BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1982

MÜNCHEN 1983

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Eine Beweistheoretische Untersuchung von $(\Delta_2^1\text{-}CA) + (BI)$ und verwandter Systeme

Von **Gerhard Jäger***) und **Wolfram Pohlers** in München

In der vorliegenden Arbeit bestimmen wir die beweistheoretische Stärke des Systems $(\Delta_2^1\text{-}CA) + (BI)$ der Arithmetik 2. Stufe mit Δ_2^1-Komprehension und Bar-Induktion. Bei unseren Untersuchungen steht allerdings weniger $(\Delta_2^1\text{-}CA) + (BI)$ im Vordergrund, sondern ein von G. Jäger entwickeltes Teilsystem KPi der Mengenlehre, das neben den Axiomen der Kripke-Platek-Mengenlehre, wie sie zum Beispiel in [Barwise, 1975] aufgeführt sind, noch Axiome enthält, die ein zulässiges Universum erzwingen, das gleichzeitig die Vereinigung zulässiger Mengen ist (3.1.). In der formalen Theorie KPi lassen sich das Spector-Gandy-Theorem und damit das Axiom β und ein Quantorensatz (3.1.) beweisen, mit deren Hilfe sich $(\Delta_2^1\text{-}CA) + (BI)$ kanonisch in KPi einbetten läßt (3.1.1.). Zur beweistheoretischen Analyse von KPi nützen wir aus, daß das kleinste Modell dieser Theorie in der konstruktiblen Hierarchie bei I, der ersten rekursiv unerreichbaren Ordinalzahl liegt. Wir entwickeln dazu ein halbformales System $RS(I)$ der geschichteten Mengenlehre, das als beweistheoretisches Pendant zu L_I dient. Die Tatsache, daß L_I ein Modell von KPi ist, schlägt sich dann im Einbettungssatz (3.2.1.) nieder. Wie bereits in [Pohlers, 1978] und [Pohlers, 1979a] angedeutet und in [Jäger, 1979] für ein schwächeres System $RS(\Omega)$ durchgeführt, lassen sich Schnitte in halbformalen Systemen der Mengenlehre mit Hilfe der Methode der lokalen Prädikativität eliminieren, die in [Pohlers, 1978] und [Pohlers, 1979b] entwickelt wurde. Das Schnitteliminationsverfahren für $RS(I)$ läuft analog wie das in [Jäger, 1979] für $RS(\Omega)$ durchgeführte Verfahren ab. Für eine Einbettung von KPi war $RS(\Omega)$ allerdings noch nicht ausreichend. Der Grund dafür war der Mangel eines genügend starken Ordinalzahlenbezeichnungs-

*) Während der Abfassung dieser Arbeit war der Autor im Rahmen eines durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft geförderten Projekts beschäftigt.

systems. Solche Bezeichnungssysteme benötigt man hauptsächlich zur Definition sogenannter Kollabierungsfunktionen $\tilde{D}_\varkappa : ON \to \varkappa$ wie sie beispielsweise im Kollabierungslemma (2.2.7.) auftreten. In [Pohlers, 1981 b] wurde ein ausreichendes System entwickelt. Wir verzichten hier auf die Angabe des Systems, sondern verweisen auf [Pohlers, 1981 b]. In § 1 fassen wir lediglich die hier relevanten Eigenschaften des Bezeichnungssystems zusammen.

Wir erhalten nun eine Ordinalzahlanalyse für $(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)$ auf die folgende Art: Ist F eine geschlossene arithmetische Formel mit $(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI) \vdash F$, so folgt $KPi \vdash F^*$, wobei F^* die kanonische Übersetzung von F ist. Aus $KPi \vdash F^*$ folgt $\vdash^{I \cdot \omega}_{I + n} F^{*I}$, wobei $\vdash^{\alpha}_{\varrho} G$ im wesentlichen bedeutet, daß eine Herleitung einer Tiefe $\leqq \alpha$ von G in $RS(I)$ vorliegt, deren Schnitte alle einen Rang $< \varrho$ haben (2.2.3.). Durch Schnittelimination folgt daraus $\vdash^{<}_{0} \tilde{D}_{0^+}\, \varepsilon_{I+1}\, F^{*I}$. Bezeichnen wir die beweistheoretische Ordinalzahl einer formalen Theorie T mit $|T|$, so folgt mit den üblichen Techniken $|(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)| \leqq |KPi| \leqq \tilde{D}_{0^+}\, \varepsilon_{I+1}$. Hierbei ist $\tilde{D}_{0^+}\, \varepsilon_{I+1}$ der Kollaps der ersten ε-Zahl oberhalb von I unter $0^+ = \omega_1^{CK}$, der ersten rekursiv regulären Ordinalzahl. Es ist $\tilde{D}_{0^+}\, \varepsilon_{I+1} = \bar{\Theta}^0(\bar{\Theta}^1 \varepsilon_{I+1} 0)\, 0$.

S. Feferman hat in [Feferman, 1979] gezeigt, daß sein System T_0 in $(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)$ einbettbar ist, und G. Jäger hat in [Jäger, 1981 a] nachgewiesen, daß der Wohlordnungsbeweis für jedes $\alpha < \tilde{D}_{0^+}\, \varepsilon_{I+1}$ in T_0 geführt werden kann. Damit ist zum einen gezeigt, daß diese Grenze scharf ist, zum anderen folgt die beweistheoretische Äquivalenz von $(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)$ und T_0. Man kann den Wohlordnungsbeweis für $\alpha < \tilde{D}_{0^+}\, \varepsilon_{I+1}$ auch mit weniger Aufwand als in [Jäger, 1981 a] direkt in $(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)$ führen. Auf eine Angabe dieses Beweises haben wir hier allerdings verzichtet, da er außer der Exaktheit der Grenze keine weiteren Informationen liefert.

Wir haben uns auch auf die bloße Berechnung der beweistheoretischen Ordinalzahl von $(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)$ und KPi beschränkt. Natürlich folgt damit auch die gleiche Palette von Ergebnissen wie sie sich bei den Untersuchungen in [Pohlers, 1981 a] für induktive Definitionen ergeben haben.

§ 1. Ordinalzahltheoretische Hilfsmittel

Wir beziehen uns in der vorliegenden Arbeit auf das in [Pohlers, 1981 b] angegebene Ordinalzahlenbezeichnungssystem. Dieses System ist eine Erweiterung des von Buchholz auf der Basis der Feferman-Aczel'schen Θ-Funktionen entwickelten Systems [Buchholz, 1976]. Wir beziehen uns im folgenden unmittelbar auf [Pohlers, 1981 b]. Allerdings werden wir das dort beschriebene System nicht in voller Stärke benötigen. Nur die Funktionen $\bar{\Theta}^0$ und $\bar{\Theta}^1$ und insbesondere die von ihnen abgeleiteten Kollabierungsfunktionen $D_\varkappa : \bar{\Theta}(\varkappa_2) \to \varkappa$ werden hier eine Rolle spielen. Zunächst wollen wir anmerken, daß sich das Bezeichnungssystem auch auf der Grundlage rekursiv regulärer, d. h. zulässiger Ordinalzahlen anstatt regulärer Ordinalzahlen entwickeln läßt. Wir wollen daher K_1 als den topologischen Abschluß der zulässigen Ordinalzahlen und $I := \varkappa_2 0$ als die erste rekursiv unerreichbare Ordinalzahl interpretieren. Im folgenden betrachten wir nur noch Ordinalzahlen des Bezeichnungssystems. Für eine Ordinalzahl α bezeichnet α^+ die nächste zulässige Ordinalzahl, d.h. $\alpha^+ = \min\{\mu \in K_1 : \alpha < \mu\}$. Die Stufe $S\alpha$ von α ist dann die kleinste Ordinalzahl $\mu \in K_1$ mit $\mu \leq \alpha < \mu^+$.

Mit $\varkappa$, π wollen wir im folgenden immer zulässige Ordinalzahlen und mit λ, μ, ν Ordinalzahlen aus $\varkappa_1$ mitteilen.

$\alpha \# \beta$ bedeutet die natürliche Summe von α und β. Wir schreiben immer $\bar{\Theta}$ anstatt $\bar{\Theta}^0$.

In Teil II von [Pohlers, 1981 b] werden die Kollabierungsfunktionen $D_\varkappa : \bar{\Theta}(\varkappa_2) \to \varkappa$ eingeführt. Wir verwenden hier die Abkürzung $\tilde{D}_\varkappa \alpha := D_\varkappa D_I \alpha$. Eine entscheidende Rolle bei dem Schnitteliminationsverfahren in § 2 spielen die Relationen $\ll_\varkappa$, die gegeben sind durch

$$\alpha \ll_\varkappa \beta :\Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ und } \tilde{D}_\pi \alpha < \tilde{D}_\pi \beta \text{ für alle } \pi \in [\varkappa, S\beta]$$

$\alpha \underline{\ll}_\varkappa \beta$ steht für $\alpha \ll_\varkappa \beta \vee \alpha = \beta$, und wir schreiben $\alpha \ll \beta$ anstelle von $\alpha \ll_{0^+} \beta$.

Ist $\underline{\varkappa} = \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ eine Folge zulässiger Ordinalzahlen, so sei $\tilde{D}_{\underline{\varkappa}} \alpha := \tilde{D}_{\varkappa_1}(\ldots(\tilde{D}_{\varkappa_n}\alpha)\ldots)$.

Wir zitieren die hier benötigten Eigenschaften von $\ll_\varkappa$.

1.1. Lemma

a) $\alpha \ll_\varkappa \beta \Rightarrow \bar{D}_\pi \alpha \ll_\varkappa \bar{D}_\pi \beta$ für alle $\pi \geqq \varkappa$

b) $\alpha \ll_\varkappa \beta$ und $\beta \ll_\varkappa \gamma \Rightarrow \alpha \ll_\varkappa \gamma$

c) $\beta \neq 0 \Rightarrow \alpha \ll_\varkappa \alpha \# \beta$

d) $\alpha \underline{\ll}_\varkappa \omega^\alpha$, $\alpha \ll_\varkappa \bar{\Theta}\,\xi\,\alpha$

e) $\alpha \ll_\varkappa \beta \Rightarrow \alpha \# \gamma \ll_\varkappa \beta \# \gamma$ und $\omega^\alpha \ll_\varkappa \omega^\beta$

f) $\alpha \ll_\varkappa \beta \Rightarrow \bar{\Theta}\xi(\xi \# \alpha) \ll_\varkappa \bar{\Theta}\xi(\xi \# \beta)$

Wir schreiben $\alpha \leqq \underline{\tau} = \tau_1, \ldots, \tau_n$, wenn $\alpha \leqq \tau_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt.

