

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1982

MÜNCHEN 1983

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Zur Theorie des Satzes von Stokes

Von Georg Nöbeling

Diese Mitteilung ist veranlaßt durch eine unveröffentlichte Notiz von G. Aumann. Darin werden für eine dehnungsbeschränkte reelle Funktion  $f$ , die definiert ist auf einem eindeutigen, umkehrbar dehnungsbeschränkten Bild  $F$  im  $\mathbf{R}^m$  eines  $n$ -dimensionalen Würfels ( $1 < n < m$ ) Ableitungen  $\partial f / \partial x_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, m$ ) fast überall auf  $F$  eingeführt (sie stimmen mit den üblichen partiellen Ableitungen überein, soweit diese existieren); für die somit definierten Funktionaldeterminanten solcher Funktionen  $f$  wird der Satz von Stokes bewiesen.

Wir reproduzieren und führen diese Überlegungen weiter unter gleichzeitiger Verallgemeinerung auf dehnungsbeschränkte, alternierende Differentialformen.

Es liege der euklidische Punktraum  $E^m$  ( $m \geq 2$ ) mit der euklidischen Norm  $|\cdot|$  und orthonormierten Koordinaten  $x_1, \dots, x_m$  vor. Wir betrachten den  $E^m$  zugleich als Vektorraum  $\mathfrak{B}^m$  über  $\mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_m) + (y_1, \dots, y_m) &= (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m), \\ t(x_1, \dots, x_m) &= (tx_1, \dots, tx_m).\end{aligned}$$

Punkte im  $E^m$  bezeichnen wir i. a. mit dem Buchstaben  $q$ , Vektoren im  $\mathfrak{B}^m$  mit  $v$ .

§ 1.<sup>1</sup> Im  $E^m$  sei eine nicht leere Punktmenge  $M$  gegeben. Wir bezeichnen für jeden Punkt  $q \in M$  mit  $\mathfrak{L}_q M$  den kleinsten Vektor-Unterraum von  $\mathfrak{B}^m$ , welcher alle Tangentenvektoren in  $q$  an  $M$  enthält, und mit  $\mathfrak{L}_q^\perp M$  den zu  $\mathfrak{L}_q M$  (orthogonalen) komplementären Unterraum von  $\mathfrak{B}^m$  (sodaß also  $\mathfrak{B}^m = \mathfrak{L}_q M \times \mathfrak{L}_q^\perp M$  ist). Ist  $q$  ein isolierter Punkt von  $M$ , so ist  $\mathfrak{L}_q M = O$  und  $\mathfrak{L}_q^\perp M = \mathfrak{B}^m$ .

---

<sup>1</sup> Zu § 1 vgl. G. Nöbeling, „Integralsätze der Analysis“; Berlin-New York: de Gruyter 1978; § 11 u. 12.

1.1. Es liege nun vor eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  und ein Punkt  $q \in M$ . Die Funktion  $f$  sei differenzierbar in  $q$ , d. h. es existiere (mindestens) eine lineare Funktion  $\lambda: \mathfrak{B}^m \rightarrow \mathbf{R}$  mit der Eigenschaft

$$(1) \quad f(q') - f(q) = \lambda(q' - q) + o(|q' - q|) \quad (q' \in M).$$

Genau ein  $\lambda$  hat neben (1) auch die Eigenschaft

$$(2) \quad \lambda(q^\perp - q) = o \text{ für } q^\perp - q \in \mathfrak{X}_q^\perp M.$$

Diese Funktion  $\lambda$  betrachten wir im folgenden.

Für jeden Vektor  $\tilde{v} \in \mathfrak{B}^m$  definieren wir

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial \tilde{v}}(q) := \lambda(\tilde{v}).$$

Die Funktion  $\lambda$  hat, mit  $q' = (x'_1, \dots, x'_m)$  und  $q = (x_1, \dots, x_m)$ , eine eindeutige Darstellung

$$(4) \quad \lambda(q' - q) = \sum_{\mu=1}^m a_\mu(q) (x'_\mu - x_\mu).$$

Aus (3) folgt dann

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial x_\mu}(q) = a_\mu(q) \quad (\mu = 1, \dots, m).$$

Durch diese Gleichungen (5) werden in der eingangs erwähnten Notiz die Ableitungen  $\partial f / \partial x_\mu$  von  $f$  definiert (allerdings ohne eine die Eindeutigkeit sichernde Einschränkung wie (2)). Wir nennen daher die Ableitungen (3) und (5) die *Aumannschen Ableitungen* von  $f$ .

Für die Aumannschen Ableitungen gelten dieselben Rechenregeln bezüglich der rationalen Kombinationen von Funktionen  $f$  wie für die üblichen partiellen Ableitungen.

