BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1983

MÜNCHEN 1984

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die Einheit der klassischen Physik

von Fritz Bopp

Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Mai 1983

Vorbemerkung

Bei der Art, wie heute die klassische Physik in Teile zerlegt gelehrt wird, geht leicht der Blick für die innere Geschlossenheit und Schönheit des Ganzen verloren. Die Zerlegung wird dadurch begünstigt, daß sich die Teile nacheinander und oft fast unabhängig voneinander entwickelt haben. Man sieht kaum, daß Mechanik, Elektrodynamik, spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, sowie die Eichidee zu einer allmählichen Vollendung des von Newton formulierten wissenschaftstheoretischen Programms geführt haben. Man ist sogar zur höheren Ehre des jeweils Neuen geneigt, das Trennende mehr als das Verbindende zu betonen.

Darum ist eine Synopsis, eine Zusammenschau der Teile geboten, ohne daß dadurch die Bedeutung der Einzeldarstellungen geschmälert wird. Sie ist möglich, wenn man von den wissenschaftstheoretischen Grundlagen der Lehre von Newton ausgeht. Bei ihm stehen diese Grundlagen so sehr im Vordergrund, daß im Titel seines Hauptwerks nicht vom eigentlichen Gegenstand, sondern nur von dem über diesen hinausweisenden Programm gesprochen wird, nämlich von der Mathematisierung der Naturphilosophie. Im Lichte dieses Programms erscheinen die Arbeiten von Faraday und Maxwell, von Einstein und nicht zuletzt auch von Weyl als Beiträge auf dem Wege zur Vollendung des Newtonschen Programms. Tatsächlich bewahrt dieses Programm sogar in der Quantenphysik seine Gültigkeit und stellt sicher, daß Physik bei allen Wandlungen Physik bleibt. Doch soll letzteres erst später gezeigt werden.

Hier beschränken wir uns auf eine Synopsis von Mechanik und Elektrodynamik, sowie von spezieller und allgemeiner Relativitätstheorie, wobei wir von vorneherein Weyls Eichprinzip als Schlüssel zur einheitlichen Feldtheorie betrachten. Thermodynamik und statistische Theorien werden nicht behandelt, weil darin die Grundgleichungen, um die es hier geht, bereits vorausgesetzt werden.

Die Synopsis zerfällt in vier Teile: (1) Aus Newtons Basisvorstellung ergeben sich in Verbindung mit einem Zeitpostulat die kanonischen Gleichungen, welche noch vorrelativistisch die Eigenzeit umfassender als in der Relativitätstheorie zu definieren erlauben. – (2) Bei Anwendung auf Materiepunkte und andere punktförmige Teilchen gelangt man bereits zur relativistischen Mechanik. – (3) Sobald mehrere räumlich getrennte Materiepunkte im Spiele sind, können Bewegungen nur noch näherungsweise durch kanonische Gleichungen beschrieben werden. Wechselwirkungen werden durch Felder vermittelt, die nach Zahl und Art durch Symmetrieeigenschaften der kräftefreien Bewegung bestimmt sind. Zunächst wird die Eichfeldtheorie der Elektrodynamik entwickelt. – (4) Weyls Eichidee ist aus der allgemeinen Relativitätstheorie hervorgegangen. Umgekehrt gewinnt man auch diese aus der Eichidee.

Hier werden alle Entwicklungen nur bis zu Gleichungen geführt, von denen aus der Anschluß an einschlägige Vorlesungen oder Bücher möglich ist. Es geht hier hauptsächlich um die Darlegung der grundlegenden Ideen und Erfahrungen und weder um die Würdigung aller Erfahrungen, noch um die volle Entfaltung der mathematischen Theorie.

Teil I

Zur kanonischen Mechanik

Die kanonische Mechanik von Hamilton ist enger mit den naturphilosophischen Prinzipien von Newton verbunden; als man historischen Wegen folgend meinen könnte. Um das in nötiger Allgemeinheit zu zeigen, betrachten wir Systeme, deren Lage durch beliebig, aber endlich viele Koordinaten

$$q \equiv (q_1, q_2 \dots q_i \dots q_n)$$

beschrieben wird. Bewegungen zeigen sich darin, daß sich die Lagegrößen $q_i(\tau)$ im Laufe der Zeit τ ändern. Darin ist der Zeitparameter zunächst noch nicht genau definiert. Es sei nur festgelegt, daß größere Werte von τ auf spätere Zeiten bezogen sind. Danach ist τ ein beliebiger Zeitordnungsparameter. Hätte Aristoteles[1] seine physikalische Bewegungsdefinition schon quantitativ formulieren können, so wäre er zu der gleichen Darstellung gelangt.

Die Funktionen $q_i(\tau)$ beschreiben Lageänderungen. Seit Zenon[2] hat man beinahe 2000 Jahre lang an der Vorstellung festgehalten, Bewegung sei nichts anderes als Lageänderung. Das spiegelt sich noch heute darin wieder, daß man die Gruppe der kongruenten Verlagerung von Gebieten im Euklidschen Raum Bewegungsgruppe nennt. Obwohl schon Platon und Aristoteles gesehen haben, daß die Fortbewegung eines abgeschnellten Pfeils mit der Zenonschen Vorstellung schwer vereinbar ist, haben ernsthafte Zweifel daran erst im dreizehnten Jahrhundert begonnen. Am Ende des vierzehnten konnte Blasius[3] von Parma sagen, Bewegung sei eine von der Lage unabhängige Eigenschaft der Körper, die sich nicht von selbst, sondern nur durch äußere Eingriffe ändere.

Es ist nicht bekannt, ob Newton oder wenigstens Galilei die Thesen von Blasius gekannt hat. Doch geht Newton[4] von den nämlichen Vorstellungen wie Blasius aus, formuliert sie aber nicht nur verbal, sondern von vorneherein mathematisch seinem Programm folgend, die Naturphilosophie zu mathematisieren. Danach gehört zu jeder Lagegröße $q_i(\tau)$ eine Bewegungsgröße $q_i(\tau)$. Die Lagegrößen q beschreiben erst zusammen mit den Bewegungsgrößen

$$p \equiv (p_1, p_2 \dots p_i \dots p_n)$$

den momentanen Zustand eines Systems. Dadurch ist Bewegung mehr als Lageänderung. Die Zenonsche Vorstellung ist endgültig überwunden.