1.2. Lemma

Für zulässige Ordinalzahlen $\pi \leqq \varkappa \leqq \underline{\tau} = \tau_1, \ldots, \tau_n$ gilt:

a) $\bar{D}_{\underline{\tau}}(\alpha \# \beta) \ll_\varkappa \gamma$, $\bar{D}_{\underline{\tau}}\alpha \ll_\pi \gamma$ und $\bar{D}_{\underline{\tau}}\beta \ll_\pi \gamma \Rightarrow \bar{D}_{\underline{\tau}}(\alpha \# \beta) \ll_\pi \gamma$

b) $\bar{D}_{\underline{\tau}}(\omega^\alpha) \ll_\varkappa \gamma$ und $\bar{D}_\tau \alpha \ll_\pi \gamma \Rightarrow \bar{D}_\tau(\omega^\alpha) \ll_\pi \gamma$

c) $\bar{D}_{\underline{\tau}}\bar{\Theta}\varrho(\varrho \# \alpha) \ll_\varkappa \gamma$, $\bar{D}_{\underline{\tau}}\varrho \ll_\pi \gamma$ und $\bar{D}_{\underline{\tau}}\alpha \ll_\pi \gamma \Rightarrow$
$\bar{D}_{\underline{\tau}}\bar{\Theta}\varrho\,(\varrho \# \alpha) \ll_\pi \gamma$

1.3. Lemma

a) $S\alpha \underline{\ll} \alpha$

b) $\alpha \ll \beta$ und $\nu \underline{\ll} \beta \Rightarrow D_{\nu+}\alpha \ll \beta$

c) $\alpha \ll \beta$ und $\alpha^+ \leqq \nu \Rightarrow S\alpha \ll \beta \# \nu$ und $\alpha^+ \ll \beta \# \nu$

d) $\alpha, \beta \ll \gamma \# \nu$ und $S(\alpha + \beta) < \nu \Rightarrow \bar{\Theta}\alpha(\alpha \# \beta) \ll \gamma \# \nu$

e) $\alpha \# D_\varkappa \alpha \ll \alpha \# \varkappa$

1.4. Definition

Eine Folge $(\alpha_\xi : \xi \in J)$ und eine Ordinalzahl α nennen wir ein σ-Paar, wenn gilt:

(a) Für alle $\xi \in J$ ist $\alpha_\xi \ll_{\sigma+} \alpha$

(b) Ist $\sigma^+ \leqq \underline{\varkappa}$, $\bar{D}_{\underline{\varkappa}}\alpha \underline{\ll} \beta$, $\xi \in J$ und $\xi \ll \beta$, so folgt $\bar{D}_{\underline{\varkappa}}\alpha_\xi \ll \beta$.

Aus 1.4. folgt sofort

1.5. Lemma

Ist $<(\alpha_\xi : \xi \in J), \alpha>$ ein σ-Paar und $\xi \in J$, so gilt $\alpha_\xi \# \xi \ll \alpha \# \xi$.

1.6. Definition

Für eine Ordinalzahl σ sei $[\sigma] = \{\xi : \xi < \sigma \wedge \neg\, Lim(\xi)\}$.

1.7. Lemma

Ist J eine Menge von Ordinalzahlen, so ist $<(\xi : \xi \in J \cap [\sigma]), \sigma>$ ein σ-Paar.

Der Beweis ist klar.

Mit 1.1.–1.4. erhalten wir unmittelbar

1.8. Lemma

Es sei $<(\alpha_\xi : \xi \in J), \alpha>$ ein σ-Paar. Dann gilt:

a) $\alpha \ll \gamma \Rightarrow <(\alpha_\xi : \xi \in J), \gamma>$ ist ein σ-Paar,
b) $<(\alpha_\xi \# \beta : \xi \in J), \alpha \# \beta>$ ist ein σ-Paar,
c) $<(\omega^{\alpha_\xi} : \xi \in J), \omega^\alpha>$ ist ein σ-Paar,
d) $<(\bar{\Theta}\varrho(\varrho \# \alpha_\xi) : \xi \in J), \bar{\Theta}\varrho(\varrho \# \alpha)>$ ist ein σ-Paar,
e) $\sigma^+ \leqq \varkappa \Rightarrow <(\tilde{D}_\varkappa \alpha_\xi : \xi \in J), \tilde{D}_\varkappa \alpha>$ ist ein σ-Paar.

Wir verwenden die Funktion $\omega_n \alpha$ definiert durch $\omega_0 \alpha = \alpha$ und $\omega_{n+1}\alpha = \omega^{\omega_n \alpha}$. ε-Zahlen sind Ordinalzahlen α mit $\omega^\alpha = \alpha$. $\lambda\xi\varepsilon_\xi$ sei die Ordnungsfunktion der ε-Zahlen. Ist M eine Menge von Ordinalzahlen, so schreiben wir abkürzend $M \ll \alpha$ für $\forall \xi \in M\ (\xi \ll \alpha)$. Dies gilt analog für $\underline{\ll}$, $<$ etc.

1.9. Definition

$$\alpha \dot{-} 1 = \begin{cases} \beta & \text{falls } \alpha = \beta + 1 \\ \alpha & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\alpha \dot{-} (n+1) = (\alpha \dot{-} n) \dot{-} 1$$

Wir wollen abschließend noch bemerken, daß wir nur die Ordinalzahlen $< \varepsilon_{I+1}$ benötigen werden. Das bedeutet, daß wir die Definition von D_I aus [Pohlers, 1981 b] durch $D_I\alpha := \bar{\Theta}^1\alpha 0$ ersetzen können.

§ 2. Das System $RS(I)$ der geschichteten Mengenlehre

2.1. Die Sprache von $RS(I)$

Als Grundzeichen des Systems $RS(I)$ verwenden wir:

1. Für jede natürliche Zahl m eine Konstante $\overline{m}$.
2. Für jede primitiv rekursive Relation Z eine Relationskonstante R_Z; die Konstanten für die arithmetische Gleichheits- und Kleinerrelation schreiben wir als $=$ und $<$.
3. Die 1-stellige Relationskonstante P.
4. Die 2-stellige Relationskonstante $\in$ sowie die 1-stelligen Relationskonstanten M für Mengen und Ad für zulässige Mengen.
5. Je abzählbar unendlich viele freie und gebundene Variablen, die durch u, v, w bzw. x, y, z mitgeteilt werden.
6. Für jedes $\alpha \leq I$ abzählbar unendlich viele gebundene Variablen der Schicht α, die durch x^α, y^α, z^α mitgeteilt werden.
7. Die logischen Symbole $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$.
8. Runde Klammern, geschweifte Klammern, Querstrich, Doppelpunkt und Komma.

Nennformen werden in üblicher Weise gebraucht.

2.1.1. Induktive Definition der Grundformeln

1. Ist R eine n-stellige Relationskonstante ($n \geq 1$) so sind $R(u_1, \ldots, u_n)$ und $\bar{R}(u_1, \ldots, u_n)$ Grundformeln der Länge 1.
2. Sind F und G Grundformeln der Länge m und n, so sind $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Grundformeln der Länge $\max(m,n)+1$.

3. Ist $A(u)$ eine Grundformel der Länge n, so sind $\forall x\, A(x)$ und $\exists x\, A(x)$ Grundformeln der Länge $n + 1$.
4. Ist $A(u)$ eine Grundformel der Länge n, so sind $\forall x A(x)$ und $\exists x \in v A(x)$ Grundformeln der Länge $n + 2$.

Die Schreibweise $A[u_1, \ldots, u_n]$ wird verwendet, um auszudrücken, daß in der Grundformel $A[u_1, \ldots, u_n]$ höchstens die freien Variablen $u_1, \ldots, u_n$ auftreten; schreiben wir $A(u_1, \ldots, u_n)$, so können neben $u_1, \ldots, u_n$ weitere freie Variablen vorkommen.

2.1.2. Induktive Definition der Terme

1. Jede Zahlenkonstante ist ein Zahlenterm der Schicht 0.
2. Jede freie Variable ist ein Variablenterm der Schicht 0.
3. Ist $A[u, v_1, \ldots, v_n]$ eine Grundformel und sind $a_1, \ldots, a_n$ Zahlen- oder Mengenterme mit Schichten $\leqq \alpha < I$, so ist $\{x^\alpha : A^\alpha[x^\alpha, a_1, \ldots, a_n]\}$ ein Mengenterm der Schicht $\alpha + 1$.

$A^\alpha[u_1, \ldots, u_n]$ entsteht aus $A[u_1, \ldots, u_n]$, indem jede ungeschichtete Variable x durch x^α ersetzt wird.

Zahlenterme und Mengenterme nennen wir Terme; Zahlenterme, Mengenterme und Variablenterme heißen V-Terme. Die Schicht eines V-Terms t bezeichnen wir mit $sch(t)$. Schreiben wir im folgenden nur $\{x^\alpha : F(x^\alpha)\}$, so setzen wir voraus, daß $F(x^\alpha)$ die Gestalt $A^\alpha[x^\alpha, a_1, \ldots, a_n]$ hat und $sch(a_i) \leqq \alpha < I$ für alle $1 \leqq i \leqq n$ gilt.

2.1.3. Induktive Definition der α-Formeln F und ihrer Π-Komponenten $k_\Pi(F)$

1. Ist R eine n-stellige Relationskonstante ($n \geqq 1$) und sind $t_1, \ldots, t_n$ V-Terme der Schichten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \leqq \alpha$, so sind $R(t_1, \ldots, t_n)$ und $\bar{R}(t_1, \ldots, t_n)$ α-Formeln;

   $k_\Pi(R(t_1, \ldots, t_n)) := k_\Pi(\bar{R}(t_1, \ldots, t_n)) := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.
2. Sind F und G α-Formeln, so sind $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ α-Formeln;

   $k_\Pi((F \wedge G)) := k_\Pi((F \vee G)) := k_\Pi(F) \cup k_\Pi(G)$.