Ebenso gilt für sie die Kettenregel. Es sei nämlich  $\dot{M}$  eine Punktmenge in einem  $E^{\dot{m}}$  und  $g: \dot{M} \rightarrow M$  eine eindeutige Abbildung, differenzierbar in  $p \in \dot{M}$  mit  $g(p) = q$  (d. h. jede Komponente  $g_\mu$  von  $g$  differenzierbar in  $p$ ). Für jeden Vektor  $\dot{\tilde{v}} \in \mathfrak{B}^{\dot{m}}$  gilt dann:

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial \dot{\tilde{v}}}(p) = \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_\mu}(q) \cdot \frac{\partial g_\mu}{\partial \dot{\tilde{v}}}(p).$$

1.2. Eine  $r$ -Form (alternierende Differentialform  $r$ -ten Grades;  $r \geq 0$ ) auf  $M$  ist eine reelle Funktion  $\omega$  von  $r + 1$  Variablen  $q \in M$ ;  $v_1, \dots, v_r \in \mathfrak{X}_q M$  mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt  $q \in M$  die Funktion  $(v_1, \dots, v_r) \mapsto \omega(q; v_1, \dots, v_r)$  eine alternierende,  $r$ -fache Linearform auf  $\mathfrak{X}_q M$  ist. (Für  $r = 0$  ist  $\omega$  eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ .) Als *komplette  $r$ -Form* auf  $M$  bezeichnen wir jede reelle Funktion  $\tilde{\omega}$  von  $r + 1$  Variablen  $q \in M$ ;  $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r \in \mathfrak{B}^m$  derart, daß für jeden Punkt  $q \in M$  die Funktion  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r) \mapsto \tilde{\omega}(q; \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r)$  eine alternierende,  $r$ -fache Linearform auf  $\mathfrak{B}^m$  ist.

Zu jeder  $r$ -Form  $\omega$  auf  $M$  definieren wir folgendermaßen eine komplette  $r$ -Form  $\tilde{\omega}$  auf  $M$ , die *Kompletzierung* von  $\omega$ : für je  $r$  Vektoren  $\tilde{v}_\varrho = v_\varrho + v_\varrho^\perp$  aus  $\mathfrak{B}^m$  ( $v_\varrho \in \mathfrak{X}_q M$ ,  $v_\varrho^\perp \in \mathfrak{X}_q^\perp M$ ;  $\varrho = 1, \dots, r$ ) sei

$$(6) \quad \tilde{\omega}(q; \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r) := \omega(q; v_1, \dots, v_r).$$

Für  $r = 0$  ist  $\tilde{f} = f$ . Die Kompletzierung kommutiert mit der Linearkombination und der alternierenden Multiplikation von Formen.

Bezüglich der Koordinaten  $x_1, \dots, x_m$  des  $E^m$  hat für  $r \geq 1$  jede komplette  $r$ -Form  $\tilde{\omega}$  die Normaldarstellung

$$(7) \quad \tilde{\omega} = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_r \leq m} f_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_r}.$$

Die Koeffizienten  $f_{\mu_1, \dots, \mu_r}$  sind dabei reelle Funktionen auf  $M$ , die folgendermaßen definiert sind: es seien  $n_1, \dots, n_m$  die Einheitsvektoren der Koordinatenachsen (also  $\tilde{v} = \sum x_\mu n_\mu$  für jeden Vektor  $\tilde{v} \in \mathfrak{B}^m$ ); dann ist

$$(7a) \quad f_{\mu_1, \dots, \mu_r}(q) := \tilde{\omega}(q; n_{\mu_1}, \dots, n_{\mu_r}) \quad (q \in M).$$

Für jedes  $\mu = 1, \dots, m$  ist die Linearform  $dx_\mu$  auf  $\mathfrak{B}^m$  definiert durch:

$$(7b) \quad (dx_\mu)(\tilde{v}) := x_\mu.$$

1.3. Beispiel. Sei  $\dim \mathfrak{X}_q M = \text{konst.} = n$  und  $\mathfrak{X}_q M$  orientiert für jedes  $q \in M$ .

Die Volumenform  $\nu$  auf  $M$  ist folgendermaßen definiert. Für  $v_1, \dots, v_n \in \mathfrak{X}_q M$  ist  $\nu(q; v_1, \dots, v_n) := 0$ , falls  $v_1, \dots, v_n$

linear abhängig sind; andernfalls ist  $v(q; v_1, \dots, v_n) = \pm$  Volumen des von  $v_1, \dots, v_n$  aufgespannten,  $n$ -dimensionalen Parallelotops  $P$ , wobei das Plus- bzw. Minuszeichen gilt, je nachdem das geordnete  $n$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_n)$  die Orientierung von  $\mathfrak{X}_q M$  repräsentiert oder nicht (also  $v(q; v_1, \dots, v_n)$  das „orientierte“ Volumen von  $P$ ).

