldsymbol{C}$ abbildet, X also eine zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Daher ist nur noch zu zeigen, daß die Übergangsabbildungen analytisch sind.

Seien dazu $U, V \in \mathfrak{L}, x \in U \cap V, W \in \mathfrak{L}$ mit $x \in W \subset \overline{W} \subset \subset U \cap V$. Nach Bemerkung 4.1. gilt:

$$F_{U|\overline{W}} \in \boldsymbol{A}(W), \quad F_{V|\overline{W}} \in \boldsymbol{A}(W).$$

Aus dem Einbettungssatz (s. 0.1.) folgt, daß die Funktionen $F_U \circ F_W^{-1}$ und $F_V \circ F_W^{-1}$ auf D holomorph (und bijektiv) sind.

Damit ist auch die Übergangsabbildung

$$F_V \circ F_U^{-1} : F_U(U \cap V) \to F_V(U \cap V)$$

in x holomorph, denn:

$$\begin{aligned} F_V \circ F_U^{-1}{}_{|F_U(W)} &= F_V \circ F_W^{-1} \circ F_W \circ F_U^{-1}{}_{|F_U(W)} \\ &= (F_V \circ F_W^{-1}) \circ (F_U \circ F_W^{-1})_{|F_U(W)}. \circ \end{aligned}$$

Im folgenden Satz wird der Zusammenhang hergestellt zwischen $\boldsymbol{A}$ (bzw. $\boldsymbol{H}$) und den üblichen analytischen (bzw. harmonischen) Funktionen auf der Riemannschen Fläche X.

4.3. Satz: Für all offenen Teilmengen $U \subset X$ ist $\boldsymbol{H}(U)$ (bzw. $\tilde{\boldsymbol{A}}(U)$) gerade die Menge der auf U gewöhnlichen harmonischen (bzw. analytischen) Funktionen.

Beweis: Es bezeichne $\mathfrak{G}$ (bzw. $\mathfrak{B}$) die Garbe der klassischen harmonischen (bzw. analytischen) Funktionen auf X.

(1) Sei $U \subset X$ offen, $h \in \boldsymbol{H}(U)$; sei $V \in \mathfrak{L}$, $V \subset \bar{V} \subset U$. Dann ist $h_{|\bar{V}} \in H(V) = \overline{\operatorname{Re} A(V)}$, also existiert eine Folge $\{u_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ in $\operatorname{Re} A(V)$, die auf V gleichmäßig gegen h konvergiert. Ist $f_n := u_n + i u_n^* \in A(V)$, dann ist $f_n \circ F_V^{-1}$ holomorph auf D. Insbesondere ist damit $u_n \circ F_V^{-1}$ harmonisch auf D als Realteil von $f_n \circ F_V^{-1}$, also $u_{n|V} \in \mathfrak{G}(V)$. $\mathfrak{G}(V)$ ist abgeschlossen bezüglich lokal gleichmäßiger Konvergenz, also $h_{|V} \in \mathfrak{G}(V)$. Dies gilt für eine Überdeckung von U; dies zeigt $h \in \mathfrak{G}(U)$.

Sei umgekehrt $g \in \mathfrak{G}(U)$, $V \in \mathfrak{L}$, $V \subset \bar{V} \subset U$. Aus der $\boldsymbol{H}$-Regularität von V ergibt sich nach dem soeben Gezeigten die $\mathfrak{G}$-Regularität, also $H(V) = G(V)$. Damit ist $g_{|\bar{V}} \in H(V)$, d. h. $g_{|V} \in \boldsymbol{H}(V)$. Insgesamt ist somit gezeigt: $\boldsymbol{H}(U) = \mathfrak{G}(U)$.

(2) Wie in (1) ergibt sich sofort $\boldsymbol{A}(U) \subset \mathfrak{B}(U)$; da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist und ein lokal gleichmäßiger Limes von holomorphen Funktionen wieder holomorph ist, folgt $\tilde{\boldsymbol{A}}(U) \subset \mathfrak{B}(U)$ für alle offenen Mengen $U \subset X$.