3. Ist $F(u)$ eine α-Formel, $\beta \leqq \alpha$ und t ein V-Term der Schicht $\gamma \leqq \alpha$, so sind $\forall x^\beta F(x^\beta)$, $\exists x^\beta F(x^\beta)$, $\forall x \in t\, F(x)$ und $\exists x \in t\, F(x)$ α-Formeln;

$$k_\Pi(\forall x^\beta F(x^\beta)) := \{\beta\} \cup k_\Pi(F(u)),$$
$$k_\Pi(\exists x^\beta F(x^\beta)) := k_\Pi(F(u)),$$
$$k_\Pi(\forall x \in t F(x)) := k_\Pi(\exists x \in t F(x)) := \{\gamma\} \cup k_\Pi(F(u)).$$

F heißt $\Delta_0(\alpha)$-Formel, falls F eine α-Formel ist, in der keine gebundenen Variablen der Schicht α auftreten. $\Sigma_1(\alpha)$- bzw. $\Pi_1(\alpha)$-Formeln sind α-Formeln der Form $\exists x^\alpha F(x^\alpha)$ bzw. $\forall x^\alpha F(x^\alpha)$, wobei $F(u)$ eine $\Delta_0(\alpha)$-Formel ist. F ist eine Formel, wenn es ein α gibt, so daß F eine α-Formel ist.

2.1.4. Induktive Definition der $\Sigma(\alpha)$-Formeln

1. Jede $\Delta_0(\alpha)$-Formel ist eine $\Sigma(\alpha)$-Formel.
2. Sind F und G $\Sigma(\alpha)$-Formeln, so sind $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ $\Sigma(\alpha)$-Formeln.
3. Ist $F(u)$ eine $\Sigma(\alpha)$-Formel, $\beta < \alpha$ und t ein V-Term einer Schicht $\leqq \alpha$, so sind $\forall x^\beta F(x^\beta)$, $\exists x^\beta F(x^\beta)$, $\forall x \in t\, F(x)$, $\exists x \in t\, F(x)$ und $\exists x^\alpha F(x^\alpha)$ $\Sigma(\alpha)$-Formeln.

Formeln, in denen keine freien Variablen auftreten, nennen wir Sätze. Als Mitteilungszeichen verwenden wir:

F, G, H	für Formeln,
A, B, C	für Sätze,
s^α, t^α	für V-Terme der Schicht α,
s, t	für V-Terme beliebiger Schichten,
$a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha$	für Terme der Schicht α,
a, b, c	für Terme beliebiger Schichten.

2.1.5. Induktive Definition der Negation $\neg F$ einer Formel F

1. $\neg R(t_1, \ldots, t_n) := \bar{R}(t_1, \ldots, t_n)$;
   $\neg \bar{R}(t_1, \ldots, t_n) := R(t_1, \ldots, t_n)$.
2. $\neg(F \wedge G) := (\neg F \vee \neg G)$; $\neg(F \vee G) := (\neg F \wedge \neg G)$.

3. $\neg\forall x^\alpha F(x^\alpha) :\equiv \exists x^\alpha \neg F(x^\alpha)$; $\neg\exists x^\alpha F(x^\alpha) :\equiv \forall x^\alpha \neg F(x^\alpha)$.

4. $\neg\forall x \in t F(x) :\equiv \exists x \in t \neg F(x)$; $\neg\exists x \in t F(x) :\equiv \forall x \in t \neg F(x)$.

Wir schreiben $(s \in t)$, $(s \bar{\in} t)$, $(s \equiv t)$ bzw. $(s \bar{\equiv} t)$ für $\in(s,t)$, $\bar{\in}(s,t)$, $\equiv(s,t)$ bzw. $\bar{\equiv}(s,t)$ und lassen bei Formeln in der Regel die äußeren Klammern fort. Durch Unterstreichen $\underline{t}$ bezeichnen wir eine endliche Folge von V-Termen $t_1, \ldots, t_n$. Ist $\underline{t} = t_1, \ldots, t_n$, so schreiben wir $\alpha \# \underline{t}$ für $\alpha \# sch(t_1) \# \ldots \# sch(t_n)$. Außerdem setzen wir

$$A \to B :\equiv \neg A \vee B,$$

$$A \leftrightarrow B :\equiv (A \to B) \wedge (B \to A),$$

$$\begin{aligned} s = t \;&:\equiv \big(\bar{M}(s) \wedge \bar{M}(t) \wedge s \equiv t\big) \vee \big(M(s) \wedge M(t) \wedge \\ &\qquad \forall x \in s\,(x \in t) \wedge \forall x \in t(x \in s)\big), \\ s \neq t \;&:\equiv \neg(s = t), \\ M_\alpha \;&:\equiv \{x^\alpha : x^\alpha = x^\alpha\}. \end{aligned}$$

2.1.6. Induktive Definition des Ranges $rn(F)$ und der Höhe $ho(F)$ einer Formel F.

1. Ist R eine von $\in$, Ad verschiedene n-stellige Relationskonstante $(n \geqq 1)$ und sind $t_1, \ldots, t_n$ V-Terme der Schichten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so sei
   $rn\big(R(t_1, \ldots, t_n)\big) :\equiv rn\big(\bar{R}(t_1, \ldots, t_n)\big) :\equiv \omega \cdot \max(3\alpha_1 \dot{-} 2, \ldots, 3\alpha_n \dot{-} 2)$
   $ho\big(R(t_1, \ldots, t_n)\big) :\equiv ho\big(\bar{R}(t_1, \ldots, t_n)\big) :\equiv \omega^{3\alpha_1 \dot{-} 2} \# \ldots \# \omega^{3\alpha_n \dot{-} 2}$.

2. Sind s und t V-Terme der Schichten α und β, so sei

   $rn(s \in t) :\equiv rn(s \bar{\in} t) :\equiv \omega \cdot \max(3\alpha \dot{-} 1, 3\beta \dot{-} 2)$,

   $ho(s \in t) :\equiv ho(s \bar{\in} t) :\equiv \omega^{3\alpha \dot{-} 1} \# \omega^{3\beta \dot{-} 2}$,

   $rn\big(Ad(s)\big) :\equiv rn\big(\overline{Ad}(s)\big) :\equiv \omega \cdot (3\alpha \dot{-} 1)$,

   $ho\big(Ad(s)\big) :\equiv ho\big(\overline{Ad}(s)\big) :\equiv \omega^{3\alpha \dot{-} 1}$.

3. $rn(F \wedge G) :\equiv rn(F \vee G) :\equiv \max\big(rn(F), rn(G)\big) + 1$,

   $ho(F \wedge G) :\equiv ho(F \vee G) :\equiv ho(F) \# ho(G)$.

4. $rn(\forall x^\alpha F(x^\alpha)) := rn(\exists x^\alpha F(x^\alpha)) := \max(\omega \cdot 3\alpha,$
$rn(F(u)) + 1),$
$ho(\forall x^\alpha F(x^\alpha)) := ho(\exists x^\alpha F(x^\alpha)) := \omega^{3\alpha} \# ho(F(u)).$

5. Ist t ein V-Term der Schicht α, so sei
$rn(\forall x \in t F(x)) := rn(\exists x \in t F(x)) := rn(u \in t \wedge F(u)) + 2$
$ho(\forall x \in t F(x)) := ho(\exists x \in t F(x)) := \omega^{3\alpha \dot{-} 3} \# ho(u \in t \wedge$
$\wedge F(u)) + 2.$

2.1.7. Lemma

(a) $rn(F) = rn(\neg F)$ und $ho(F) = ho(\neg F)$.

(b) Ist $\alpha = \max(k_{II}(F) \cup k_{II}(\neg F))$, so ist F eine α-Formel mit $\omega \cdot (3\alpha \dot{-} 2) \leq rn(F) < \omega \cdot 3\alpha + \omega$.

2.1.8. Satz

(a) Für $i = 0,1$: $rn(F_i) < rn(F_0 \wedge F_1)$.

(b) Für $\alpha \leq \sigma$: $rn(F(a^\alpha)) < rn(\forall x^\sigma F(x^\sigma))$.

(c) $rn(\forall x^\sigma(x^\sigma \in a^{\sigma+1} \rightarrow F(x^\sigma))) < rn(\forall x \in a^{\sigma+1} F(x))$.

(d) $rn(\exists x^\beta(a = x^\beta \wedge F(x^\beta))) < rn(a \in \{x^\beta : F(x^\beta)\})$.

(e) Für $\varkappa < \sigma$: $rn(a^\sigma = M_\varkappa) < rn(Ad(a^\sigma))$.

2.2. Herleitungen in $RS(I)$

Zur Formalisierung verwenden wir den Tait-Kalkül. Mit Γ, Δ werden endliche Mengen von $RS(I)$-Sätzen bezeichnet. Diese Satzmengen sind disjunktiv zu interpretieren, und wir schreiben (z. B.) Γ, Δ, A, B für $\Gamma \cup \Delta \cup \{A, B\}$.

2.2.1. Definition

$k_{II}(\Gamma) := \bigcup \{k_{II}(A) : A \in \Gamma\}.$

Axiome von $RS(I)$

$(A\ 1)$ $\Gamma, \bar{M}(\bar{m})$

$(A\ 2)$ $\Gamma, M(a^{\alpha+1})$

$(A\ 3)$ $\Gamma, a \notin \overline{m}$

$(A\ 4)$ $\Gamma, \forall x \in \overline{m}\, F(x)$

$(A\ 5)$ $\Gamma, R_Z(\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_n)$, wenn $Z(m_1, \ldots, m_n)$ wahr ist.

$(A\ 6)$ $\Gamma, \overline{R_Z}(\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_n)$, wenn $Z(m_1, \ldots, m_n)$ falsch ist.

$(A\ 7)$ $\Gamma, \overline{R_Z}(a_1, \ldots, a_n)$, wenn $0 < sch(a_i)$ für ein $1 \leqq i \leqq n$ ist.

$(A\ 8)$ $\Gamma, \bar{P}(a^\alpha), P(a^\alpha)$

$(A\ 9)$ $\Gamma, \overline{Ad}(a^\alpha)$, wenn $\alpha < 0^+$ ist.