Die Kompletzierung von  $v$  ist

$$\tilde{v} = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_n \leq m} c_{\mu_1, \dots, \mu_n} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_n},$$

wobei die  $c_{\mu_1, \dots, \mu_n}(q)$  die Stellungscosinus von  $M$  in  $q$ , d. h. von  $\mathfrak{X}_q M$  sind. Denn ist  $\tilde{P}$  das  $n$ -dimensionale Parallelotop in  $\mathfrak{B}^m$ , das aufgespannt wird von den Basisvektoren  $n_{\mu_1}, \dots, n_{\mu_n}$  und ist  $P$  die Orthogonalprojektion von  $\tilde{P}$  in  $\mathfrak{X}_q M$ , so ist das orientierte Volumen von  $P$  gleich  $c_{\mu_1, \dots, \mu_n}(q)$ .

Ist weiter  $\omega$  eine beliebige  $n$ -Form auf  $M$ , so existiert eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  derart, daß  $\omega = f v$  ist. Für die Funktionen  $f_{\mu_1, \dots, \mu_n}$  in (7), mit  $r = n$ , gilt dann

$$(8) \quad f_{\mu_1, \dots, \mu_n} = f c_{\mu_1, \dots, \mu_n}.$$

Aus der letzteren Gleichung folgt umgekehrt

$$(9) \quad \sum f_{\mu_1, \dots, \mu_n} c_{\mu_1, \dots, \mu_n} = f.$$

1.4. Eine komplette  $r$ -Form  $\tilde{\omega}$  auf  $M$  heiße *dehnungsbeschränkt* bzw. in einem Punkt  $q \in M$  *differenzierbar*, wenn für jedes  $r$ -Tupel  $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r$  von Vektoren  $\in \mathfrak{B}^m$  die durch  $q' \mapsto \tilde{\omega}(q'; \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r)$  definierte Funktion  $M \rightarrow \mathbf{R}$  dehnungsbeschränkt bzw. in  $q$  differenzierbar ist. Wenn dabei  $\tilde{\omega}$  die Kompletzierung einer  $r$ -Form  $\omega$  auf  $M$  ist, so heiße auch  $\omega$  dehnungsbeschränkt bzw. in  $q$  differenzierbar.

Eine komplette  $r$ -Form  $\tilde{\omega}$  auf  $M$  ist dehnungsbeschränkt bzw. in  $q$  differenzierbar genau dann, wenn dies für die Funktionen  $f_{\mu_1, \dots, \mu_r}$  in (7) gilt.

Sei  $\tilde{\omega}$  eine in einem zunächst festen Punkt  $q \in M$  differenzierbare, komplette  $r$ -Form auf  $M$ . Dann existiert für je  $r+1$  Vektoren

$$\tilde{v}, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r \in \mathfrak{B}^m$$

die Aumannsche Ableitung

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{v}}(q; \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r) =: \partial \tilde{\omega}(q; \tilde{v}, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r)$$

Die  $(r+1)$ -fache Linearform  $\partial \tilde{\omega}(q)$  auf  $\mathfrak{B}^m$  liefert eine alternierende,  $(r+1)$ -fache Linearform  $d\tilde{\omega}(q)$  auf  $\mathfrak{B}^m$ :

$$(10) \quad d\tilde{\omega}(q; \tilde{v}, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r) := \frac{1}{r!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \cdot \partial \tilde{\omega}(q; \tilde{v}_{\pi_0}, \tilde{v}_{\pi_1}, \dots, \tilde{v}_{\pi_r}),$$

wobei  $\tilde{v} = \tilde{v}_0$  gesetzt ist und summiert wird über alle Permutationen  $\pi$  des  $(r+1)$ -Tupels  $0, 1, \dots, r$ .

Ist dabei  $\tilde{\omega}$  die Kompletterung einer  $r$ -Form  $\omega$  auf  $M$ , so sei  $d\omega(q)$  die Restriktion von  $d\tilde{\omega}(q)$  auf  $\mathfrak{X}_q M$ , also für je  $r+1$  Vektoren

$$v, v_1, \dots, v_r \in \mathfrak{X}_q M:$$

$$(11) \quad d\omega(q; v, v_1, \dots, v_r) := d\tilde{\omega}(q; v, v_1, \dots, v_r).$$

$d\omega(q)$  ist eine alternierende,  $(r+1)$ -fache Linearform auf  $\mathfrak{X}_q M$ , das Differential von  $\omega$  in  $q$ .