Sei nun $f \in \mathfrak{B}(U)$, $V \in \mathfrak{L}$, $V \subset \bar{V} \subset U$. Dann ist $\operatorname{Re} f_{|V} \in$ $\in H(V)$; also existiert eine Folge $\{f_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ in $A(V)$, deren Realteile auf V gleichmäßig gegen $\operatorname{Re} f$ konvergieren.

Sei $x_0 = F_V^{-1}(0)$ und ohne Einschränkung $\{f_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ so gewählt, daß gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Die Funktionen $\tilde{f}_n := f_n \circ F_V^{-1}$ und $\tilde{f} := f \circ F_V^{-1}$ sind dann holomorph auf D und dort konvergiert $\operatorname{Re} \tilde{f}_n$ gleichmäßig gegen $\operatorname{Re} \tilde{f}$; ferner gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{f}_n(0) = \tilde{f}(0).$$

Sei $0 < r < 1$; wegen der gleichmäßigen Konvergenz der $\operatorname{Re} \tilde{f}_n$ existiert $M \in \boldsymbol{R}^+$ (unabhängig von r), so daß

$$|\operatorname{Re} \tilde{f}_n(z)| \leqslant M$$

für alle $n \in \boldsymbol{N}$ und alle $z \in D(r, 0) = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| < r\}$. Die zu $\operatorname{Re} \tilde{f}_n$ gehörenden Imaginärteile lassen sich dann auf $D(r, 0)$ wie folgt abschätzen ([3], S. 161 ff):

$$\| \operatorname{Im} \tilde{f}_n \|_{D(r,0)} \leqslant \frac{2M}{\pi} \cdot \log \frac{1+r}{1-r} + | \operatorname{Im} \tilde{f}_n(0) | .$$

Da die Folge $\{\operatorname{Im} \tilde{f}_n(0)\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ konvergiert, existiert also auch für die Folge $\{\| \operatorname{Im} \tilde{f}_n \|\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ eine von n unabhängige globale Schranke.

Die Folge $\{\tilde{f}_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ ist also lokal gleichmäßig beschränkt auf D. Da die holomorphen Funktionen auf D einen (komplexen) Montelraum bilden, existiert demnach eine auf D lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge, die ohne Einschränkung wieder mit $\{\tilde{f}_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ bezeichnet wird. Der Limes dieser Folge sei $\tilde{g}$; $\tilde{g}$ ist dann holomorph auf D, es gilt $\operatorname{Re} \tilde{f} = \operatorname{Re} \tilde{g}$ und $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$, also folgt: $\tilde{f} = \tilde{g}$. Damit konvergiert f_n auf V lokal gleichmäßig gegen f, d. h. $f \in \overline{\boldsymbol{A}(V)}$. Insgesamt zeigt dies $f \in \bar{\boldsymbol{A}}(U)$ und damit $\mathfrak{B}(U) \subset \bar{\boldsymbol{A}}(U)$. $\circ$

4.4. **Bemerkung:** Wählt man in der klassischen Situation mit $X = \boldsymbol{C}$ statt der Garbe aller holomorphen Funktionen die strikt kleinere Garbe, die von den Polynomen erzeugt wird, so erfüllt diese Garbe nach wie vor die Verträglichkeitsbedingung (A). Im allgemeinen ist also $\boldsymbol{A}$ echt in $\mathfrak{B}$ enthalten. Genauer gilt $\boldsymbol{A}(U) = \mathfrak{B}(U)$ genau dann, wenn die Algebren $\boldsymbol{A}(U)$ abgeschlossen sind.

5. Weitere Kennzeichnungen Riemannscher Flächen

In der Standardvoraussetzung wurde von der Existenz einer Garbe $\boldsymbol{A}$ „analytischer" Funktionen sowie einer Garbe von harmonischen Funktionen ausgegangen. Die folgenden Sätze charakterisieren solche Garben $\boldsymbol{A}$, die die Existenz einer Garbe $\boldsymbol{H}$ harmonischer Funktionen implizieren, so daß die Bedingung (A) erfüllt ist und damit die Sätze 4.2. und 4.3. gelten.

Eingeführte Bezeichnungen, die sich nur auf die Algebren $\boldsymbol{A}(U)$ beziehen, werden in entsprechender Bedeutung weiterverwendet ($A(U)$, Φ_U, F_U etc.).