Schlüsse von $RS(I)$

$(\wedge)$ Γ_0, A_0 und $\Gamma_1, A_1 \vdash \Gamma_0, \Gamma_1, A_0 \wedge A_1$

$(\vee)$ Γ, A_0 oder $\Gamma, A_1 \vdash \Gamma, A_0 \vee A_1$

$(b\,\forall)$ $\Gamma, \forall x^\sigma(x^\sigma \in a^{\sigma+1} \to F(x^\sigma)) \vdash \Gamma, \forall x \in a^{\sigma+1} F(x)$

$(b\,\exists)$ $\Gamma, \exists x^\sigma(x^\sigma \in a^{\sigma+1} \wedge F(x^\sigma)) \vdash \Gamma, \exists x \in a^{\sigma+1} F(x)$

$(\in)$ $\Gamma, \exists x^\beta(a = x^\beta \wedge F(x^\beta)) \vdash \Gamma, a \in \{x^\beta : F(x^\beta)\}$

$(\notin)$ $\Gamma, \forall x^\beta(a \neq x^\beta \vee \neg F(x)) \vdash \Gamma, a \notin \{x^\beta : F(x^\beta)\}$

$(\exists^\sigma)$ $\Gamma, F(a^\alpha) \vdash \Gamma, \exists x^\sigma F(x^\sigma)$, wenn $\alpha \leqq \sigma$ ist.

(Ad^σ) $\Gamma, a^\sigma = M_\varkappa \vdash \Gamma, Ad(a^\sigma)$, wenn $\varkappa < \sigma$ ist.

$(Cl\varkappa)$ $\Gamma, \forall x^\alpha \exists y^\varkappa A(x^\alpha, y^\varkappa) \vdash \Gamma, \exists z^\varkappa \forall x^\alpha \exists y \in z^\varkappa A(x^\alpha, y)$, wenn $\alpha < \varkappa$ und $A(u, v)$ eine $\Delta_0(\varkappa)$-Formel ist.

$(\forall^\sigma)$ $\Gamma, F(a^\xi)$ für alle $\xi \leqq \sigma \vdash \Gamma, \forall x^\sigma F(x^\sigma)$

$(\overline{Ad}^\sigma)$ $\Gamma, a^\sigma \neq M_\varkappa$ für alle $\varkappa < \sigma \vdash \Gamma, \overline{Ad}(a^\sigma)$, wenn $0^+ < \sigma$ ist.

Die Schlüsse $(\forall^\sigma)$ und $(\overline{Ad}^\sigma)$ nennen wir σ-kritisch. Die Schlüsse $(\wedge)$—$(\overline{Ad}^\sigma)$ führen neue logische Zeichen oder Konstanten ein. Die Formel der Konklusion, in der dieses Symbol eingeführt wird, heißt Hauptformel dieses Schlusses.

Schnitte von $RS(I)$

Γ_0, A und $\Gamma_1, \neg A \vdash \Gamma_0, \Gamma_1$

Die in einem Schnitt beseitigten Formeln A und $\neg A$ heißen Schnittformeln; der Rang eines Schnittes ist der Rang seiner Schnittformeln.

2.2.2. Bemerkung

Die Stärke von $RS(I)$ liegt in den Schlüssen $(Cl\varkappa)$; nur durch sie wird das System imprädikativ.

2.2.3. Induktive Definition von $\frac{\alpha}{\varrho}\, \Gamma$

1. Ist Γ ein Axiom von $RS(I)$, so gelte $\frac{\alpha}{\varrho}\, \Gamma$ für alle ϱ und alle α mit $k_\Pi(\Gamma) \lll \alpha$.

2. Gilt $\frac{\alpha_i}{\varrho}\, \Gamma_i$ mit $\alpha_i \ll \alpha$ für jede Prämisse eines nicht kritischen Schlusses oder eines Schnittes vom Rang $< \varrho$ mit Konklusion Γ und ist $\Gamma \subset \Lambda$ sowie $k_\Pi(\Lambda) \lll \alpha$, so gelte $\frac{\alpha}{\varrho}\, \Lambda$.

3. Unter den Voraussetzungen

   (σ 1) $\frac{\alpha_\xi}{\varrho}\, \Gamma, F(a^\xi)$ für alle a^ξ mit $\xi \leqq \sigma$,

   (σ 2) $< (\alpha_\xi : \xi \in [\sigma]), \alpha >$ ist ein σ-Paar,

   (σ 3) $\Gamma, \forall x^\sigma F(x^\sigma) \subset \Lambda$ und $k_\Pi(\Lambda) \lll \alpha$

   gelte $\frac{\alpha}{\varrho}\, \Lambda$.

4. Unter den Voraussetzungen

   (σ 1) $\frac{\alpha_\varkappa}{\varrho}\, \Gamma, a^\sigma \neq M_\varkappa$ für alle $\varkappa < \sigma$,

   (σ 2) $< (\alpha_\varkappa : \varkappa < \sigma), \alpha >$ ist ein σ-Paar,

   (σ 3) $\Gamma, \overline{Ad}(a^\sigma) \subset \Lambda$ und $k_\Pi(\Lambda) \lll \alpha$

   gelte $\frac{\alpha}{\varrho}\, \Lambda$.

2.2.4. Folgerung

(a) $\frac{\alpha}{\varrho}\, \Gamma \Rightarrow k_\Pi(\Gamma) \lll \alpha$.

(b) $\frac{\alpha}{\varrho}\, \Gamma, \alpha \lll \beta, \varrho \leqq \xi \Rightarrow \frac{\beta}{\xi}\, \Gamma$.

2.2.5. Lemma (Strukturschlußlemma)

$\frac{\alpha}{\varrho}\, \Gamma, \Gamma \subset \Lambda, k_\Pi(\Lambda) \lll \alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{\varrho}\, \Lambda$.

In den folgenden Beweisen werden wir Folgerung 2.2.4, Lemma 2.2.5 und die Ordinalzahlenlemmata ohne weitere Erwähnung verwenden.

2.2.6. Satz (Inversionssatz)

Für $\xi, \varkappa < \sigma$ und Limeszahlen $\tau < \sigma$ gilt:

(a) $\vdash^{\alpha}_{\varrho} \Gamma, \forall x^{\sigma} F(x^{\sigma}) \Rightarrow \vdash^{\alpha \# \xi}_{\varrho} \Gamma, F(a^{\xi})$.

(b) $\vdash^{\alpha}_{\varrho} \Gamma, \forall x^{\sigma} F(x^{\sigma}) \Rightarrow \vdash^{\alpha \# \tau}_{\varrho} \Gamma, \forall x^{\tau} F(x^{\tau})$.

(c) $\vdash^{\alpha}_{\varrho} \Gamma, \overline{Ad}(a^{\sigma}) \quad \Rightarrow \vdash^{\alpha \# \varkappa}_{\varrho} \Gamma, a^{\sigma} \neq M_{\varkappa}$.

Beweis von (a) und (c) durch Induktion nach α mit Hilfe von Lemma 1.3; (b) folgt unmittelbar aus (a).

2.2.7. Lemma (Kollabierungslemma)

$\vdash^{\alpha}_{\varrho} \Gamma, \Gamma \subset \Sigma(\varkappa), \varrho \leqq \varkappa \Rightarrow \vdash^{\bar{D}_{\varkappa}\alpha}_{\varrho} \Gamma$.

Beweis durch Induktion nach α. Aufgrund der Voraussetzungen gilt $k_{\Pi}(\Gamma) \leqq \alpha$ und $k_{\Pi}(\Gamma) < \varkappa$. Daher gilt auch $k_{\Pi}(\Gamma) \leqq \bar{D}_{\varkappa}\alpha$.

1. Ist Γ ein Axiom, so folgt daraus die Behauptung.
2. Ist Γ durch einen nicht kritischen Schluß oder einen Schnitt vom Rang $< \varrho$ erschlossen, so ist jede Prämisse eine Menge von $\Sigma(\varkappa)$-Sätzen. Die Behauptung folgt dann aus der I.V. (Induktionsvoraussetzung).
3. Ist Γ durch einen σ-kritischen Schluß erschlossen, so ist $\sigma < \varkappa$; die Behauptung folgt daher ebenfalls aus der I.V..

2.3. Beweisbare Sätze in *RS(I)*

In diesem Abschnitt geben wir einige Sätze an, die sich in $RS(I)$ zeigen lassen. Wir verzichten auf die genaue Ausführung der Beweise und verweisen für Details auf [Jäger, 1979].

2.3.1. Satz (Aussagenlogische Vollständigkeit)

$\vdash^{ho(A)}_{0} \neg A, A$.

Beweis durch Induktion nach $ho(A)$.

2.3.2. Lemma

Für $\gamma = \omega^{3\alpha \dot{-} 3} \# \omega^{3\alpha \dot{-} 2} + 6$ und $\alpha \leqq \beta$ gilt:

(a) $\vdash^{\gamma}_{0} a^{\alpha} = a^{\alpha}$

(b) $\vdash^{\gamma \# \beta + 3}_{0} a^{\alpha} \in M_{\beta}$.

Beweis mit Satz 2.3.1.

2.3.3. Lemma (Gleichheitslemma)

Für $\delta = \omega^{3\alpha \dot{-} 1} \# \omega^{3\beta \dot{-} 1} \# \omega^{3\gamma \dot{-} 1}$ und $\varrho = \omega \cdot \max(3\alpha \dot{-} 1, 3\beta \dot{-} 1, 3\gamma \dot{-} 1)$ gilt:

(a) $\vdash^{\delta}_{\varrho} a^{\alpha} \neq b^{\beta}, a^{\alpha} \notin c^{\gamma}, b^{\beta} \in c^{\gamma}$,

(b) $\vdash^{\delta + 2}_{\varrho} a^{\alpha} \neq b^{\beta}, a^{\alpha} \neq c^{\gamma}, b^{\beta} = c^{\gamma}$,

(c) $\vdash^{\delta}_{\varrho} a^{\alpha} \neq b^{\beta}, c^{\gamma} \notin a^{\alpha}, c^{\gamma} \in b^{\beta}$.

Beweis durch simultane Induktion nach $a \# \beta \# \gamma$.