Ist schließlich  $\omega$  in allen Punkten  $q \in M$  differenzierbar, so heiße die  $(r+1)$ -Form  $d\omega$  auf  $M$  das *Differential* von  $\omega$ .

$$\text{Für } r = 0 \text{ ist } df(q; v) = \frac{\partial f}{\partial v}(q).$$

Bezuglich der Koordinaten  $x_1, \dots, x_m$  im  $E^m$  ergeben sich die folgenden Darstellungen:

$$(12) \quad d\tilde{f} = \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_{\mu}} dx_{\mu}$$

und für  $r \geq 1$  zufolge (7)

$$(13) \quad d\tilde{\omega} = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_r \leq m} \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial f_{\mu_1, \dots, \mu_r}}{\partial x_{\mu}} dx_{\mu} \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_r}.$$

Beweis. (12) folgt unmittelbar aus  $\tilde{f} = f$  und (3)–(5). – Für (13) setzen wir gemäß (7) an:

$$d\tilde{\omega} = \sum_{1 \leq \mu_0 < \dots < \mu_r \leq m} f_{\mu_0, \dots, \mu_r} dx_{\mu_0} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_r}.$$

Nach (7a) und (10) ist

$$\begin{aligned} f_{\mu_0, \dots, \mu_r}(q) &= (d\tilde{\omega})(q; \pi_{\mu_0}, \dots, \pi_{\mu_r}) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \pi_{\mu_{\pi_0}}}(q; \pi_{\mu_{\pi_1}}, \dots, \pi_{\mu_{\pi_r}}) \end{aligned}$$

und dies ist nach (7a)

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \cdot \frac{\partial f_{\mu_{\pi_1}, \dots, \mu_{\pi_r}}}{\partial x_{\mu_{\pi_0}}}(q).$$

Nach leichter Rechnung folgt nun (13).

Aus (13) folgt durch Umordnung die Normaldarstellung

$$(13a) \quad \partial \omega = \sum_{1 \leq \mu_0 < \dots < \mu_r \leq m} \sum_{\varrho=0}^r (-1)^{\varrho} \frac{\partial f_{\mu_0, \dots, \hat{\mu}_{\varrho}, \dots, \mu_r}}{\partial x_{\mu_{\varrho}}} dx_{\mu_0} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_r}.$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln für das Differential einer Linearkombination und das alternierende Produkt von Formen  $\omega$ . Es ist jedoch für eine differenzierbare  $r$ -Form  $\omega$  auf beliebigem  $M$  i. a. nicht  $\tilde{d}\omega = d\tilde{\omega}$ . Und existiert für  $\omega$  das zweifache Differential  $dd\omega$ , so ist i. a. nicht  $dd\omega = 0$ . Vgl. dazu § 3, Bem. 3 und 4.

§ 2. Im  $E^m$  sei für ein ganzes  $n$  mit  $1 < n < m$  eine  $n$ -Fläche  $F = g(P)$  gegeben ( $P = S_1 \cup \dots \cup S_j$  eine (simpliciale)  $n$ -Pseudomannigfaltigkeit im  $E^m$ ;  $g$  eine Injektion von  $P$  in den  $E^m$  derart, daß  $g|S_i$  umkehrbar dehnungsbeschränkt ist für jedes  $i = 1, \dots, j$ ). Auf  $F$  ist dann ein Maß  $O_n$  definiert derart, daß für eine Menge  $N \subset P$  dann und nur dann  $O_n(g(N)) = 0$  ist, wenn das Lebesgue-Maß  $\lambda^n(N) = 0$  ist.<sup>2</sup>

Wir treffen folgende Verabredung. Wir betrachten eine Aussage oder Definition  $A$  über Punkte  $q \in F$  als gültig „auf  $F$  mod  $o$ “, wenn eine Menge  $F_0 \subset F$  mit  $O_n(F \setminus F_0) = 0$  derart existiert, daß  $A$  gilt für alle Punkte  $q \in F_0$ .

<sup>2</sup> Vgl. G. Aumann - O. Haupt, „Einführung in die reelle Analysis“, Bd. III. Berlin - New York: de Gruyter 1982. Nr. 6.

2.1. Wir behaupten nun erstens: Jede dehnungsbeschränkte Funktion  $f: F \rightarrow \mathbf{R}$  ist differenzierbar auf  $F$  mod  $o$  (im Sinne von 1.1).