Es bedarf äußerer Ursachen, den Zustand p, q des Systems zu ändern. Nach Weyl[5] heißen Ursachen diejenigen Größen, welche die Änderungsraten von Zustandsgrößen bestimmen. Das sind F_i und I_i in den Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{dp_i(\tau)}{d\tau} = F_i, \quad \frac{dq_i}{d\tau} = I_i, \quad i \quad (1, 2 \ldots n).$$

Hat man erst die Existenz aller Zustandsgrößen p, q akzeptiert, so ist der verbale Inhalt dieser Gleichungen abermals mit der physikalischen Bewegungsdefinition von Aristoteles im Einklang. Was hier Ursache genannt ist, heißt bei ihm Ropè und in der scholastischen Philosophie Vis. Entsprechend nennt Newton F_i Vis impressa und I_i Vis insita (oder innata oder inertia). Erst Motte[4] hat in der englischen Übersetzung von Newtons „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" die kurzen Namen force = Kraft bzw. inertia = Trägheit eingeführt und damit den Bedeutungswandel des Wortes Kraft. Nur die Anerkennung der Bewegungsgrößen als Zustandsvariablen ist wesentlich, nicht der Bedeutungswandel des Wortes Kraft.

Die obigen Gleichungen sollen für beliebige Systeme gelten. Speziell unter abgeschlossenen Systemen versteht man solche, deren Verhalten von ihrer Umwelt unabhängig ist. In Strenge kann nur die Gesamtwelt abgeschlossen sein. Gäbe es mehrere davon, so könnten wir nur eine kennen. Wir könnten aber von keinen einzelnen Dingen reden, gäbe es nicht Teilsysteme, die näherungsweise abgeschlossen sind. Sie verhalten sich innerhalb weiter Grenzen so, als wären sie allein auf der Welt.

Das impliziert einerseits, daß alle Aussagen über abgeschlossene Teilsysteme nur näherungsweise richtig sein können. Man muß stets mit der Möglichkeit von Gültigkeitsgrenzen rechnen. Andererseits hat man mit dem Begriff der Abgeschlossenheit immer die Gesamtwelt im Blick, obwohl Aussagen darüber unausweichlich unsichere Extrapolationen enthalten, die korrigiert werden müssen, sobald weitere Bereiche des Kosmos zugänglich werden.

Die Annahme der Existenz ähnlicher Dreiecke beliebiger Größe in der Euklidschen Geometrie, die eng mit Euklids Parallelenaxiom verbunden ist, liefert ein frühes Beispiel. Das Dreieck ist das Einzelding. Die Annahme der Existenz von ähnlichen Dreiecken verschiedener Größe ist in begrenzten Bereichen nur mit unmerklichen Fehlern behaftet. Die Extrapolation ins Unendliche kann fragwürdig sein und ist, wie wir heute wissen, unzulässig. Dem Begriff abgeschlossenes System sind also von zwei Seiten her Grenzen gesetzt. Das dürfen wir nicht vergessen.

Da wir in abgeschlossenen Teilsystemen von Umwelteinflüssen absehen dürfen, müssen Kraft und Trägheit in den Bewegungsgleichungen (1) Funktionale der Zustandsvariablen $p(\tau)$ und $q(\tau)$ sein. Mit der Kausalität wäre es vereinbar, wenn die Werte von F_i und I_i zu einer bestimmten Zeit τ_0 von allen $p_i(\tau)$, $q_i(\tau)$ in vergangenen Zeiten $\tau < \tau_0$ abhängen würden. Das würde mathematisch dazu führen, daß die Differentialgleichungen in (1) solche höherer und im allgemeinen sogar unendlich hoher Ordnung wären, und wäre damit äquivalent, daß p und q entgegen unserer Voraussetzung noch nicht alle Zustandsvariablen liefern. Später wird das zur Einführung von Feldern führen.

Newton folgend sehen wir einstweilen davon ab. Wir nehmen also an, daß F_i und I_i zu einer bestimmten Zeit nur von p und q zur gleichen Zeit abhängen. Somit nehmen die Gleichungen in (1) folgende Gestalt an:

$$(2) \qquad \frac{dp_i(\tau)}{d\tau} = F_i(p(\tau), q(\tau), \tau), \quad \frac{dq_i(\tau)}{d\tau} = I_i(p(\tau), q(\tau), \tau).$$

Betrachten wir ein einziges Paar dieser Gleichungen, so können wir die Differentiale $d\tau$ eliminieren und das Gleichungspaar durch

$$I_i dp_i - F_i dq_i = 0$$

ersetzen. Die Differentialform auf der linken Seite hat gemäß

$$\frac{1}{N}(I_i dp_i - F_i dq_i) = dH$$

stets einen integrierenden Nenner, worin H und N wie I_i und F_i Funktionen von p, q und τ sind. Man sagt, der integrierende Nenner erzeuge ein vollständiges Differential. Daraus folgt

$$I_i = +N\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad F_i = -N\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Führt man mittels

$$dt = N d\tau$$

einen neuen Zeitparameter ein, so erhält man für das i-te Gleichungspaar in (2) die kanonisch aussehenden Gleichungen

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{d\tau} = +\frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Der neue Zeitparameter ist nicht mehr ganz so willkürlich wie der ursprüngliche. Die Wahl wird allein durch die Gleichungen in (2), also durch das physikalische System eingeengt. An die Stelle der beiden unabhängigen Funktionen F_i und I_i tritt eine einzige, nämlich die Funktion H. Das entspricht durchaus dem Umstand, daß wir Zeiten mittels Uhren, also mittels spezieller physikalischer Systeme messen.

Doch ist das Ergebnis nicht so weittragend, wie man meinen könnte. Denn im allgemeinen liefert jedes der Gleichungspaare in (2) einen anderen Zeitparameter. Auch wenn man berücksichtigt, daß jedes Gleichungspaar viele integrierende Nenner hat, ist es im allgemeinen nicht möglich, einen gemeinsamen zu finden. Da es jedoch nach aller Erfahrung eine gemeinsame physikalisch definierte Zeit gibt, liegt es nahe, nur solche F_i und I_i zuzulassen, die einen gemeinsamen integrierenden Nenner haben, für die also

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(I_i dp_i - F_i dq_i) = dH \tag{3}$$

ist. Damit ist zu den Newtonschen Gleichungen in (2) die Forderung in (3) als Zeitpostulat hinzugetreten. Es ist offensichtlich mit der Definition der Entropie in der Thermodynamik verwandt, zunächst mathematisch formal, wahrscheinlich auch inhaltlich. Doch gehen wir darauf hier nicht ein.

Das Zeitpostulat führt zum Gesamtsystem der kanonischen Gleichungen. Aus (3) folgt ähnlich wie oben

$$F_i = -N\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad I_i = +N\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i \in (1, 2 \ldots n).$$

Mit dem neuen Zeitparameter

$$dt = N d\tau \tag{4}$$

ergeben sie sich durch Substitution in (2):

(5) $$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{d\tau} = +\frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Zwar ist immer noch die Zeit nicht eindeutig definiert. Denn es gibt eine große Mannigfaltigkeit zeitabhängiger kanonischer Transformationen, die zu Gleichungen derselben Art führen, in denen aber die Zeit und die Zustandsvariablen transformiert sind. Doch ist an die Stelle der $2n$ noch unbekannten Funktionen F_i und I_i eine einzige getreten, nämlich die Hamiltonfunktion $H(p, q, t)$. Man kann H empirisch zu bestimmen suchen oder nach Prinzipien fragen, die die Willkür der Wahl von H einengen. Letzteres führt zu einer Theorie der Hamiltonfunktion.