2.3.4. Satz (Gleichheitssatz)

Ist $A[u, \underline{v}]$ eine Grundformel der Länge k, so gilt für alle ε-Zahlen σ und alle Terme a^{α}, b^{β}, $\underline{c}$ mit Schichten $< \sigma$:

$$\vdash^{\sigma \cdot k \# \alpha \# \beta \# \underline{c}}_{\sigma + 2k} a^{\alpha} \neq b^{\beta}, \neg A^{\sigma}[a^{\alpha}, \underline{c}], A^{\sigma}[b^{\beta}, \underline{c}].$$

Beweis mit Hilfe von Lemma 2.3.3 durch Induktion nach k.

2.3.5. Satz (Fundierungssatz)

Zu jeder Grundformel $A[u, \underline{v}]$ gibt es ein k, so daß für alle ε-Zahlen σ und alle Terme $\underline{c}$ mit Schichten $< \sigma$ gilt:

$$\vdash^{\sigma \cdot k \# \underline{c}}_{0} \forall x^{\sigma}(\forall y \in x^{\sigma} A^{\sigma}[y, \underline{c}] \rightarrow A^{\sigma}[x^{\sigma}, \underline{c}]) \rightarrow \forall x^{\sigma} A^{\sigma}[x^{\sigma}, \underline{c}].$$

Beweis. Wir wählen ein geeignetes m und zeigen

$$\vdash^{\sigma \cdot m \# \underline{c} \# \omega^{\alpha + 1}}_{0} \neg \forall x^{\sigma}(\forall y \in x^{\sigma} A^{\sigma}[y, \underline{c}] \rightarrow A^{\sigma}[x^{\sigma}, \underline{c}]), A^{\sigma}[a^{\alpha}, \underline{c}]$$

für alle ε-Zahlen σ und alle Terme a^{α}, $\underline{c}$ mit Schichten $< \sigma$ durch Induktion nach α. Daraus folgt die Behauptung unmittelbar.

2.3.6. Satz (Vollständige Induktion)

Zu jeder Grundformel $A[u, \underline{v}]$ gibt es kein k, so daß für alle ε-Zahlen und alle Terme mit Schichten $< \sigma$ gilt:

$$\left|\frac{\sigma \cdot k \# \underline{c}}{0}\right. \forall x^0 (\forall y^0 (y^0 < x^0 \rightarrow A^\sigma[y^0, \underline{c}]) \rightarrow A^\sigma[x^0, \underline{c}]) \rightarrow \forall x^0 A^\sigma[x^0, \underline{c}].$$

2.3.7. Satz (Paar- und Vereinigungsmenge)

Für $\alpha, \beta < \tau = \omega \cdot \sigma$, $\gamma = \omega^{3\alpha \dot{-} 1} \# \omega^{3\beta \dot{-} 1} \# 11$ und $\delta = \omega^{3\alpha \dot{-} 1} + 1$ gilt:

(a) $\left|\frac{\gamma}{0}\right. \exists x^\tau (a^\alpha \in x^\tau \wedge b^\beta \in x^\tau)$,

(b) $\left|\frac{\delta}{0}\right. \exists z^\tau \forall x \in a^\alpha \forall y \in x (y \in z^\tau)$.

Beweis mit Lemma 2.3.2.

2.3.8. Satz (Δ_0-Separation)

In jeder Δ_0-Grundformel $A[u, \underline{v}]$ gibt es ein k, so daß für alle ε-Zahlen σ und alle Terme a^α, $\underline{c}$ mit Schichten $< \sigma$ gilt:

$$\left|\frac{\sigma \cdot k \# \alpha \# \underline{c}}{\sigma + k}\right. \exists z^\sigma (M(z^\sigma) \wedge \forall x^\sigma (x^\sigma \in z^\sigma \leftrightarrow x^\sigma \in a^\alpha \wedge A^\sigma[x^\sigma, \underline{c}])).$$

Beweis. Wir setzen $\tau = \alpha \# \underline{c}$; dann kann man zeigen, daß der Term $b^{\tau+1} := \{x^\tau : x^\tau \in a^\alpha \wedge A[x^\tau, \underline{c}]\}$ ein Beispiel für den obigen Existenzsatz ist.

2.3.9. Satz (Δ_0-Kollektion)

Ist $A[u, v, \underline{w}]$ eine Δ_0-Grundformel, so gilt für alle $\varkappa$ und alle Terme α^α, $\underline{c}$ mit Schichten $< \varkappa$:

$$\left|\frac{\varkappa \cdot 2 \# \alpha \# \underline{c}}{0}\right. \forall x^\alpha \exists y^\varkappa A[x^\alpha, y^\varkappa, \underline{c}] \rightarrow \exists z^\varkappa \forall x^\alpha \exists y \in z^\varkappa A[x^\alpha, y, \underline{c}].$$

Beweis mit Satz 2.3.1 und der Schlußregel $(Cl\varkappa)$.

2.3.10. Satz

Für $\alpha^+ < \sigma$: $\left|\frac{\omega^{\alpha^+} + 2 \# \alpha}{0}\right. \exists y^\sigma (a^\alpha \in y^\sigma \wedge Ad(y^\sigma))$.

Beweis mit Lemma 2.3.2 und der Schlußregel $(Ad^{\alpha^+ + 1})$.

2.3.11. Satz

Zu jeder Grundformel $A[\underline{u}]$ gibt es ein k, so daß für alle ε-Zahlen σ und alle Terme $\underline{c}$ mit Schichten $< \sigma$ gilt:

$$\frac{\sigma \cdot k \# \underline{c}}{0} \neg A^\sigma[\underline{c}], A^{M\sigma}[\underline{c}].$$

Dabei erhalten wir $A^{M\sigma}[\underline{c}]$, indem wir in $A^\sigma[\underline{c}]$ alle Vorkommen von $\forall x^\sigma(\ldots x^\sigma\ldots)$ und $\exists x^\sigma(\ldots x^\sigma\ldots)$ durch $\forall x \in M_\sigma(\ldots x\ldots)$ und $\exists x \in M_\sigma(\ldots x\ldots)$ ersetzen.

Beweis durch Induktion nach der Länge von $A[\underline{u}]$.

2.4. Schnittelimination in $RS(I)$

2.4.1. Definition

Mit $[A]^{(\alpha)}$ bezeichnen wir die Kollektion der Sätze, die dadurch aus A entstehen, daß jedes Vorkommen von $\exists x^\gamma(\ldots x^\gamma\ldots)$ mit $\alpha < \gamma$ durch $\exists x^\beta(\ldots x^\beta\ldots)$ oder $\exists x \in M_\beta(\ldots x\ldots)$ mit $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ ersetzt wird. Mit $A^{(\alpha)}$ teilen wir ein beliebiges Element von $[A]^{(\alpha)}$ mit.

2.4.2. (Begrenzungssatz)

$$\frac{\alpha}{\varrho} A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \frac{\omega\alpha+1}{\varrho} A_1^{(\alpha)}, \ldots, A_n^{(\alpha)}.$$

Beweis durch Induktion nach α. Es sei $\Gamma := \{A_1, \ldots, A_n\}$ und $\Gamma^{(\alpha)} := \{A_1^{(\alpha)}, \ldots, A_n^{(\alpha)}\}$. Die Behauptung ist trivial oder folgt unmittelbar aus der I.V., falls Γ nicht die Konklusion eines $(\exists^\sigma)$- oder $(Cl\varkappa)$-Schlusses mit $\sigma > \alpha$ oder $\varkappa > \alpha$ ist. Andernfalls unterscheiden wir:

1. Es gibt ein $\beta \ll \alpha$ und einen Term c^γ mit

(1) $\frac{\beta}{\varrho} \Gamma_0, F(c^\gamma),$

wobei $\Gamma_0, \exists x^\sigma F(x^\sigma) \subset \Gamma$ ist. Aus der I.V. erhalten wir

(2) $\frac{\omega^\beta+1}{\varrho} \Gamma_0^{(\alpha)}, F^{(\alpha)}(c^\gamma).$

Tritt c^γ in $F(c^\gamma)$ auf, so ist $\gamma \ll \beta$; tritt c^γ nicht in $F(c^\gamma)$ auf, so ersetzen wir c^γ durch $\bar{0}$. Wir können also $\gamma \leqq \beta$ annehmen.

2. Es gibt ein $\beta \ll \alpha$, so daß

(3) $\vdash_{\varrho}^{\beta} \Gamma_0, \forall x^\tau \exists y^\varkappa A(x^\tau, y^\varkappa)$

und $\Gamma_0, \exists z^\varkappa \forall x^\tau \exists y \in z^\tau A(x^\tau, y) \subset \Gamma$ ist. Mit der I.V. erhalten wir hier

(4) $\vdash_{\varrho}^{\omega\beta+1} \Gamma_0^{(\alpha)}, \forall x^\tau \exists y \in M_\beta A^{(\alpha)}(x^\tau, y)$.

Aus (2) und (4) erhalten wir unmittelbar oder mit Hilfe von Lemma 2.3.2 die Behauptung.

2.4.3. Lemma

Ist Γ, A ein Axiom mit $k_\Pi(\Gamma) \leqq \alpha$, so gilt

$\vdash_{\varrho}^{\beta} \Lambda, \neg A \Rightarrow \vdash_{\varrho}^{\alpha \# \beta} \Gamma, \Lambda$.

Beweis durch Induktion nach β.

2.4.4. Lemma (Prädikatives Eliminationslemma)

Ist $rn(A) = \varrho$ keine zulässige Ordinalzahl, so gilt:

$\vdash_{\varrho}^{\alpha} \Gamma, A$ und $\vdash_{\varrho}^{\beta} \Lambda, \neg A \Rightarrow \vdash_{\varrho}^{\alpha \# \beta} \Gamma, \Lambda$.

Beweis durch Induktion nach $\alpha \# \beta$.