Zum Beweis können wir o. B. d. A. annehmen, daß  $P$  ein  $n$ -Simplex im  $E^n$  mit orthonormierten Koordinaten  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  ist. Wir setzen  $f \circ g =: h$ . Die Funktion  $h$  und die Komponenten  $g_1, \dots, g_m$  von  $g$  sind dehnungsbeschränkt auf  $S$  und daher nach Rademacher in  $\lambda^n$ -fast jedem inneren Punkt von  $S$  differenzierbar mit  $\lambda^n$ -meßbaren partiellen Ableitungen und mit

$$\left[ \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_n \leq m} \left( \frac{\partial(g_{\mu_1}, \dots, g_{\mu_n})}{\partial(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right)^2 \right]^{1/2} > 0.^2$$

Es sei  $p$  ein solcher Punkt. Wir beweisen, daß  $f$  in  $q := g(p)$  differenzierbar ist. Es sei  $E$  die Tangential- $n$ -Ebene  $\subset E^m$  an  $F$  im Punkt  $q$ . Dann existiert eine lineare Bijektion  $\varphi: E^n \rightarrow E$  derart, daß  $|g(p') - \varphi(p')| = o(|p' - p|)$ ,  $p' \in S$  gilt. Weiter existiert eine lineare Abbildung  $\psi: E^n \rightarrow \mathbf{R}$  derart, daß  $|h(p') - \psi(p')| = o(|p' - p|)$ ,  $p' \in S$  gilt. Wir erweitern nun die lineare Abbildung  $\psi \circ \varphi^{-1}: E \rightarrow \mathbf{R}$  zu einer linearen Abbildung  $\chi: E^m \rightarrow \mathbf{R}$ . Nun sei  $q' \in g(S)$  beliebig und  $p' := g^{-1}(q') \in S$ . Dann ist  $f(q') - \chi(q') = h(p') - \chi(g(p')) = \psi(p') - \chi(g(p')) + o(|p' - p|)$ ; dies ist aber nach Definition von  $\varphi$  und wegen der Linearität von  $\chi$  weiter  $= \psi(p') - \chi(\varphi(p)) + o(|p' - p|) = o(|p' - p|)$ , weil wegen  $\varphi(p') \in E$  gilt  $\chi(\varphi(p')) = \psi(p')$ . Also gilt  $f(q') - \chi(q') = o(|p' - p|)$  und folglich, weil  $g$  auf  $S$  umkehrbar dehnungsbeschränkt ist, auch  $f(q') - \chi(q) = o(|q' - q|)$ . Für  $\lambda := \chi - f(q)$  gilt also (1).

Wir behaupten zweitens: Die (auf  $F$  mod  $o$  existierenden) Aumannschen Ableitungen  $\partial f / \partial x_\mu$  sind  $O_n$ -integrierbar über  $F$ .

Nach der Kettenregel genügen die  $a_\mu(q) = \frac{\partial f}{\partial x_\mu}(q)$  den  $n$ -Gleichungen

$$(14) \quad \sum_{\mu=1}^m a_\mu \frac{\partial g_\mu}{\partial \sigma_\nu} = \frac{\partial h}{\partial \sigma_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Die Bedingung (2) besagt, daß für jeden Vektor  $v = (v_1, \dots, v_m)$ , der in  $q$  zu  $E$  orthogonal ist, gilt  $\sum a_\mu v_\mu = 0$ . Der Vektor  $(a_1, \dots, a_m)$  ist also zu jedem solchen Vektor  $v$  orthogonal, also

ein Tangentenvektor in  $q$  an  $F$ . Folglich existieren  $b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}$  so, daß

$$a_\mu = \sum_{x=1}^n b_x \frac{\partial g_\mu}{\partial \sigma_x} \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

ist. Dies in (14) eingesetzt, ergibt

$$\sum_{x=1}^n b_x \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial g_\mu}{\partial \sigma_x} \frac{\partial g_\mu}{\partial \sigma_\nu} = \frac{\partial h}{\partial \sigma_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

Die Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems ist gleich  $(\det(\partial g_\mu / \partial \sigma_\nu))^2 \neq 0$ . Da die  $\partial h / \partial \sigma_\nu$  und die  $\partial g_\mu / \partial \sigma_\nu$ , als Funktionen auf  $F$  mod  $\mathfrak{o}$  betrachtet,  $O_n$ -meßbar sind, gilt dasselbe für die  $b_x$  und damit auch für die  $a_\mu$ . Daß die  $a_\mu$  auch beschränkt sind, ergibt sich folgendermaßen. In jedem Punkt  $q \in F$  mod  $\mathfrak{o}$  können wir durch eine orthogonale Transformation der Koordinaten  $x_1, \dots, x_m$  in neue Koordinaten  $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m$  erreichen, daß der Vektor  $(\partial \dot{g}_1 / \partial \sigma_1, \dots, \partial \dot{g}_m / \partial \sigma_1)$  in die  $x_1$ -Achse fällt, der Vektor  $(\partial \dot{g}_1 / \partial \sigma_2, \dots, \partial \dot{g}_m / \partial \sigma_2)$  in die  $x_1 x_2$ -Ebene, usw. (Dabei  $\dot{g}_\mu = \mu$ -te Komponente von  $g$  bzgl.  $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m$ ). Das Gleichungssystem (14) für die Koordinaten  $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m$  sieht so aus:

$$\sum_{\mu=1}^v \dot{a}_\mu \frac{\partial \dot{g}_\mu}{\partial \sigma_\nu} = \frac{\partial h}{\partial \sigma_\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