Sei X ein lokal kompakter Raum mit abzählbarer Basis; ferner sei $\boldsymbol{A}$ eine lokal punktetrennende Garbe von Algebren stetiger komplexwertiger Funktionen auf X mit $1 \in \boldsymbol{A}(X)$. Für $U \subset X$ offen sei

$$\boldsymbol{H}(U) := \left\{ h \in C_{\boldsymbol{R}}(U) \,\middle|\, \begin{matrix} h \text{ lokal gleichmäßig approximierbar} \\ \text{durch Realteile von Funktionen aus } \boldsymbol{A} \end{matrix} \right\}.$$

Es existiere eine Basis $\mathfrak{L}$ der Topologie von X aus zusammenhängenden relativ kompakten Mengen mit nichtleerem topologischen Rand, so daß für alle $U \in \mathfrak{L}$ $\mathrm{A}(U)$ eine Dirichletalgebra ist mit $\check{S}(A(U)) = U^*$.

5.1. Lemma: Sei $U \in \mathfrak{L}$. Dann gilt: $\overline{\mathrm{Re}\, A(U)} = H(U)$. Insbesondere ist also U eine $\boldsymbol{H}$-reguläre Menge.

Beweis: Offensichtlich gilt $\overline{\mathrm{Re}\, A(U)} \subset H(U)$. Falls gezeigt werden kann, daß $Ch(H(U)) \subset U^*$, folgt dann wegen der Simplizialität von $\overline{\mathrm{Re}\, A(U)}$ die Behauptung.

Annahme: U^* ist kein Rand für $H(U)$.
Dann existiert $h \in H(U)$, $h_{|U^*} \geqslant 0$, $\inf\limits_{x \in U} h(x) < 0$. Die Funktion

$$\tilde{h} := -\left(h - \sup_{x \in \bar{U}} h(x)\right)$$

gehört dann zu $H^+(U)$ und erfüllt die Bedingung

$$\|\tilde{h}\|_{\bar{U}} > \|\tilde{h}\|_{U^*}$$

(dabei bezeichnet $\|\cdot\|_A$ jeweils die Supremumsnorm in $C(A)$).

Sei B der von $\overline{\mathrm{Re}\, A(U)}$ und $\tilde{h}$ erzeugte Vektorraum. Dann ist U^* kein Rand für B, also existiert $x \in Ch(B) \cap U$.

Zu jeder Umgebung V von x, $V \subset \bar{V} \subset U$, gibt es dann $h' \in B$ mit $\|h'\|_V > \|h'\|_{\bar{U} \setminus V}$. Falls nämlich $\|h'\|_V \leqslant \|h'\|_{\bar{U} \setminus V}$ für alle $h' \in B$ gilt, ist offensichtlich $\bar{U} \setminus V$ Rand für B im Widerspruch zu $x \in Ch(B) \setminus (\bar{U} \setminus V)$.

Speziell sei $V \in \mathfrak{L}$ so gewählt, daß h auf $\bar{V}$ gleichmäßig approximierbar ist durch Realteile von Funktionen aus $A(V)$. Diese Eigenschaft haben dann alle Funktionen in B. V^* ist aber ein Rand für $\mathrm{Re}\, A(V)$, also auch für $B_{|\bar{V}}$. Andererseits existiert $h' \in B$ mit

$$\|h'\|_V > \|h'\|_{\bar{U}\setminus V} \geqslant \|h'\|_{V^*}.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, daß U^* kein Rand ist für $H(U)$.