1. Ist Γ, A ein Axiom, so folgt die Behauptung aus Lemma 2.4.3.
2. Ist Γ, A durch einen Schluß (S) erschlossen, dessen Hauptformel nicht A ist, dann gibt es $\alpha_i < \alpha$, so daß für alle Prämissen dieses Schlusses $\vdash_{\varrho}^{\alpha_i} \Gamma_i$ gilt. Mit der I.V. folgt $\vdash_{\varrho}^{\alpha_i \# \beta} \Gamma_i \setminus \{A\}, \Lambda$, und wir erhalten daraus mit (S) die Behauptung.
3. Γ, A und $\Lambda, \neg A$ sind Konklusionen von nicht kritischen Schlüssen mit Hauptformeln A und $\neg A$. Dann gibt es $\alpha_0 \ll \alpha$, $\beta_0 \ll \beta$ und eine Formel B, die nach Satz 2.1.8 einen Rang $< \varrho$ hat, so daß $\vdash_{\varrho}^{\alpha_0} \Gamma_0, B$ und $\vdash_{\varrho}^{\beta_0} \Lambda_0, \neg B$, wobei $\Gamma_0 \subset \Gamma, A$ und $\Lambda_0 \subset \Lambda, \neg A$ ist. Mit der I.V. und den Voraussetzungen erhalten wir $\vdash_{\varrho}^{\alpha_0 \# \beta} \Gamma_0 \setminus \{A\}, \Lambda, B$ sowie $\vdash_{\varrho}^{\alpha \# \beta_0} \Gamma, \Lambda_0 \setminus \{\neg A\}, \neg B$ und daraus mit einem Schnitt vom Rang $< \varrho$ die Behauptung.

4. Γ, A ist die Konklusion eines $(\exists^\sigma)$-Schlusses mit Hauptformel $A = \exists x^\sigma F(x^\sigma)$. Dann gibt es ein $\alpha_0 \ll \alpha$ und einen Term c^γ mit

   (1) $\vdash^{\alpha_0}_{\varrho} \Gamma_0, F(c^\gamma)$,

   wobei $\gamma \leqq \sigma$ und $\Gamma_0 \subset \Gamma, A$ ist. Nach Satz 2.1.8(b) ist $rn(F(c^\gamma)) < \varrho$. Aus (1) folgt mit der I.V.

   (2) $\vdash^{\alpha_0 \# \beta}_{\varrho} \Gamma_0 \setminus \{A\}, F(c^\gamma)$.

   Mit dem Inversionssatz 2.2.6(a) erhalten wir außerdem

   (3) $\vdash^{\beta \# \gamma}_{\varrho} A, \neg F(c^\gamma)$.

   Tritt c^γ in $F(c^\gamma)$ auf, so folgt aus (1) $\gamma \lll \alpha_0$. Tritt c^γ nicht in $F(c^\gamma)$ auf, so ersetzen wir γ durch 0. In jedem Fall folgt die Behauptung aus (2) und (3) mit einem Schritt vom Rang $< \varrho$.

5. Ist Γ, A die Konklusion eines (Ad^σ)-Schlusses mit Hauptformel A, so zeigen wir die Behauptung analog zu 4.

In allen noch verbleibenden Fällen folgt die Behauptung aus Symmetriegründen.

2.4.5. Satz

Ist ϱ nicht zulässig, so gilt

$$\vdash^{\alpha}_{\varrho+1} \Gamma \Rightarrow \vdash^{\omega\alpha}_{\varrho} \Gamma.$$

Beweis mit Hilfe von Lemma 2.4.4.

2.4.6. Definition

Für alle natürlichen Zahlen n gelte:

$it_1[\alpha, \beta] := \bar{\Theta}\alpha(\alpha \# \beta)$ und $it_{n+1}[a, \beta] := \bar{\Theta}\alpha(\alpha \# it_n[\alpha, \beta])$.

2.4.7. Lemma

Gilt $k_\Pi(A) \lll \alpha_0 \ll \alpha$, $k_\Pi(\neg A) \lll \alpha_1 \ll \alpha$, $\varrho \neq 0$ und $\beta \leqq rn(A) < \beta + \omega^\varrho \leqq \beta^+$, so gibt es ein n und ein $\sigma < \varrho$ mit $rn(A) < \beta + \omega^\sigma \cdot n$ und $it_n[\sigma, \bar{\Theta}\varrho(\varrho \# \alpha_0) \# \bar{\Theta}\varrho(\varrho \# \alpha_1)] \ll \ll \bar{\Theta}\varrho(\varrho \# \alpha)$.

Beweis. Ist $rn(A) = \beta$, so setzen wir $n = 1$ und $\sigma = 0$. Anderenfalls gibt es $\sigma_1 \geqq \ldots \geqq \sigma_k$ mit $rn(A) = \beta + \omega^{\sigma_1} + \ldots + \omega^{\sigma_k}$. Dann setzen wir $n = k + 1$ und $\sigma = \sigma_1$. Mit Hilfe von Lemma 2.1.7(b) und etwas Ordinalzahlenrechnung folgt die Behauptung.

2.4.8. Satz (Prädikative Schnittelimination)

Ist β nicht zulässig und $\beta + \omega^\varrho \leqq \beta^+$, so gilt:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta + \omega^\varrho}\right. \Gamma \Rightarrow \left|\frac{\overline{\Theta}\varrho\,(\varrho \,\#\, \alpha)}{\beta}\right. \Gamma.$$

Beweis durch Hauptinduktion nach ϱ und Nebeninduktion nach α. Ist $\varrho = 0$, so folgt die Behauptung aus Satz 2.4.5. Ist $\varrho \neq 0$, so unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Γ ist ein Axiom, Konklusion eines Schlusses oder eines Schnittes vom Rang $< \beta$. Dann folgt die Behauptung aus der I.V.
2. Γ ist die Konklusion eines Schnittes mit Schnittformel A, für die $\beta \leqq rn(A) < \beta + \omega^\varrho$ gilt. Dann gibt es $\alpha_0, \alpha_1 \ll \alpha$ mit

   (1) $\left|\frac{\alpha_0}{\beta + \omega^\varrho}\right. \Gamma_0, A$ (2) $\left|\frac{\alpha_1}{\beta + \omega^\varrho}\right. \Gamma_1, \neg A$

   wobei $\Gamma_0, \Gamma_1 \subset \Gamma$ ist. Mit der Neben-I.V. erhalten wir

   (3) $\left|\frac{\overline{\Theta}\varrho\,(\varrho \,\#\, \alpha_0)}{\beta}\right. \Gamma_0, A$ (4) $\left|\frac{\overline{\Theta}\varrho\,(\varrho \,\#\, \alpha_1)}{\beta}\right. \Gamma_1, \neg A$

   Aus (1) und (2) folgt, daß $k_{II}(A) \lleq \alpha_0$ und $k_{II}(\neg A) \lleq \alpha_1$ ist. Wir wählen nun n und σ entsprechend Lemma 2.4.7 und erhalten mit einem Schnitt aus (3) und (4)

   (5) $\left|\frac{\overline{\Theta}\varrho\,(\varrho \,\#\, \alpha_0) \,\#\, \overline{\Theta}\varrho\,(\varrho \,\#\, \alpha_1)}{\beta + \omega^\sigma \cdot n}\right. \Gamma_0, \Gamma_1.$

   Durch n-fache Anwendung der Haupt-I.V. folgt daraus nach Lemma 2.4.7 die Behauptung.

2.4.9. Lemma (Imprädikatives Eliminationslemma)

Unter den Voraussetzungen

(a) $\left|\frac{\alpha}{\varkappa}\right. \Gamma, \{\forall x^\varkappa F_i(x^\varkappa) : 1 \leqq i \leqq m\}, \exists y^\varkappa G(y^\varkappa),$

(b) $\vdash^{\beta}_{\varkappa} \Delta, \forall y^{\varkappa} \neg G(y^{\varkappa})$,

(c) $\Gamma \subset \Sigma(\varkappa)$ und $\{G(u), F_1(u), \ldots, F_m(u)\} \subset \Delta_0(\varkappa)$

gilt $\vdash^{\alpha \# \beta \# \varkappa \cdot (m+1)}_{\varkappa} \Gamma, \Delta, \{\forall x^{\varkappa} F_i(x^{\varkappa})\colon 1 \leqq i \leqq m\}$.

Beweis. Es seien $\underline{c} = c_1, \ldots, c_m$ beliebige Terme mit Schichten $< \varkappa$. Wir schreiben $\Gamma_{\underline{c}}$ für $\Gamma, \{F_i(c_i)\colon 1 \leqq i \leqq m\}$. Mit dem Inversionssatz 2.2.6(a) erhalten wir aus (a)

(1) $\vdash^{\alpha \# \underline{c}}_{\varkappa} \Gamma_{\underline{c}}, \exists y^{\varkappa} G(y^{\varkappa})$.

Da $\Gamma_{\underline{c}}, \exists y^{\varkappa} G(y^{\varkappa}) \subset \Sigma(\varkappa)$ ist, folgt mit dem Kollabierungslemma 2.2.7 für $\gamma = \tilde{D}_{\varkappa}(\alpha \# \underline{c})$.

(2) $\vdash^{\gamma}_{\varkappa} \Gamma_{\underline{c}}, \exists y^{\varkappa} G(y^{\varkappa})$

und daraus mit dem Begrenzungssatz 2.4.2

(3) $\vdash^{\omega^{\gamma}+1}_{\varkappa} \Gamma_{\underline{c}}, \exists y^{\gamma} G(y^{\gamma})$.

Eine Anwendung des Inversionssatzes 2.2.6(b) auf Voraussetzung (b) ergibt außerdem

(4) $\vdash^{\beta \# \gamma}_{\varkappa} \Delta, \forall y^{\gamma} \neg G(y^{\gamma})$.

Man sieht sehr leicht, daß $rn(\exists y^{\gamma} G(y^{\gamma})) < \varkappa$ ist. Aus Voraussetzung (b) folgt außerdem $\varkappa \ll \beta$. Mit Hilfe von § 1 ergibt sich $\omega^{\gamma+1} \ll \alpha \# \beta \# \varkappa \# \underline{c}$ und $\beta \# \gamma \ll \alpha \# \beta \# \varkappa \# \underline{c}$. Mit einem Schnitt folgern wir daher aus (3) und (4)

(5) $\vdash^{\alpha \# \beta \# \varkappa \# \underline{c}}_{\varkappa} \Gamma_{\underline{c}}, \Delta$.

Mit $(\forall^{\varkappa})$-Schlüssen folgt daraus die Behauptung.