Damit ist gezeigt, daß man nur das Zeitpostulat braucht, um von den allgemeinen Newtonschen Bewegungsgleichungen in (1/2) zu den kanonischen Gleichungen zu gelangen und insbesondere dazu, wie sich Trägheit und Kraft aus der Hamiltonfunktion berechnen. Unter kanonischer Mechanik versteht man die Gesamtheit der Sätze, die man bei gegeben angenommener Hamiltonfunktion aus den kanonischen Gleichungen erhält, die für beliebige Hamiltonfunktionen gelten.

Das kann man in allen Lehrbüchern[6] über die kanonische Mechanik nachlesen. Hier betrachten wir nur das Hamiltonsche Prinzip, weil es sich nun in einer weiterweisenden Form schreiben läßt, und die kanonische Eigenzeit, die unter diesem Namen kaum bekannt ist, und die in Hinblick auf die Einsteinschen Relativitätstheorien besonderes Interesse verdient.

Das Hamiltonsche Prinzip schreibt sich raum-zeitsymmetrisch, wenn man q_0 statt t als Zeit einführt und p_0 durch

(6) $$K \equiv p_0 + H(p, q, q_0) = 0$$

definiert. In diesem Fall genügt es, das Wirkungsintegral durch

(7) $$S = \int_A^B \sum_{\alpha=0}^{n} p_\alpha dq_\alpha = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{\alpha=0}^{n} p_\alpha \frac{dq_\alpha}{d\tau} d\tau$$

zu definieren. Darin ist τ ein willkürlicher Parameter, der nicht variiert wird. Die Zustandsvariablen p_α und q_α mit $\alpha \in (0, 1, 2 \ldots n)$ werden im Integrationsintervall A, B so variiert, daß die Nebenbedingung in (6) stets erfüllt ist. Ferner soll an den Intervallgrenzen A und B stets $\delta q_\alpha = 0$ sein. Unter diesen Voraussetzungen ist das Wirkungsintegral für die wahren Zustandsbahnen stationär. Es gilt das Hamiltonsche Prinzip

(8) $$\delta S = 0.$$

Die Nebenbedingung berücksichtigt man wie gewöhnlich mittels der Lagrangeschen Parametermethode, geht also von folgender Forderung aus

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_\alpha p_\alpha \frac{dq_\alpha}{d\tau} - \lambda K \right) d\tau = 0.$$

Daraus erhält man (6) bei freier Variation nach λ, und die Variationen nach p_α und q_α ergeben

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = -\lambda \frac{\partial K}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{dq_\alpha}{d\tau} = +\lambda \frac{\partial K}{\partial p_\alpha},$$

woraus nach (6)

$$\frac{dp_0}{d\tau} = -\lambda \frac{\partial H}{\partial q_0}, \quad \frac{\partial q_0}{d\tau} = +\lambda,$$

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\lambda \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{d\tau} = +\lambda \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

oder nach Elimination von λ

(9) $$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{d\tau} = +\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

hervorgeht. Das ist mit (5) äquivalent, weil sich die letzte Gleichung aus den beiden vorderen ableiten läßt.

Damit ist gezeigt, daß die kanonischen Gleichungen aus der Forderung folgen, das Wirkungsintegral solle stationär sein. Natürlich ist damit das Hamiltonsche Prinzip aus den kanonischen Gleichungen mathematisch abgeleitet. Doch stellt sich die Frage, ob man physikalisch verstehen kann, warum gerade das Wirkungsintegral stationär sein soll. Man wird kaum noch dem finalen Charakter des Prinzips Bedeutung beimessen wollen. Doch legt die Definition des Wirkungsintegrals in (5) eine quantenphysikalische Interpretation nahe. Denn das Wirkungsintegral in (5) ist wegen $p_\alpha = \hbar k_\alpha$ zur Phase von Materiewellen[7] proportional. Stationäres S

bedeutet also, daß die Phase stationär ist. Hiernach sind Bahnkurven Linien, längs denen benachbarte Wellenzüge günstig interferieren. Das Hamiltonsche Prinzip entspricht hiernach der wellentheoretischen Definition von Strahlen. Im Rahmen der klassischen kanonischen Mechanik müssen wir uns mit diesem qualitativen Hinweis begnügen. Doch macht er deutlich, daß man die Quantenphysik braucht, um das Hamiltonsche Prinzip physikalisch zu verstehen, und zeigt, daß die Quantenphysik tiefer wurzelt als die klassische Physik.

Aus dem Hamiltonschen Prinzip folgt der Satz: es gibt Flächenscharen $S(q) = \text{const}$, derart, daß die Gleichungen

$$(10) \qquad p_\alpha = \frac{\delta S}{\delta q_\alpha}$$

zu Lösungen der kanonischen Gleichungen führen. – Trifft das zu, so muß nach (6) für die Funktion $S(q)$ die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung

$$(11) \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0$$

gelten. Nur Lösungen dieser Gleichung können mit der Behauptung im Einklang sein. Durch Substitution in das Wirkungsintegral (7) erhält man

$$(12) \qquad S = \int_A^B \sum_\alpha \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = \int_A^B dS = S(q_B) - S(q_A)\,.$$

Wegen der Voraussetzung $\delta q_A = 0$ und $\delta q_B = 0$ ist auch die Forderung $\delta S = 0$ erfüllt. Die Bedingungen des Hamiltonschen Prinzips sind also auf eine beinahe triviale Weise gewährleistet.

Es bleibt nur übrig, die Lösungen zu konstruieren. Auf jeder Fläche $S = \text{const}$ hat p nach (10) in jedem Punkt einen bestimmten Wert. Damit erhält man aus den kanonischen Gleichungen für dq/dt

$$\frac{dq_\alpha}{d\tau} = \left(\frac{\partial K}{\partial p_\alpha}\right)_{p\,=\,\partial S/\partial q}.$$

In sämtlichen Punkten auf den Flächen $S = \text{const}$ ist nicht nur p, sondern auch dq/dt bestimmt. Durch jeden Punkt auf der Fläche geht also eine Bahnkurve in bestimmter Richtung. Wir erhalten die ganze Bahnkurve, wenn wir von einem Punkt ausgehen und von Fläche zu Fläche fortschreiten.