Damit gilt $Ch(H(U)) \subset U^*$, also

$$C_R(U^*) = \overline{\operatorname{Re} A(U)}_{|U^*} \subset H(U)_{|U^*} \subset C_R(U^*).\circ$$

5.2. Lemma: Äquivalent sind:

(1) Für alle $U \in \mathfrak{L}$ ist U ein Gleason-Part von $\Sigma(A(U))$ und F_U ein Homöomorphismus;

(2) $\boldsymbol{H}$ besitzt die Konvergenzeigenschaft von Bauer;

(3) $(X, \boldsymbol{H})$ ist ein harmonischer Raum.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $U \subset X$ offen, $\{h_n\}_{n \in N}$ isotone Folge aus $\boldsymbol{H}(U)$, und $h := \sup_{n \in N} h_n$ sei lokal beschränkt. Sei $x \in U$; wähle $V \in \mathfrak{L}$, $x \in V \subset \bar{V} \subset U$, so daß h beschränkt ist auf $\bar{V}$. Nach Lemma 5.1. gilt $h_n \in \overline{\operatorname{Re} A(V)}$ für alle $n \in N$; damit ist $\{h_n \circ F_V\}_{n \in N}$ isotone Folge harmonischer Funktionen auf D mit endlichem Supremum $h \circ F_V$. Aus dem Konvergenzaxiom für die klassischen harmonischen Funktionen folgt dann zusammen mit der Stetigkeit von F_V^{-1} die Stetigkeit von h.

(2) $\Rightarrow$ (3): Das Trennungsaxiom folgt unmittelbar aus der Definition von $\boldsymbol{H}$, und die Existenz einer Basis regulärer Mengen ergibt sich aus Lemma 5.1.

(3) $\Rightarrow$ (1): Nach Lemma 5.1. gilt für alle $U \in \mathfrak{L}$:

$$\overline{\operatorname{Re} A(U)} = H(U) \cong C_R(U^*).$$

Damit sind die Bedingungen der Standardvoraussetzung erfüllt. (1) folgt dann aus den Sätzen 2.4. und 3.5.$\circ$

A. Baumann charakterisiert in [2] die Konvergenzeigenschaft von Bauer durch funktionalanalytische Eigenschaften der Vektorräume $\boldsymbol{H}(U)$: $\boldsymbol{H}$ genügt genau dann dem Konvergenzaxiom von Bauer, wenn für jede offene Teilmenge U von X der Raum $\boldsymbol{H}(U)$ ein Schwartz-Raum ist (bzgl. der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz). Der folgende Satz geht von einer entsprechenden Forderung an die Algebren $\boldsymbol{A}(U)$ aus. Nach Ergebnissen bei Bierstedt-Gramsch-Meise [4] genügt es allerdings zu fordern, daß $\boldsymbol{A}$ eine Fréchet-Montel-Garbe ist, d. h. daß die Algebren $\boldsymbol{A}(U)$ (abgeschlossene) Montel-Räume sind.

5.3. **Satz:** Sei X ein lokal kompakter Raum mit abzählbarer Basis, $\boldsymbol{A}$ eine Fréchet-Montel-Garbe von Algebren stetiger komplexwertiger Funktionen auf X, die lokal die Punkte trennt und die Konstanten enthält. Es existiere eine Basis $\mathfrak{L}$ der Topologie von X aus zusammenhängenden und relativ kompakten Mengen mit nichtleerem topologischen Rand, so daß für alle $U \in \mathfrak{L}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $A(U)$ ist eine Dirichlet-Algebra auf ihrem Šhilov-Rand U^*;

(2) Re $\boldsymbol{A}(U)$ ist abgeschlossen.

Dann ist X eine Riemannsche Fläche mit $\boldsymbol{A}$ als Garbe der analytischen Funktionen.

Beweis: Sei $\boldsymbol{H}$ definiert wie in den einleitenden Bemerkungen zu Lemma 5.1. Gemäß Lemma 5.2. ist nur zu zeigen, daß dann $\boldsymbol{H}$ die Konvergenzeigenschaft von Bauer erfüllt.

Nach [4], Satz 1.11 ist $\boldsymbol{A}$ als Fréchet-Montel-Garbe bereits eine Fréchet-Schwartz-Garbe, also sind die Algebren $\boldsymbol{A}(U)$ Schwartz-Räume.

(1) Sei $U \in \mathfrak{L}$; $\boldsymbol{A}(U)$ wird im folgenden als Vektorraum über $\boldsymbol{R}$ betrachtet.

$$M := \{f \in \boldsymbol{A}(U) : \operatorname{Re} f = 0\}$$

ist abgeschlossener Teilraum von $\boldsymbol{A}(U)$, also $\boldsymbol{A}(U)_{/M}$ ein Fréchet-Schwartz-Raum ([11], S. 279). Die Abbildung

$$i : \boldsymbol{A}(U)_{/M} \to \operatorname{Re} \boldsymbol{A}(U)$$
$$[f] \mapsto \operatorname{Re} f$$

ist dann linear und bijektiv.