(also  $\nu$  an Stelle von  $m$ ). Die erste Gleichung liefert, weil  $h$  dehnungsbeschränkt und  $g$  umkehrbar dehnungsbeschränkt ist, daß  $|\dot{a}_1|$  eine von  $q$  unabhängige obere Schranke hat. Sodann liefert die zweite Gleichung dasselbe für  $|\dot{a}_2|$ . Usw. Da die Koordinatentransformation orthogonal ist, ihre Koeffizienten also die von  $q$  unabhängige obere Schranke 1 haben, so folgt, daß auch die  $|\dot{a}_\mu|$  eine von  $q$  unabhängige obere Schranke haben.

2.2. Die  $n$ -Fläche  $F$  sei nun orientiert und  $\omega$  eine  $n$ -Form auf  $F$  mod  $\mathfrak{o}$ .

Ist  $f$  die auf  $F$  mod  $\mathfrak{o}$  definierte reelle Funktion mit  $\omega = f\nu$  (vgl. 1.3), so definiert man

$$\int_F \omega := \int_F f dO_n,$$

falls das Integral rechter Hand existiert. Wir untersuchen, wann dies der Fall ist.

Die Normaldarstellung (7) von  $\omega$  liege vor. Auf  $F \bmod o$  sind die Stellungscosinus  $c_{\mu_1, \dots, \mu_n}$  von  $F$  definiert. Nach 1.3 gilt dann (9) auf  $F \bmod o$ . Nun sind die  $c_{\mu_1, \dots, \mu_n}$  darstellbar als algebraische Funktionen der partiellen Ableitungen  $\partial g_\mu / \partial \sigma_\nu$  und die letzteren sind, als Funktionen auf  $F \bmod o$  betrachtet,  $O_n$ -meßbar und daher, weil beschränkt,  $O_n$ -integrierbar über  $F$ . Es kommt also auf das Verhalten der Funktionen  $f_{\mu_1, \dots, \mu_n}$  in (7) an.

(a) Ist  $\omega$  dehnungsbeschränkt, so sind nach 1.4 auch die  $f_{\mu_1, \dots, \mu_n}$  dehnungsbeschränkt und folglich  $O_n$ -integrierbar über  $F$ .

(b) Sei  $\omega^*$  eine dehnungsbeschränkte  $(n-1)$ -Form auf  $F$ . Die Normaldarstellung ihrer Kompletterung  $\tilde{\omega}^*$  sei

$$\tilde{\omega}^* = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_n \leq m} f_{\mu_1, \dots, \mu_n}^* dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_n}.$$

Wegen ihrer Dehnungsbeschränktheit ist  $\omega^*$  auf  $F \bmod o$  differenzierbar und daher  $\omega := d\omega^*$  auf  $F \bmod o$  definiert. Für die Funktionen  $f_{\mu_1, \dots, \mu_n}$  von  $\omega$  gilt nach (13a):

$$f_{\mu_1, \dots, \mu_n} = \sum_{\varrho=1}^n (-1)^{\varrho-1} \frac{\partial f_{\mu_1, \dots, \hat{\mu}_\varrho, \dots, \mu_n}^*}{\partial x_{\mu_\varrho}}.$$

Wegen der Dehnungsbeschränktheit der  $f_{\mu_1, \dots, \mu_n}^*$  sind ihre Aumannschen Ableitungen  $O_n$ -integrierbar über  $F$  nach 2.1. Folglich sind die  $f_{\mu_1, \dots, \mu_n}$  ebenfalls  $O_n$ -integrierbar über  $F$ .

**2.3. Satz von Stokes.** *Es sei  $F$  eine orientierte  $n$ -Fläche im  $E^m$  und  $\omega$  eine dehnungsbeschränkte  $(n-1)$ -Form auf  $F$ . Dann ist*

$$\int_F d\omega = \int_{\partial F} \omega.$$

**Beweis.** Die Kompletterung  $\tilde{\omega}$  von  $\omega$  habe die Normaldarstellung

$$\tilde{\omega} = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_n \leq m} f_{\mu_1, \dots, \mu_n} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_n}.$$

Nach 2.2, (a), angewandt auf  $\partial F$  statt  $F$  und  $n-1$  statt  $n$ , existiert

$$(17) \quad \int_{\partial F} \omega = \int_{\partial F} \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_n \leq m} f_{\mu_1, \dots, \mu_n} c_{\mu_1, \dots, \mu_n} dO_{n-1}.$$