Eine einzelne Bahnkurve schneidet jede der Flächen S = const in einem Punkt. Der Wert der Konstanten ist also zugleich ein Parameter, durch den man die Punkte auf Bahnkurven definieren kann. Es ist eine durch das System selbst bestimmte Zeit. Wir nennen sie ‚kanonische Eigenzeit'. Der Name ist aus der speziellen Relativitätstheorie übernommen. Es wird sich zeigen, daß die Eigenzeit der speziellen Relativitätstheorie[8] bis auf einen Dimensionsfaktor mit der kanonischen übereinstimmt. Das bleibt in der allgemeinen Relativitätstheorie und sogar bei Gegenwart elektromagnetischer Felder richtig. Die kanonische Eigenzeit ist jedoch nicht nur für Materiepunkte, sondern auch für zusammengesetzte Systeme definiert. Wegen des Zusammenhangs von Wirkungsintegralen mit Wellenphasen der Quantenmechanik kann man sagen, die Eigenzeit sei eine in Wellenphasen gemessene Zeit. Das macht noch einmal deutlich, daß sie allein durch das physikalische System bestimmt ist.

Bekanntlich kann man nur Phasendifferenzen messen. Das muß sich in der Eigenzeit widerspiegeln. Um das zu sehen, ist es zweckmäßig, die Lagrangefunktion einzuführen. Nach Substitution von (6) in (7) erhält man für das Wirkungsintegral

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{dq_i}{dt} - H \right) dt\,.$$

Der Integrand

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{dq_i}{dt} - H = L\,(q, \dot{q}, t) \tag{13}$$

heißt Lagrangefunktion nach Elimination von p zugunsten von $\dot{q}$ mittels

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{14}$$

Dabei geht das Hamiltonsche Prinzip in

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\,(\dot{q}, q, t)\, dt = 0 \tag{15}$$

über und liefert in herkömmlicher Weise[6] die Lagrangeschen Gleichungen

(16) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Lagrangefunktionen sind durch die Bahnkurven noch nicht eindeutig bestimmt. Ersetzt man nämlich

$$L \to L' = L + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \chi(q,t)}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \chi(q,t)}{\partial t},$$

worin $\chi(q, t)$ eine willkürliche Funktion ist, so ändert sich zwar das Wirkungsintegral gemäß

$$S \to S' = S + \chi(q(t_2), t_2) - \chi(q(t_1), t_1).$$

Doch ist der Zusatz ohne Einfluß auf die Bewegung, weil $q(t)$ an den Enden t_1 und t_2 nicht variiert wird.

Daraus folgt, daß die Eigenzeit nicht eindeutig definiert ist. Sie ist also nicht ohne weiteres eine beobachtbare Größe. Betrachten wir jedoch zwei verschiedene Raum-Zeitbahnen, die von einem Punkte A ausgehen, und die sich in einem anderen Punkte B wieder begegnen, so heben sich die Zusatzterme heraus. Es ist also

$$\Delta S' = \Delta S \neq 0.$$

Die Differenzen stimmen überein und sind im allgemeinen von 0 verschieden.

Letzteres besagt, daß die kanonische Eigenzeit wie die speziell relativistische nicht integrabel ist. Für Wellenphasen ist das von vorneherein klar, beruhen doch gerade darauf die Interferenzen.

Die Invarianz von ΔS bedeutet, daß der Messung von Unterschieden der in Eigenzeiten definierten Alterung zwischen zwei Punkten der Begegnung keine grundsätzlichen Schwierigkeiten im Wege stehen. Ob und wie weit diese Unterschiede wirklich beobachtbar sind, bedarf der experimentellen Prüfung. Wenigstens innerhalb der beiden Relativitätstheorien ist experimentell gezeigt, daß die Unterschiede beobachtbar und mit der Erwartung im Einklang sind. Darauf kann man jedoch erst nach Ableitung der Hamiltonfunktion für spezielle Systeme und insbesondere für Materiepunkte eingehen.

Hier halten wir fest, daß Wirkungsintegrale eng mit quantenmechanischen Wellenphasen verknüpft sind, und daß diese eine systemeigene Zeit, die kanonische Eigenzeit definieren.

Anmerkungen und Literaturhinweise

[1] Der Bewegungsbegriff von Aristoteles ist vielschichtig. Wir knüpfen hier an seine physikalische Bewegungsdefinition an. Danach zeigen sich Bewegungen in Änderungen der Intensitäten von Eigenschaften wie Lage, Schwärze, Wärme u. dgl. Eigenschaften sind durch Intensitäten gekennzeichnet, welche sich stetig ändern können. Das geschieht aber nur durch äußere Eingriffe, welche Ropè heißen.

[2] W. Capelle: Die Vorsokratiker; Kröners Taschenbuchausgabe, Band 119; Alfred Kröner Verlag, Stuttgart, vierte Auflage, 1953. – Hier: Zenon (um 450 v. Chr.), ab S. 169, insbesondere Ziff. 14, S. 177 (Fragment 4).

[3] Anneliese Maier: Zwischen Philosophie und Mechanik; Studien zur Philosophie der Spätscholastik; Ed. di Storia e letteratura 1953; hier: S. 140/143. Verf. hat zwei Nachschriften einer Disputation von Blasius aus dem Jahre 1397 wiederentdeckt.

[4] I. Newton: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Streater, London 1687. – F. Cajori: Sir Isaac Newton's mathematicle principles of natural philosophy and his system of the world, translated into English by Andrew Motte in 1729; University of California Press 1962; – Hier insbesondere: Definitionen III und IV, S. 2.

[5] H. Weyl: Raum-Zeit-Materie, fünfte umgearbeitete Auflage, Springer, Berlin 1923; hier: S. 212.

[6] A. Sommerfeld: Vorlesungen über Theoretische Physik, Band I, Mechanik; Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1943; hier: Kapitel VIII, sowie §§ 33/34.

[7] Ist $\psi(q,t) = u(q,t)\, e^{iS(q,t)/\hbar}$ die Wellenfunktion in geometrisch optischer Näherung, d. h. für langsam veränderliche Amplituden $u(q,t)$, so gilt

$$-i\partial\psi/\partial q_\alpha = \frac{1}{\hbar}(\partial S/\partial q_\alpha) = k_\alpha\psi = \frac{1}{\hbar}p_\alpha\psi.$$

[8] Für kräftefreie relativistische Materiepunkte in $\underline{r} = (x, y, z)$ ist das Wirkungsintegral gemäß (15) gleich

$$S = mc^2 \int \sqrt{1 - \dot{\underline{r}}^2/c^2}\, dt,$$

und die Eigenzeit stimmt mit $s = -S/mc^2$ überein.