2.4.10. Satz

Ist $\Gamma \subset \Sigma(\varkappa)$ und sind $A_1, \ldots, A_n$ $\Pi_1(\varkappa)$-Sätze, so gilt

$\vdash^{\alpha}_{\varkappa+1} \Gamma, A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \vdash^{\omega\alpha}_{\varkappa} \Gamma, A_1, \ldots, A_n$.

Beweis durch Induktion nach α. Ist $\Gamma, A_1, \ldots, A_n$ nicht die Konklusion eines Schnittes vom Rang $\varkappa$, so folgt die Behauptung aus I.V. Anderenfalls gibt es einen Satz B vom Rang $\varkappa$ und $\alpha_0, \alpha_1 \ll \alpha$ mit

(1) $\vdash^{\alpha_0}_{\varkappa+1} \Gamma_0, B$ und (2) $\vdash^{\alpha_1}_{\varkappa+1} \Gamma_1, \neg B,$

wobei Γ_0, $\Gamma_1 \subset \Gamma$, $A_1, \ldots, A_n$ gilt. Da $rn(B) = \varkappa$ ist, können wir o. E. annehmen, daß B ein $\Pi_1(\varkappa)$-Satz und $\neg B$ ein $\Sigma_1(\varkappa)$-Satz ist. Mit der I.V. erhalten wir also

(3) $\vdash^{\omega^{\alpha_0}}_{\varkappa} \Gamma_0, B$ und (4) $\vdash^{\omega^{\alpha_1}}_{\varkappa} \Gamma_1, \neg B,$

und daraus mit dem imprädikativen Eliminationslemma 2.4.9

(5) $\vdash^{\omega^{\alpha_0} \# \omega^{\alpha_1} \# \varkappa \cdot (n+2)}_{\varkappa} \Gamma_0, \Gamma_1.$

Aus (1) folgt, daß $\varkappa \lll \alpha_0 \ll \alpha$ ist. Daher gilt $\omega^{\alpha_0} \# \omega^{\alpha_1} \# \varkappa \cdot (n+2) \ll \omega^\alpha$ und die Behauptung folgt unmittelbar aus (5).

2.4.11. Satz (Imprädikative Schnittelimination; 1. Teil)

$\vdash^{\alpha}_{\lambda+n} \Gamma$ und $\Gamma \subset \Sigma(\lambda) \Rightarrow \vdash^{\omega_n(\alpha)}_{\lambda} \Gamma.$

Beweis mit Satz 2.4.5 und Satz 2.4.10. Die Einschränkung $\Gamma \subset \Sigma(\lambda)$ ist nur nötig, wenn λ zulässig und $n = 1$ ist.

2.4.12. Satz (Imprädikative Schnittelimination; 2. Teil)

$\vdash^{\alpha}_{\nu} \Gamma$ und $\Gamma \subset \Sigma(\mu^+) \Rightarrow \vdash^{\alpha \# \nu}_{\mu+1} \Gamma.$

Beweis durch Hauptinduktion nach ν und Nebeninduktion nach α. Ist Γ nicht die Konklusion eines Schnittes vom Rang $> \mu$, so folgt die Behauptung aus der I.V. Anderenfalls gibt es $\alpha_0, \alpha_1 \ll \alpha$ sowie einen Satz A, $\mu < rn(A) < \nu$, mit

(1) $\vdash^{\alpha_0}_{\nu} \Gamma_0, A$ und (2) $\vdash^{\alpha_1}_{\nu} \Gamma_1, \neg A,$

wobei Γ_0, $\Gamma_1 \subset \Gamma$ ist. Wir setzen $\beta := \max(k_\Pi(A) \cup k_\Pi(\neg A))$ und $\lambda := S\beta$. Aus (1) und (2) folgt $\lambda \lll \beta \lll \max(\alpha_0, \alpha_1) \ll \alpha$. Mit Lemma 2.1.7(b) erhalten wir außerdem $\mu \leqq \lambda \leqq \beta \leqq rn(A) < \omega \cdot 3\beta + \omega < \lambda^+ \leqq \nu$. Wegen $\Gamma_0, \Gamma_1, A, \neg A \subset \Sigma(\lambda^+)$ ergibt die Neben-I.V. aus (1) und (2)

(3) $\vdash^{\alpha_0 \# \nu}_{\lambda+1} \Gamma_0, A$ und (4) $\vdash^{\alpha_1 \# \nu}_{\lambda+1} \Gamma_1, \neg A.$

Mit dem Kollabierungslemma 2.2.7 folgt für $\gamma_i = \bar{D}_{\lambda^+}(\alpha_i \# \nu)$ $(i = 0,1)$

(5) $\vdash^{\gamma_0}_{\lambda+1} \Gamma_0, A$ und (6) $\vdash^{\gamma_1}_{\lambda+1} \Gamma_1, \neg A$

und mit einem Schnitt für $\gamma = \gamma_0 \# \gamma_1$

(7) $\vdash^{\gamma}_{\lambda+1+\omega^{3\beta}+1} \Gamma_0, \Gamma_1.$

Nun wenden wir den schwachen Eliminationssatz 2.4.8 an und erhalten für $\delta = \bar{\Theta}(3\beta + 1)(3\beta \# \gamma + 1)$

(8) $\vdash^{\delta}_{\lambda+1} \Gamma_0, \Gamma_1.$

1. $\mu = \lambda$. Dann folgt die Behauptung unmittelbar aus (8), da sich mit Hilfe von § 1 $\delta \leqq \alpha \# \nu$ beweisen läßt.

2. $\mu < \lambda$. Dann ist $\Gamma_0, \Gamma_1 \subset \Sigma(\lambda)$ und Satz 2.4.11 ergibt

(9) $\vdash^{\delta}_{\lambda} \Gamma_0, \Gamma_1.$

Da $\lambda < \nu$ ist, schließen wir mit der Haupt-I.V. auf

(10) $\vdash^{\delta \# \lambda}_{\mu+1} \Gamma_0, \Gamma_1.$

Die Behauptung folgt unmittelbar aus (10), da sich mit Hilfe der Sätze von § 1 $\delta \# \lambda \leqq \alpha \# \nu$ beweisen läßt.

2.4.13. Bemerkung

Falls μ nicht zulässig ist, kann man in Satz 2.4.12 $\mu + 1$ durch μ ersetzen.

§ 3. Formale Systeme

3.1. Die Theorien *KPi* und $(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)$

KPi ist eine Theorie der Mengenlehre über den natürlichen Zahlen als Urelementen, die ein rekursiv unerreichbares Mengenuniversum beschreibt. Wir erhalten sie aus Barwises Theorie KPU^+ (vgl. [Barwise, 1975]), indem wir zusätzlich fordern, daß die Urelemente gerade die natürlichen Zahlen sind und daß jede Menge Element einer zulässigen Menge ist.

Es sei L die Sprache der Zahlentheorie mit Konstanten für alle natürlichen Zahlen und primitiv rekursiven Relationen. Die

Theorie KPi wird in der Sprache $L^* = L(\in, N, M, Ad)$ formuliert, wobei wir L erweitern um eine Mengenkonstante N für die Menge der natürlichen Zahlen und Relationskonstanten $\in$ für Elementbeziehung, M für Mengen sowie Ad für zulässige Mengen. Δ_0-, Σ- und Π-Formeln definieren wir wie üblich.

Neben den Axiomen und Schlußregeln des klassischen Prädikatenkalküls umfaßt KPi die Axiome der Zahlentheorie mit dem Schema der vollständigen Induktion, ontologische Axiome und mengentheoretische Axiome. Die ontologischen Axiome drücken aus, daß die natürlichen Zahlen die Menge N der Urelemente bilden und daß jedes Objekt entweder ein Urelement oder eine Menge ist. Entsprechend wird die Gleichheitsrelation definiert durch

$$a = b :\Leftrightarrow (\neg M(a) \wedge \neg M(b) \wedge a \equiv b) \vee (M(a) \wedge M(b) \wedge \\ \wedge \forall x \in a (x \in b) \wedge \forall x \in b (x \in a)),$$

wobei $\equiv$ die arithmetische Gleichheitsrelation bezeichnet. Das Gleichheitsschema wird bezüglich $=$ formuliert. Die mengentheoretischen Axiome lassen sich in zwei Gruppen gliedern. Zuerst die Axiome der Kripke-Platek-Mengenlehre:

(Pa) $\quad \exists z (a \in z \wedge b \in z)$,

(Ve) $\quad \exists z \forall y \in a \forall x \in y (x \in z)$,

(Fu) $\quad \forall x (\forall y \in x A(y) \rightarrow A(x)) \rightarrow \forall x A(x)$ für alle Formeln für alle Formeln A,

$(\Delta_0\text{-}Sep)$ $\quad \exists z (M(z) \wedge \forall x (x \in z \leftrightarrow x \in a \wedge A(x)))$ für alle Δ_0-Formeln A,

$(\Delta_0\text{-}Kol)$ $\quad \forall x \in a \exists y A(x, y) \rightarrow \exists z \forall x \in a \exists y \in z A(x, y)$ für alle Δ_0-Formeln A.

Die zweite Gruppe mengentheoretischer Axiome formalisiert, daß das Universum eine Vereinigung von zulässigen Mengen ist:

$(Ad\ 1)$ $\quad Ad(a) \rightarrow Tran(a) \wedge N \in a$,

$(Ad\ 2)$ $\quad Ad(a) \wedge Ad(b) \rightarrow a \in b \vee a = b \vee b \in a$,

$(Ad\ 3)$ $\quad Ad(a) \rightarrow (Pa)^a \wedge (Ve)^a \wedge (\Delta_0\text{-}Sep)^a \wedge (\Delta_0\text{-}Kol)^a$,

(Lim) $\quad \forall x \exists y (Ad(y) \wedge x \in y)$, wobei $(S)^a$ die Relativierung des Axioms oder Schemas (S) auf die Menge a bedeutet. Mit den Axiomen der ersten Gruppe folgt nach [Barwise, 1975] die Herleitbarkeit der Δ-Separation in KPi:

$$(\Delta\text{-}Sep)\quad \forall x \in a\,(A(x) \leftrightarrow B(x)) \rightarrow \exists z\,(M(z) \wedge \forall x\,(x \in z \leftrightarrow \\ \leftrightarrow x \in a \wedge A(x)))$$

für alle Σ-Formeln A und Π-Formeln B. Die Axiome der zweiten Gruppe ermöglichen es, in KPi eine formalisierte Version des Spector-Gandy-Theorems zu zeigen und damit das Axiom β zu beweisen. Das Axiom β erlaubt es uns, jede wohlfundierte Relation auf einer Menge ordnungserhaltend in eine Ordinalzahl abzubilden. Für Einzelheiten verweisen wir auf [Jäger, 1979] und [Jäger, 1981 b].