Sei $K \subset U$ kompakt, $\varepsilon > 0$,

$$W_{\varepsilon, K} := \{\operatorname{Re} f \in \operatorname{Re} \boldsymbol{A}(U) : \|\operatorname{Re} f\|_K < \varepsilon\}.$$

$W_{\varepsilon, K}$ ist Nullumgebung in Re $\boldsymbol{A}(U)$ (bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz). Bezeichnet q die Quotientenabbildung von $\boldsymbol{A}(U)$ auf $\boldsymbol{A}(U)_{/M}$, dann gilt:

$$q(\{f \in \boldsymbol{A}(U) : \|f\|_K < \varepsilon\}) \subset i^{-1}(W_{\varepsilon, K}).$$

Die Quotiententopologie auf $\boldsymbol{A}(U)_{/M}$ ist also feiner als die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Re $\boldsymbol{A}(U)$; damit ist i auch stetig.

Aus dem Satz der offenen Abbildung folgt, daß i insgesamt ein Homöomorphismus und somit Re $\boldsymbol{A}(U)$ ein Fréchet-Schwartz-Raum ist.

(2) Sei $U \subset X$ offen, $\{h_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ isotone Folge harmonischer Funktionen auf U, $h := \sup_{n \in \boldsymbol{N}} h_n$ sei lokal beschränkt. Sei $V \in \mathfrak{L}$, $V \subset \bar{V} \subset U$, so daß h beschränkt ist auf $\bar{V}$. Nach Lemma 5.1. ist dann $h_{n|V} \in \overline{\text{Re}\, A(V)}$, es existiert also eine Folge $\{f_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ in $A(V)$, deren Realteile global beschränkt sind auf V und punktweise gegen h konvergieren. Da Re $\boldsymbol{A}(V)$ Fréchet-Schwartz-Raum ist, konvergiert dann eine Teilfolge auf V lokal gleichmäßig gegen h; also ist h stetig und damit harmonisch auf V. Unter Benutzung der Garbeneigenschaft von $\boldsymbol{H}$ folgt schließlich: $h \in \boldsymbol{H}(U)$.

(3) Da die Algebren $\boldsymbol{A}(U)$ abgeschlossen sind, stimmt $\boldsymbol{A}(U)$ mit der lokalen Erweiterung $\bar{\boldsymbol{A}}(U)$ überein. Dies zeigt zusammen mit Satz 4.3., daß $\boldsymbol{A}$ die Garbe der analytischen Funktionen auf X ist. $\circ$

5.4. **Bemerkung:** Die Abgeschlossenheit der Vektorräume Re $\boldsymbol{A}(U)$ für $U \in \mathfrak{L}$ wurde nur in Teil (1) des Beweises von Satz 5.3. bei der Anwendung des Satzes von der offenen Abbildung benutzt. Es ist ein offenes Problem, ob auf die Abgeschlossenheit (oder eine ähnliche Forderung, etwa „Re $\boldsymbol{A}(U)$ ist von 2. Kategorie in sich" oder „Re $\boldsymbol{A}(U)$ ist tonneliert") verzichtet werden kann.

6. Modifikation der Standardvoraussetzung

Im klassischen Fall bietet sich eine weitere Verknüpfung an zwischen holomorphen und harmonischen Funktionen: der Vektorraum der Realteile aller holomorphen Funktionen auf einer offenen Kreisscheibe U stimmt überein mit den harmonischen Funktionen auf U.

Es ist offen, ob die Bedingung

$$(\mathfrak{A}) \quad \mathrm{Re}\, \boldsymbol{A}(U) = \boldsymbol{H}(U)$$

für alle Mengen U einer Basis regulärer Mengen die Bedingung (A) impliziert.