Teil II

Kanonische Gleichungen für Materiepunkte

Die kanonischen Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = +\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_i}, \quad i \in (1, 2 \dots n)$$

folgen wie in Teil I gezeigt[1] allein aus den Annahmen, daß jedes physikalische System durch seine Zustandsvariablen $p = (p_1, p_2 \dots p_n)$, $q = (q_1, q_2 \dots q_n)$, durch das Zeitpostulat und durch die Hamiltonfunktion bestimmt sei. Speziell in der Newtonschen Mechanik kann die Anzahl n der Freiheitsgrade beliebig groß sein, weil mit den Gleichungen auch die mannigfachen inneren Bewegungen von Körpern erfaßt werden können. Das hat allerdings zur Folge, daß es Felder geben muß, die wie das Newtonsche Gravitationsfeld, momentan in die Ferne wirken.

Schon vorrelativistisch ist das unwahrscheinlich. Wegen der endlichen Laufzeiten von Wirkungen ist das vollends ausgeschlossen. Darum können kanonische Gleichungen für Makrosysteme mit endlich vielen Freiheitsgraden nur näherungsweise und nur so lange gelten, als man von Laufzeiten absehen darf. Auch wenn das in weiten Bereichen möglich ist, gelten kanonische Gleichungen nur für Materiepunkte in Strenge. Da solche Gleichungen außerdem auf abgeschlossene Systeme bezogen sind, erfaßt man mit ihnen nur den Grenzfall freier Materiepunkte, bei denen Wechselwirkungen mit der Umwelt vernachlässigbar sind. Nur von diesen wollen wir hier sprechen. Am Ende werden sich Poincaréinvariante Bewegungsgleichungen ergeben. Doch dürfen wir hier diese Invarianz nicht a priori voraussetzen. Nach dem Grundsatz, es sei die Physik, die sich ihren Raum schafft, müssen wir fragen, welche Erfahrungen bei der Bestimmung der Struktur von Raum und Zeit zur Voraussetzung der Existenz kanonischer Gleichungen hinzukommen. Selbst die Struktur des Euklidschen Raumes ist an physikalische Annahmen gebunden, nämlich an die der Existenz starrer Körper[11]. Hier haben wir es aber nicht mehr mit starren Körpern, sondern mit kanonischen Gleichungen zu tun.

Auch ohne Euklidsche Geometrie können wir die Dreidimensionalität des Raumes als empirisch gesichertes Axiom betrachten, den Begriff Axiom im Sinne von Newton verstanden[2]. Das schließt nicht aus, daß man durch Definitionen zu höher dimensionalen Mannigfaltigkeiten übergeht, z. B. zur vierdimensionalen Raum-Zeit oder wie in Teil I zum 2n-dimensionalen Raum der Zustandsvariablen. Doch bewahrt das Dimensionsaxiom auch in solchen Fällen seine Bedeutung.

Nach dem Dimensionsaxiom ist die Lage eines Punktes im Raum durch drei Koordinaten bestimmt. Ein Materiepunkt hat darum mindestens drei Freiheitsgrade. Denkt man dabei an den Spin von Elektronen und Photonen oder an den Isospin von Nukleonen u. dgl., so kann die Anzahl der Freiheitsgrade größer sein. Darauf kommen wir am Ende zurück. Zunächst betrachten wir Materiepunkte mit drei Freiheitsgraden. Danach ist die Hamiltonfunktion

$$(2) \qquad H = H(\underline{p}, \underline{q}, t), \quad \underline{p} = (p_1, p_2, p_3), \quad q = (q_1, q_2, q_3).$$

Seien $\underline{p}(t)$, $\underline{q}(t)$ irgendwelche Lösungen der zugehörigen kanonischen Gleichungen, so können wir nach Funktionen dieser Größen fragen, die längs der Zustandsbahnen gemäß

$$F(\underline{p}(t), \underline{q}(t), t) = \text{const}$$

konstant sind. Dafür gilt

$$(3) \qquad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \underline{p}} \cdot \frac{d\underline{p}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \underline{q}} \cdot \frac{d\underline{q}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \underline{q}} - \frac{\partial H}{\partial \underline{q}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \underline{p}} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Bei gegebenem H ist das eine linear homogene Differentialgleichung für F.

An dieser Stelle ist es zweckmäßig, Poisson-Kommutatoren einzuführen[3]. Sie sind für beliebige Funktionen A und B von $\underline{p}$, $\underline{q}$ durch

$$(4) \qquad [A, B] = \frac{\partial A}{\partial \underline{p}} \cdot \frac{\partial B}{\partial \underline{q}} - \frac{\partial A}{\partial \underline{q}} \cdot \frac{\partial B}{\partial \underline{p}}$$

definiert und genügen den algebraischen Relationen

$$(5) \quad [A, B] = -[B, A], \quad [A, [B, C]] + [B[C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

Letztere heißt Jacobische Identität. Damit lautet (3)

(6) $$\frac{dF}{dt} = [H, F] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

und es gelten die fundamentalen Kommutatoren

(7) $$[p_i, p_k] = 0, \quad [p_i, q_k] = \delta_{ik}, \quad [q_i, q_k] = 0.$$

Beweise sind in einschlägigen Lehrbüchern zu finden. Die Poisson-Kommutatoren sind nicht nur Kürzel. Sie erlauben, viele Rechnungen algebraisch durchzuführen, ohne daß man stets von Neuem auf den analytischen Hintergrund einzugehen braucht.

Sind $F_1, F_2 \ldots$ spezielle Lösungen von (3), so sind auch beliebige differenzierbare Funktionen von $F_1, F_2 \ldots$ Lösungen. Die Integrale sind darum im allgemeinen nicht unabhängig voneinander. Doch kann man zeigen[4], daß es bei sieben Ableitungen sechs unabhängige Integrale gibt, von denen mindestens eines explizit von der Zeit abhängt. Seien $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_5)$ unabhängige Integrale, in denen die Zeit nicht explizit vorkommt, so liefern beliebige Funktionen $\varphi(\eta)$ ebensolche Integrale. Das gleiche gilt für die Kommutatoren

$$[\eta_i, \eta_k] = \eta_{ik}(\eta).$$

Im allgemeinen ist $\eta_{ik} \neq 0$. Doch gibt es auf vielfältige Weisen drei, aber nicht mehr als drei unabhängige Integrale

$$P_i(\eta), \quad i \in (1, 2, 3),$$

die gemäß

(8) $$[P_i, P_k] = 0$$

vertauschbar sind.

Sei nämlich $P_1 = \eta_1$ und $P_2 = P_2(\eta)$, so folgt aus (8)

$$[P_1, P_2] = [\eta_1, \eta_2]\frac{\partial P_2}{\partial \eta_2} + \cdots + [\eta_1, \eta_5]\frac{\partial P_2}{\partial \eta_5} = 0.$$

Es gibt also drei unabhängige Integrale für P_2, etwa $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Mit $P_2 = \xi_1$, $P_3 = P_3(\xi)$ erhält man entsprechend

$$[P_2, P_3] = [\xi_1, \xi_2]\frac{\partial P_3}{\partial \xi_2} + [\xi_1, \xi_3]\frac{\partial P_3}{\partial \xi_3} = 0.$$

Danach gibt es für P_3 nur noch ein unabhängiges Integral, da die Kommutatoren nur von ξ abhängen. Somit ist bewiesen, daß es nicht mehr als drei untereinander und von der Zeit unabhängige Integrale gibt. Aus der Zeitunabhängigkeit folgt ferner

$$[H, \underline{P}] = 0. \tag{9}$$

Die Kommutatorgleichungen (8/9) liefern die Lie-Algebra einer vierparametrigen Abelschen Gruppe, – der Translationsgruppe in der Raum-Zeit, wie wir noch sehen werden.