Die Theorie $(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)$ ist formuliert in der Sprache L_2 der Arithmetik 2. Stufe und umfaßt neben der rekursiven Zahlentheorie das Schema der vollständigen Induktion, das Schema der Δ^1_2-Komprehension

$$(\Delta^1_2\text{-}CA)\quad \forall x\,(A(x) \leftrightarrow B(x)) \rightarrow \exists Z\, \forall x\,(x \in Z \leftrightarrow A(x))$$

für alle Σ^1_2-Formeln A und Π^1_2-Formeln B sowie das Schema der Bar-Induktion

$$(BI)\quad WF(<) \rightarrow [\forall x\,(\forall y < x\, A(y) \rightarrow A(x)) \rightarrow \forall x\, A(x))$$

für beliebige arithmetische Relationen $<$ und beliebige Formeln A.

Jeder Satz F der Sprache L_2 läßt sich in natürlicher Weise in einen Satz F^* der Sprache L^* übersetzen, indem wir die Zahlenquantoren $\forall x(\ldots x \ldots)$, $\exists x(\ldots x \ldots)$ ersetzen durch $\forall x \in N\,(\ldots x \ldots)$, $\exists x \in N(\ldots x \ldots)$ und die Mengenquantoren $\forall Y\,(\ldots Y \ldots)$, $\exists Y(\ldots Y \ldots)$ durch $\forall y(y \subset N \rightarrow \ldots y \ldots)$, $\exists y(y \subset N \wedge \ldots y \ldots)$. Der Zusammenhang zwischen Analysis und Mengenlehre wird hergestellt durch den folgenden

Quantorensatz

Zu jeder Σ^1_2-Formel F aus L_2 gibt es eine Σ-Formel F_Σ aus L^* mit $KPi \vdash F^* \leftrightarrow F_\Sigma$.

Der Beweis dieses Satzes ist in [Jäger, 1979] und [Jäger, 1981 b] ausgeführt und basiert wieder auf einer Verwendung des Spector-Gandy-Theorems. Aus dem Quantorensatz, dem Axiom β und der Δ-Separation in KPi folgt unmittelbar, daß sich $(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)$ in KPi einbetten läßt. Dabei beweisen wir die (Übersetzung der) Bar-Induktion, indem wir die wohlfundierte Relation mit Hilfe des Axioms β zuerst in eine Ordinalzahl abbilden und dann das Fundierungsschema anwenden.

3.1.1. Satz

Ist F ein Satz aus L_2, so gilt

$$(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI) \vdash F \Rightarrow KPi \vdash F^*.$$

In [Feferman, 1975] und [Feferman, 1979] hat Feferman Theorien für explizite Mathematik eingeführt und gezeigt, daß sich seine Theorie T_0 in $(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)$ interpretieren läßt. Die beweistheoretische Ordinalzahl einer Theorie T bezeichnen wir mit $|T|$. $S \leqq T$ bedeute, daß sich die Theorie S beweistheoretisch auf die Theorie T reduzieren läßt; $S \equiv T$ drückt die beweistheoretische Äquivalenz aus. Wir erhalten also

3.1.2. Satz

(a) $T_0 \leqq (\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI) \leqq KPi.$

(b) $|T_0| \leqq |(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)| < |KPi|.$

3.2. Die beweistheoretische Abgrenzung

Wir erweitern nun die Sprache L^* von KPi um eine 1-stellige Relationskonstante P und formulieren die Axiome für $\Delta_0(P)$-Formeln anstatt für Δ_0-Formeln. Ist $\prec$ eine primitiv rekursive Wohlordnung auf den natürlichen Zahlen, so setzen wir

$$\mathrm{Prog}_{\prec}(P) :\Leftrightarrow \forall x \in N(\forall y \in N(y \prec x \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x)),$$
$$I_{\prec}(P) :\Leftrightarrow \mathrm{Prog}_{\prec}(P) \rightarrow \forall x \in N\, P(x).$$

$I_{\prec}(P)$ ist dann eine $\Delta_0(P)$-Formel. Die beweistheoretische Ordinalzahl von KPi ist die kleinste Ordinalzahl α, so daß keine primitiv rekursive Wohlordnung $\prec$ vom Ordnungstyp $|\prec| = \alpha$ existiert, für die $KPi \vdash I_{\prec}(P)$ gilt.

Ist $A[\underline{u}]$ eine Formel der Sprache $L^*(P)$, in der höchstens die freien Variablen $\underline{u} = u_1, \ldots, u_n$ auftreten, und ist $\underline{a} = a_1, \ldots, a_n$ eine Folge von $RS(I)$-Termen, so erhalten wir daraus eine I-Formel $A^I[\underline{a}]$ der Sprache von $RS(I)$, die einen Rang $< I + \omega$ hat, indem wir die freien Variablen $\underline{u}$ durch die Terme $\underline{a}$, die Mengenkonstante N durch M_0 und alle unbeschränkten Quantoren $\forall x(\ldots x \ldots)$, $\exists x(\ldots x \ldots)$ durch $\forall x^I(\ldots x^I \ldots)$, $\exists x^I(\ldots x^I \ldots)$ ersetzen.

3.2.1. Satz (Einbettungssatz)

Gilt $KPi \vdash A[\underline{u}]$ für eine $L^*(P)$-Formel $A[u]$, so gibt es natürliche Zahlen m und n mit

$$RS(I) \mid\frac{I \cdot m \# a}{I + n} A^I[\underline{a}]$$

für alle $RS(I)$-Terme $\underline{a}$.

Beweis durch Herleitungsinduktion. Mit den Sätzen 2.3.1 bis 2.3.11 folgt die Gültigkeit der Behauptung für alle Axiome von KPi. Bei komplexeren Herleitungen folgt sie aus der I.V.

3.2.2. Satz

$$KPi \vdash I_{\prec}(P) \Rightarrow |\prec| < \tilde{D}_{0^+} \varepsilon_{I+1}$$

Beweis. Die (Übersetzung der) Formel $I_{\prec}(P)$ ist offensichtlich eine $\Sigma(0^+)$-Formel. Nach Satz 3.2.1 gibt es m und n mit

$$RS(I) \mid\frac{I \cdot m}{I + n} I_{\prec}(P).$$

Mit Satz 2.4.11 und Satz 2.4.12 folgt daraus für $\alpha = I \# \omega_n(I \cdot m)$

$$RS(I) \mid\frac{\alpha}{1} I_{\prec}(P).$$

Mit dem Kollabierungslemma 2.2.7 und Satz 2.4.5 erhalten wir für $\beta = \tilde{D}_{0^+} \alpha$

$$RS(I) \mid\frac{\beta}{0} I_{\prec}(P).$$

Die bekannten Techniken (vgl. etwa [Schütte, 1977]) ergeben $|\prec| \leq \beta$; außerdem ist $\beta < \tilde{D}_{0^+} \varepsilon_{I+1}$.

3.2.3. Satz (Hauptsatz)

(a) $T_0 \equiv (\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI) \equiv KPi.$

(b) $|T_0| = |(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)| = |KPi| = \bar{\Theta}(\bar{\Theta}^1\varepsilon_{I+1}0)0.$

Beweis. Nach [Jäger, 1981 a] ist $\bar{\Theta}(\bar{\Theta}^1\varepsilon_{I+1}0)0 \leqq |T_0|$.
Aus Satz 3.2.2 folgt $|KPi| \leqq \tilde{D}_{0^+}\,\varepsilon_{I+1} = \bar{\Theta}(\bar{\Theta}^1\,\varepsilon_{I+1}0)0$.
Mit Satz 3.1.2 ergibt sich also die Behauptung.

Literatur

J. Barwise [1975]: Admissible Sets and Structures. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

W. Buchholz [1975]: Normalfunktionen und konstruktive Systeme von Ordinalzahlen. Proof Theory Symposion Kiel 1974. Springer Lecture Notes in Math. 500.

W. Buchholz & K. Schütte [1980]: Syntaktische Abgrenzungen von formalen Systemen der Π^1_1-Analysis und Δ^1_2-Analysis. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

S. Feferman [1975]: A language and axioms for explicit mathematics. Algebra and Logic. Springer Lecture Notes in Math. 450.

– [1979]: Constructive theories of functions and classes. Logic Colloquium 1978. North Holland, Amsterdam.

G. Jäger [1979]: Die konstruktible Hierarchie als Hilfsmittel zur beweistheoretischen Untersuchung von Teilsystemen der Mengenlehre und Analysis. Dissertation, München.

– [1981 a]: A well-ordering proof for Feferman's theory T_o. Erscheint in Archiv f. Math. Logik und Grundlagenforschung.

– [1981 b]: Iterating admissibility in proof theory. Erscheint in Logic Colloquium 1981. North Holland, Amsterdam.

G. Jäger & K. Schütte [1979]: Eine syntaktische Abgrenzung der $(\Delta^1_1\text{-}CA)$-Analysis. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

W. Pohlers [1978]: Cut-elimination for impredicative infinitary systems. Part I: Ordinal analysis for ID_1. Erscheint in Archiv f. Math. Logik und Grundlagenforschung.

– [1979 a]: Admissibility in proof theory. Erscheint in Proceedings of the VI. International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. North Holland, Amsterdam.

– [1979 b]: Cut-elimination for impredicative infinitary systems. Part II: Ordinal analysis for iterated inductive definitions. Erscheint in Archiv f. Math. Logik und Grundlagenforschung.

– [1981 a]: Proof-theoretical analysis of ID_ν by the method of local predicativity. In W. Buchholz, S. Feferman, W. Pohlers, W. Sieg: Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof-Theoretical Studies. Springer Lecture Notes in Math. 897.

– [1981 b]: Ordinal notations based on normal functions on k-inaccessible ordinals. Erscheint demnächst.

K. Schütte [1977]: Proof Theory. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.