Nach 2.2, (b), angewandt auf  $\omega$  statt  $\omega^*$ , existiert

$$\int_F d\omega = \int_F \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_n \leq m} \sum_{\varrho=1}^n (-1)^{\varrho-1} \frac{\partial f_{\mu_1, \dots, \hat{\mu}_\varrho, \dots, \mu_n}}{\partial x_{\mu_\varrho}} c_{\mu_1, \dots, \mu_n} dO_n.$$

Hieraus folgt durch Umordnung (vgl. (13a) und (13)):

$$(18) \quad \int_F d\omega = \int_F \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_n \leq m} \sum_{\mu=1}^m \frac{\partial f_{\mu_1, \dots, \mu_n}}{\partial x_\mu} c_{\mu, \mu_1, \dots, \mu_n} dO_n.$$

Die Gleichheit der beiden Integrale rechter Hand in (17) und (18) ergibt sich nun wie im Aumannschen Beweis i.c.<sup>2</sup>, Nr. 8.5.

§ 3. Bemerkungen. 1. Sei  $q \in M$  ein Häufungspunkt von  $M$  und die Funktion  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  differenzierbar in  $q$ . Ist  $v$  ein Tangenteneinheitsvektor in  $q$  an  $M$ , so existiert eine Folge  $(q^r)_{r=1,2,\dots}$  von Punkten  $q^r \neq q$  in  $M$  mit  $q = \lim q^r$  und  $v = \lim |q^r - q|^{-1}(q^r - q)$ . Aus (1) folgt dann  $\partial f / \partial v(q) = \lambda(v) = \lim |q^r - q|^{-1}(f(q^r) - f(q))$ . Für jeden Tangenteneinheitsvektor in  $q$  an  $M$  und daher für jeden Vektor  $v \in \mathfrak{X}_q M$  als Linearkombination von Tangenteneinheitsvektoren in  $q$  an  $M$  ist somit  $\partial f / \partial v(q)$  von der Nebenbedingung (2) unabhängig. Diese wirkt sich also aus auf die Aumannschen Ableitungen  $\partial f / \partial \tilde{v}(q)$  nur für die nicht in  $\mathfrak{X}_q M$  liegenden Vektoren  $\tilde{v}$ : speziell  $\partial f / \partial v^\perp(q) = 0$  für  $v^\perp \in \mathfrak{X}_q^\perp(M)$ .

2. Die Aumannschen Ableitungen einer Funktion  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  reagieren sehr empfindlich auf Änderungen der Struktur von  $M$ . Beispiel: In der  $x_1, x_2$ -Ebene sei  $M_1$  bzw.  $M_2$  die Menge aller Punkte  $q = (x_1, x_2)$  mit  $|x_2| \leq |x_1|$  bzw. mit  $|x_2| \leq x_1^2$ . Für  $i = 1, 2$  sei nun  $f_i: M_i \rightarrow \mathbf{R}$  die Restriktion auf  $M_i$  der Funktion  $(x_1, x_2) \mapsto x_2$ . Dann ist  $f_i$  überall auf  $M_i$  differenzierbar. In jedem Punkt  $q$  von  $M_i$ , verschieden vom Koordinatenursprung  $O$ , ist

$\partial f_i / \partial x_1 = 0$  und  $\partial f_i / \partial x_2 = 1$ . In  $O$  ist ebenfalls  $\partial f_1 / \partial x_1 = 0$  und  $\partial f_1 / \partial x_2 = 1$ , jedoch  $\partial f_2 / \partial x_1 = 0$  und  $\partial f_2 / \partial x_2 = 0$ .

3. Durch  $\omega(q; \mathfrak{v}) := \partial f / \partial \mathfrak{v}(q)$  mit  $\mathfrak{v} \in \mathfrak{X}_q M$  für eine in  $q$  differenzierbare Funktion  $f: M \rightarrow R$  ist eine 1-Form  $\omega$  auf  $M$  definiert. Für ihre Kompletterung  $\tilde{\omega}$  gilt zufolge (3) und (2):  $\tilde{\omega}(q; \tilde{\mathfrak{v}}) = \partial f / \partial \tilde{\mathfrak{v}}(q)$  für alle  $\tilde{\mathfrak{v}} \in \mathfrak{B}^m$ . Der Begriff der Kompletterung ist also eine natürliche Verallgemeinerung der Definition (3). – Es gilt jedoch für eine differenzierbare  $r$ -Form  $\omega$  i. a. nicht  $\tilde{d}\omega = d\tilde{\omega}$ . Beispiel. In der  $x_1, x_2$ -Ebene sei  $M$  die Menge aller Punkte  $q = (x_1, x_2)$  mit  $|x_2| \leq x_1^2$  und  $\omega(q; \mathfrak{v}) := x_1 v_2$  für  $q \in M$  und  $\mathfrak{v} = (v_1, v_2) \in \mathfrak{X}_q M$ . Wegen (13) ist  $d\tilde{\omega} = dx_1 \wedge dx_2$  auf ganz  $M$ . Wegen (11) und (6) ist zwar ebenfalls  $d\omega = dx_1 \wedge dx_2$  für  $O \neq q \in M$ , hingegen  $d\tilde{\omega} = 0$  für  $q = O$ . Es ist also  $\tilde{d}\omega \neq d\tilde{\omega}$  für  $q = O$ .