Aus dem Satz, daß es nur drei zeitunabhängige und Poissonsch vertauschbare Integrale gibt, folgt ferner die Existenz von Integralen $Q'_1(\underline{p}, \underline{q})$, die mit P_2 und P_3, aber nicht mit P_1 kommutieren. Da dann auch $[P_1, Q'_1]$ mit P_2 und P_3 kommutiert, muß dieser Kommutator gemäß

$$[P_1, Q'_1] = f(Q'_1, \underline{P})$$

eine Funktion von Q'_1 und $\underline{P}$ sein. Danach gibt es eine Funktion $Q_1 = g(Q'_1, \underline{P})$, für die $[P_1, Q_1] = 1$ ist. Denn die Differentialgleichung

$$[P_1, Q_1] = \frac{\partial g}{\partial Q_1} f = 1$$

ist integrierbar. Man kann sogar von zeitabhängigen Integralen $Q'_1(\underline{p}, \underline{q}, t)$ ausgehen. Das ist unerläßlich, wenn man auf dieselbe Weise Q_2 und Q_3 bestimmt, derart daß

$$[P_i, Q_k] = \delta_{ik} \tag{10}$$

ist, weil die sechs Integrale $\underline{P}$ und $\underline{Q}$ nicht alle zeitunabhängig sein können.

Danach sind die Kommutatoren $[Q_i, Q_k]$ mit allen Komponenten von $\underline{P}$ vertauschbare Integrale der Bewegung. Sie können also gemäß

$$[Q_i, Q_k] = f_{ik}(\underline{P}) = f_{ki}(\underline{P})$$

nur von $\underline{P}$ abhängen. Aus der Jacobischen Identität folgt mit $\partial_i = \partial/\partial P_i$

$$\partial_i f_{kl} + \partial_k f_{li} + \partial_l f_{ik} = 0, \quad f_{ik} = \partial_i q_k(\underline{P}) - \partial_k q_i(\underline{P}).$$

Ersetzt man schließlich $Q_i \to Q_i + f_i$, so bleiben die Kommutatoren in (8/10) unverändert, und für $\underline{Q}$ gilt

$$[Q_i, Q_k] = 0. \tag{11}$$

Es gibt also eine Transformation $(\underline{p}, \underline{q}) \rightarrow (\underline{P}, \underline{Q})$, nach der $\underline{P}$ und $\underline{Q}$ denselben Vertauschungsrelationen genügen wie $\underline{p}$, $\underline{q}$. Darum ist diese Transformation eine kanonische. Stellt man H als Funktion von $\underline{P}$, $\underline{Q}$, t dar, so gelten auch nach der Transformation die kanonischen Gleichungen

$$(12) \qquad \frac{d\underline{P}}{dt} = -\frac{\partial H(\underline{P}, \underline{Q}, t)}{\partial \underline{Q}}, \quad \frac{d\underline{Q}}{dt} = +\frac{\partial H(\underline{P}, \underline{Q}, t)}{\partial \underline{P}}.$$

Da die Komponenten von $\underline{P}$ Integrale der Bewegung sind, folgt

$$(13) \qquad \frac{\partial H}{\partial \underline{Q}} \equiv 0, \quad H = H(\underline{P}, t).$$

Die Hamiltonfunktion ist also gegen die Translationen $\underline{Q} \rightarrow \underline{Q} + \underline{a}$, $\underline{a}$ = const, invariant. Der Raum entpuppt sich also nach einer passend gewählten kanonischen Transformation als ein homogener. Die zugehörigen Bewegungsgrößen sind die nach dem Noetherschen Satz[5] zur Homogenität gehörigen Erhaltungsgrößen und heißen als solche Impulse.

Die zweiten kanonischen Gleichungen in (12) liefern

$$\frac{d\underline{Q}}{dt} = [H, \underline{Q}] + \frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \underline{P}}.$$

Hier kommt Newtons Definition II ins Spiel, nach der Geschwindigkeit und Impuls proportional sein sollen. Seit den Versuchen von Kaufmann[6] ist bekannt, daß der Faktor von der Energie abhängt. Drei Jahre später hat Einstein aus der speziellen Relativitätstheorie die Gleichung

$$(14) \qquad \underline{P} = \frac{1}{c^2} H \frac{d\underline{Q}}{dt}$$

abgeleitet, die an Stelle von Newtons Definition II getreten ist. Diese Gleichung ist bis zu extremen Energien unabhängig von der speziellen Relativitätstheorie bestens bestätigt. Wir können sie darum als empirische Basis der relativistischen Mechanik ansehen. Darin ist $1/c^2$ wie m in Newtons Definition II eine Dimensionskonstante, aber eine universelle, die für alle Materiepunkte den gleichen Wert hat. Dabei stimmt c mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit überein.

Mit (14) erhält man aus dem zweiten Satz der kanonischen Gleichungen

$$\underline{P} = \frac{1}{c^2} H \frac{d\underline{Q}}{dt} = \frac{1}{c^2} H \frac{\partial H}{\partial \underline{P}},$$

woraus durch Integration die Hamiltonfunktion

$$H = c\sqrt{\underline{P}^2 + m^2c^2}, \quad m^2c^2 = \text{const}, \tag{15}$$

hervorgeht. Darin ist m^2c^2 zunächst nur eine Integrationskonstante. Doch ist m mit Newtons Masse vergleichbar.

Daraus folgen alle weiteren Symmetrien, zunächst die Homogenität der Zeit, denn

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad H = H(\underline{P}) = \text{const}. \tag{16}$$

Die zugehörige Erhaltungsgröße, – erst jetzt ist sie eine solche, – heißt Energie.