Der folgende Satz erlaubt es, unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Basis $\mathfrak{L}$ aus Bedingung $(\mathfrak{A})$ die Bedingung (A) zu folgern. Sei dazu

$$\mathfrak{U} := \{U \subset X : U \text{ offen, } \mathrm{Re}\, \boldsymbol{A}(U) = \boldsymbol{H}(U)\},$$

$$\mathfrak{U}_\delta := \left\{ U \subset X : \begin{array}{l} U \text{ offen, es gibt } \{U_n\}_{n \in \boldsymbol{N}} \text{ in } \mathfrak{U}, \\ U_n \downarrow, \ \bigcap\limits_{n \in \boldsymbol{N}} U_n = \bar{U} \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{U}_s := \{U \subset X : U \text{ offen, } \overline{H_0(U)} = H(U)\}.$$

Hierbei wird mit $H_0(U)$ die Menge aller stetigen Funktionen auf $\bar{U}$ bezeichnet, die Restriktion auf $\bar{U}$ einer harmonischen Funktion auf einer Umgebung von $\bar{U}$ sind. Jede stabile Menge gehört zu $\mathfrak{U}_s$ ([5], Theorem 3.15.).

6.1. Satz: Enthält $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}_\delta \cap \mathfrak{U}_s$ eine Basis der Topologie von X, dann genügt $(X, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{A})$ der Bedingung (A).

Beweis: Sei $U \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}_\delta \cap \mathfrak{U}_s$. Trivial gilt:

$$\overline{\mathrm{Re}\, A(U)} \subset H(U).$$

Sei $h \in H(U)$ und $\varepsilon > 0$. Wegen $\overline{H_0(U)} = H(U)$ existiert $h' \in H_0(U)$ mit $\|h - h'\| < \varepsilon$. Nach Wahl von U existiert dann $U' \in \mathfrak{U}$, $\bar{U} \subset U'$, h' fortsetzbar zu einer harmonischen Funktion auf U'. Wegen $\boldsymbol{H}(U') = \mathrm{Re}\, \boldsymbol{A}(U')$ folgt $h' \in \mathrm{Re}\, A(U)$, also $h \in \overline{\mathrm{Re}\, A(U)}$. $\circ$

6.2. Bemerkung: Im klassischen Fall enthalten $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_\delta$ sowie $\mathfrak{U}_s$ alle offenen Kreisscheiben, die Voraussetzung von Satz 6.1. ist also dort erfüllt.

Literaturverzeichnis

[1] Bauer, H.: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. Lecture notes in Math. 22. Springer 1966.

[2] Baumann, A.: Eine funktionalanalytische Charakterisierung der Konvergenzeigenschaft von Bauer. Preprint. Bielefeld 1978.

[3] Behnke, H.- Sommer, F.: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Grundlehren der math. Wiss. in Einzeldarst. Band 77, Springer 1955.

[4] Bierstedt, K. D.- Gramsch, B.- Meise, R.: Approximationseigenschaft, Lifting und Kohomologie bei lokalkonvexen Produktgarben. Manuscripta math. 19, 319–364 (1976).

[5] Bliedtner, J.- Hansen, W.: Simplicial cones in potential theory. Inv. Math. 29, 83–110 (1975).

[6] Bliedtner, J.- Hansen, W.: A simplicial charakterization of elliptic harmonic spaces. Math. Ann. 222, 261–274 (1976).

[7] Constantinescu, C.: Harmonic spaces. Absorbent sets and balayage. Rev. Roum. Math. Pures Appl. 11, 887–910 (1966).

[8] Constantinescu, C.- Cornea, A.: Potential theory on harmonic spaces Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972.

[9] Gamelin, Th. W.: Uniform algebras. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1969.

[10] Hoffman, K.: Analytic functions and logmodular Banach algebras. Acta Math. 108, 271–317 (1962).

[11] Horváth, J.: Topological vector spaces and distributions Volume I. Addison Wesley 1966.

[12] Rickart, C. E.: Holomorphic convexity for general function algebras. Can. Math. J. 20, 272–290 (1968).

[13] Stout, E. L.: The theory of uniform algebras. Bogden & Quigley, Inc. Publishers 1971.

[14] Suciu, I.: Function algebras. Noordhoff Int. Publ. Leyden 1975.