4. Die Aumannschen Ableitungen höherer Ordnung werden nach folgendem Muster definiert. Eine Funktion  $f: M \rightarrow R$  heißt zweimal differenzierbar in  $q \in M$ , wenn erstens  $f$  in jedem Punkt einer Umgebung  $U$  in  $M$  von  $q$  differenzierbar ist und wenn zweitens für jeden Vektor  $\mathfrak{v} \in \mathfrak{X}_q M$  die (auf  $U$  definierte) Funktion  $\partial f / \partial \mathfrak{v}$  differenzierbar ist in  $q$ . Dann existiert  $q$  für je zwei Vektoren  $\tilde{\mathfrak{v}}, \tilde{\mathfrak{w}} \in \mathfrak{B}^m$  die Ableitung  $\partial^2 f / \partial \tilde{\mathfrak{w}} \partial \tilde{\mathfrak{v}} := \partial(\partial f / \partial \tilde{\mathfrak{v}}) / \partial \tilde{\mathfrak{w}}$ . Sie ist aber schon bei einfachen Funktionen  $f$  nicht invariant gegenüber der Vertauschung von  $\tilde{\mathfrak{v}}$  und  $\tilde{\mathfrak{w}}$ . Beispiel: Im  $E^2$  sei  $M'$  die Menge aller Punkte  $q = (x_1, x_2)$  mit  $|x_1| \leq 1/2, |x_2| \leq 1/2$  und  $|x_2| \leq x_1^2$ ,  $M''$  die Menge aller  $q$  mit  $|x_1| \leq 1/2, |x_2| \leq 1/2$  und  $|x_1| \leq x_2^2$ , schließlich  $M := M' \cup M''$ . Weiter sei  $f: M \rightarrow R$  auf  $M'$  gleich der Funktion  $q \mapsto x_1 x_2$  und auf  $M''$  gleich  $q \mapsto -x_1 x_2$ . Diese Funktion  $f$  ist in jedem Punkt  $q$  von  $M$  zweimal differenzierbar. Für  $\mathfrak{v} = (v_1, v_2)$  und  $\mathfrak{w} = (w_1, w_2)$  ist  $\partial^2 f / \partial \mathfrak{w} \partial \mathfrak{v}(q)$  gleich  $v_1 w_2 + v_2 w_1$ , wenn  $O \neq q \in M'$ , und gleich  $-v_1 w_2 - v_2 w_1$ , wenn  $O \neq q \in M''$  ist, hingegen gleich  $-v_1 w_2 + v_2 w_1$  im Ursprung  $q = O$ . In  $O$  ist daher  $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_2 = 1$  und  $\partial^2 f / \partial x_2 \partial x_1 = -1$  (und somit  $ddf = 2 dx_1 \wedge dx_2$  in  $O$ ).

5. Nun sei  $M$  speziell eine  $n$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit in  $E^m$  und  $\omega$  eine differenzierbare  $r$ -Form auf  $M$  ( $0 \leq r \leq m$ ).

Dann gilt: Das in 1.4 eingeführte Differential  $d\omega$  stimmt mit dem üblichen überein. Denn sei  $q$  ein Punkt von  $M$  und  $\tau: T \rightarrow M$  eine Karte einer Umgebung in  $M$  von  $q$  (also  $T$  eine offene Menge im  $\mathbf{R}^n$  aller  $n$ -Tupel  $(t_1, \dots, t_n)$ ,  $\tau$  eine  $C^2$ -Injektion,  $\tau(T)$  eine Umgebung in  $M$  von  $q$ ,  $\tau^{-1}(q) = : p$ ). Seien  $\omega^*$  und  $(d\omega)^*$  die aus  $\omega$  und  $d\omega$  durch Zurückholen auf  $T$  mittels  $\tau$  entstehenden  $r$ - bzw.  $(r+1)$ -Formen auf  $T$ . In  $p$  ist dann  $(d\omega)^* = d(\omega^*)$ .

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1983

Band/Volume: [1982](#)

Autor(en)/Author(s): Nöbeling Georg

Artikel/Article: [Zur Theorie des Satzes von Stokes 71-82](#)