Die Hamiltonfunktion wird auch mit

$$\underline{M} = \underline{Q} \times \underline{P} \tag{17}$$

vertauschbar sein. Denn dafür gilt, wenn die Indizes $i\,k\,l$ durch zyklische Vertauschung aus $1\,2\,3$ hervorgehen,

$$\begin{aligned} &[M_i, P_k] = -P_l, \quad [M_k, P_i] = +P_l, \quad [M_l, P_l] = 0, \\ &[M_i, Q_k] = -Q_l, \quad [M_k, Q_i] = +Q_l, \quad [M_l, Q_l] = 0, \\ &[M_i, M_k] = -M_l. \end{aligned} \tag{18}$$

Danach definiert $\underline{M}$ infinitesimale Transformationen, die gemäß

$$[\underline{M}, \underline{P}^2] = 0, \quad [\underline{M}, \underline{Q}^2] = 0, \quad [\underline{M}, \underline{M}^2] = 0 \tag{19}$$

die Quadrate $\underline{P}^2$, $\underline{Q}^2$ und $\underline{M}^2$ invaraint lassen. Sie beschreiben also Drehungen, und $\underline{P}$, $\underline{Q}$ und $\underline{M}$ verhalten sich wie Vektoren.

Danach folgt aus (15)

$$[H, \underline{M}] = 0, \quad \frac{d\underline{M}}{dt} = 0, \quad \underline{M} = \text{const}. \tag{20}$$

H ist also drehinvariant. Alle Richtungen im Raum sind gleichberechtigt. Der Raum ist isotrop. die zur Isotropie gehörigen Erhaltungsgrößen $\underline{M}$ heißen Drehimpuls.

Damit ist gezeigt, daß der Raum die Symmetrien der Euklidschen Geometrie hat. Denn Homogenität und Isotropie bestimmen die geometrischen Kongruenzen. Sie bilden die Gruppe der Kongruenzen, die man gewöhnlich Bewegungsgruppe nennt, und die in Hinblick auf das Folgende auch Euklid-Gruppe heißen könnte. Die Lie-Algebra der Bewegungsgruppe lautet

$$(21)\qquad \begin{aligned} &[P_i, P_k] = 0, \quad [M_i, M_k] = -M_l, \\ &[M_l, P_l] = 0, \quad [M_i, P_k] = -M_l. \end{aligned}$$

Hiernach ist der Euklidsche Raum nicht mehr durch die Eigenschaften starrer Körper bestimmt. Er folgt aus den kanonischen Gleichungen, also aus den kanonischen Gleichungen in Verbindung mit der Impuls-Geschwindigkeitsrelation.

Die Symmetrien der aus (15) folgenden kanonischen Gleichungen sind noch nicht erschöpft. Denn neben den drei Integralen $\underline{P}$ gibt es noch drei weitere Integrale der Bewegung, nämlich

$$(22)\qquad \underline{K} = \underline{N} - \underline{P}t = \text{const}, \quad \underline{N} = \frac{1}{c^2}H\underline{Q} = \frac{1}{c}\underline{Q}\sqrt{\underline{P}^2 + m^2c^2}.$$

In der Tat ist

$$\frac{d\underline{K}}{dt} = \frac{1}{c^2}H\frac{d\underline{Q}}{dt} - \underline{P} = \frac{1}{c^2}H\frac{\partial H}{\partial \underline{P}} - \underline{P} = 0.$$

Die Funktionen $\underline{N}$ liefern folgende infinitesimalen Transformationen

$$(23)\qquad \begin{aligned} &[\underline{N}, H] = \underline{P}, \quad [N_i, P_k] = \frac{1}{c^2}H\delta_{ik}, \\ &[N_i, M_k] = +N_l \quad [N_i, M_k] = -N_l \quad [N_l, M_l] = 0. \end{aligned}$$

Nach (9), (21) und (23) ist die quadratische Form

$$(24)\qquad Q_0 = \frac{1}{c^2}H^2 - \underline{P}^2$$

mit allen Größen H, $\underline{P}$, $\underline{M}$, $\underline{N}$ Poissonsch vertauschbar. Sie ist also gegen alle daraus hervorgehenden Transformationen invariant. Alle durch eine Invarianz definierten Transformationen bilden eine Gruppe. Durch die Invarianz von Q_0 wird die zehnparametrige Poincaré-Gruppe definiert, deren Lie-Algebra durch (9), (21) und (23) bestimmt ist. Die Euklid-Gruppe ist nach (21) eine Untergruppe. H und $\underline{P}$ liefern die (übrigens invariante) Abelsche Untergruppe der Translationen, $\underline{M}$ und $\underline{N}$ die der Lorentz-Transformationen und $\underline{M}$ allein die der Drehungen. Auf ein genaueres Studium der Gruppeneigenschaften gehen wir hier nicht ein[7].

Das Wirkungsintegral liefert den Anschluß an herkömmliche Darstellungen der speziellen Relativitätstheorie. Aus (14/15) folgt

$$(26)\qquad \underline{P} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \underline{v} = \frac{d\underline{Q}}{dt}, \quad \beta = |\underline{v}/c|\,.$$

Danach ist die Lagrangefunktion gleich

$$L = \underline{P}\cdot\dot{\underline{Q}} - H = \frac{m\underline{v}^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = -mc^2\sqrt{1-\beta^2},$$

und das Wirkungsintegral lautet

$$(27)\quad S = -mc^2\int\sqrt{1-\beta^2}\,dt = -mc\int\sqrt{c^2dt^2 - d\underline{Q}^2} \equiv -mc\int ds\,.$$

Darin ist ds nach Teil I die kanonische Eigenzeit. Sie stimmt für freie Materiepunkte mit der relativistischen überein.

Die Definitionsgleichung

$$(28)\qquad ds^2 = c^2dt^2 - d\underline{Q}^2 \equiv -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

mit

$$x^0 = ct, x^i = Q_i, i \in (1,2,3)$$

und

$$(29)\qquad (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu \in (0,1,2,3)\,,$$

ist mit dem durch

$$(30)\qquad dl^2 = d\underline{r}^2 = g_{ik}dx^i dx^k, g_{ik} = \delta_{ik},$$

definierten Linienelement dl der Euklidschen Geometrie vergleichbar. Wie durch (31) die Euklidsche Geometrie mit ihrer pythagoräischen Metrik bestimmt ist, so liefert (28) eine Metrik in der Raum-Zeit und bestimmt deren Geometrie. Nach ihrem Entdecker spricht man von der Minkowskischen Raum-Zeit, der Minkowskischen Metrik und vom Minkowski-Tensor in (29).

Das Linienelement in (28) ist klarerweise gegen alle Raum-Zeittranslationen $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$, a^μ = const, invariant. Außerdem ist es Lorentzinvariant, weil die Lorentzinvariante quadratische Form in (24) von gleicher Struktur ist.

„Von Stund an", so hat Minkowski[8] einst ausgerufen, verschmelzen Raum und Zeit zu einer neuen, untrennbaren Einheit, zur vierdimensionalen Raum-Zeit (von ihm noch „Welt" genannt). Doch darf man nicht übersehen, daß die Zeit durch die Vorzeichenfolge $-+++$, durch die Signatur der Metrik ihre Sonderstellung bewahrt. Seit dem wird die Minkowskische Metrik als axiomatische Basis der speziellen Relativitätstheorie betrachtet. Hier haben wir gezeigt, daß diese Metrik nicht postuliert werden muß. Sie ergibt sich aus der Voraussetzung kanonischer Gleichungen und dem Axiom der Dreidimensionalität in Verbindung mit der durch Erfahrungen gesicherten Impuls-Geschwindigkeitsrelation, einer Modifikation von Newtons Definition II.

Es kann hier nicht unsere Aufgabe sein, die Konsequenzen der relativistischen Mechanik im einzelnen darzulegen[9]. Doch wollen wir noch in Anlehnung an Teil I die relativistische Eigenzeit mit der kanonischen vergleichen. Im Einklang mit dieser ist die relativistische Eigenzeit freier Materiepunkte gleich

$$dt_0 = -\frac{1}{mc^2}dS = \frac{1}{c}ds = \sqrt{1-\beta^2}\,dt. \tag{31}$$

Das ist zunächst nur eine formale Definition, die keine Realbedeutung zu haben braucht. Nur wenn man fordert, daß sich ungestört laufende Uhren nach der Eigenzeit richten, hat man mit experimentell prüfbaren Konsequenzen zu rechnen.

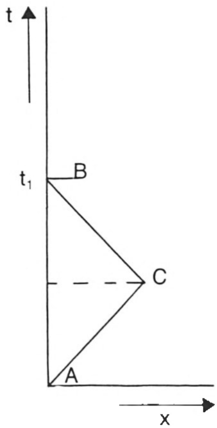
Zunächst besagt (31), daß die Eigenzeit bei Materiepunkten, die im Koordinatensystem ruhen, mit der Koordinatenzeit übereinstimmt, woran der Index 0 in dt_0 erinnern soll. Bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten gilt für endliche Zeitdifferenzen

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Bewegt sich in einem Kanalstrahl[10] ein angeregtes Ion relativ zum Beobachter mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$, und strahlt es im eigenen Ruhsystem mit der Frequenz $\nu_0 = 1/t_0$ (t_0 = Zeitdauer einer Schwingung), so findet man im Ruhsystem des Beobachters (wegen des begleitenden Doppler-Effekts nur senkrecht zum Strahl) die Frequenz

$$\nu = \frac{1}{\Delta t} = \nu_0\sqrt{1-\beta^2},$$

also eine Rotverschiebung. Experimente bestätigen das Ergebnis und damit die Erwartung, daß es Uhren gibt, die sich nach der Eigenzeit richten. Eine Reihe vergleichbarer Versuche hat zum gleichen Ergebnis geführt.



Einstein hat nebenstehend skizziertes Gedankenexperiment betrachtet. Ein im Koordinatensystem (x, t) ruhender Materiepunkt gelangt in der Zeit von 0 bis t_1 längs der Ordinate von A nach B. Ein anderer Materiepunkt bewege sich zunächst zur gleichen Zeit $t = 0$ vom gleichen Punkt A ausgehend mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ nach rechts bis zum Punkt C und treffe mit umgekehrter Geschwindigkeit zur Koordinatenzeit t_1 in B wieder mit dem ersten Materiepunkt zusammen. Seine Borduhr zeige die Zeit t_2. Nach obiger Gleichung ist

$$t_2 = t_1\sqrt{1 - \beta^2}.$$

Der Materiepunkt auf Reisen altert also nach seiner Eigenzeit langsamer als der ruhende. Denkt man statt an Massenpunkte an Zwillingsbrüder, und nimmt man an, daß sich biologische Uhren wie atomare verhalten, so ist der reisende Bruder bei der Wiederbegegnung jünger als der ruhende, bei extremen Verhältnissen vielleicht noch ein junger Mann, während der ruhende aus Altersgründen längst gestorben ist. Man spricht daher mehr gefühlsmäßig als sachlich begründet vom Zwillingsparadoxon.

Man kann kritisch einwenden, daß man nicht wisse, welchen Einfluß die Beschleunigung in C auf die Bordzeit habe. Einstein hat entgegnet, selbst bei kleiner Beschleunigung könne man die Zeiten gleichförmiger Bewegung so groß gegen die Zeitspanne der Beschleunigung machen, daß diese nicht ins Gewicht falle. Ist das auch von vorneherein plausibel, so fehlt doch jede Grundlage, die Erwartung zu beweisen, solange die Eigenzeit nicht auch in Kraftfeldern definiert ist. Sein Argument zwingt zu einer Verallgemeinerung des Eigenzeitbegriffs, z. B. zur Einführung der kanonischen Eigenzeit.

In der Tat kann man Einsteins Argument bestätigen, wenn man von der kanonischen Eigenzeit ausgeht, die auch im nichtrelativistischen Grenzfall definiert ist. Ist $V(x)$ die zur Umkehr zwingende potentielle Energie, so lautet das Wirkungsintegral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 - V(x)\right) dt = W\,(t_2 - t_1) - 2 \int_{t_1}^{t_2} V(x)\, dt\,.$$

Der erste Summand entspricht dem Beitrag bei freier Bewegung. Der zweite liefert asymptotisch

$$\Delta S = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} V(x)\, dt\,,$$

der bei begrenzten Beschleunigungszeiten endlich ist, während $W\,(t_2 - t_1)$ asymptotisch über alle Grenzen wächst.

Das schönste Experiment zur Bestätigung der Abhängigkeit des Alterns vom Bewegungszustand, das in I schon erwähnte Genfer Müonenexperiment, kann erst behandelt werden, wenn die Lagrangefunktion für elektrisch geladene Materiepunkte in elektromagnetischen Feldern bekannt ist.

Auch in der klassischen Physik kann man Gleichungen für Materiepunkte mit inneren Freiheitsgraden formulieren, wie sie aus der Quantenphysik bekannt sind. Dazu braucht man neben $\underline{P}$ und $\underline{Q}$ weitere kanonischen Variablenpaare p, q, die man auch wie folgt schreiben kann.

$$i\,\xi^* = \frac{p + iq}{\sqrt{2}}\,, \quad \xi = \frac{q + ip}{\sqrt{2}}\,, \quad [i\,\xi^*, \xi] = 1\,.$$

Ein verführerisches Beispiel liefert die Hamiltonfunktion

$$H = \xi^{\dagger}(\underline{\alpha} \cdot \underline{P} + \beta\, m)\, \xi\,.$$

Darin sind $\underline{\alpha}$ und β 4×4-Dirac-Matrizen, ξ ist eine einspaltige Matrix, mit vier Komponenten und $\xi^{\dagger}$ ist die Hermitesch konjugierte einzeilige Matrix. Daraus erhält man als kanonische Gleichungen

$$\dot{\underline{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{Q}} = 0\,, \quad \dot{\underline{Q}} = +\frac{\partial H}{\partial \underline{P}} = \xi^{\dagger} \underline{\alpha}\, \xi\,,$$

$$i\,\dot{\xi}^{\dagger} = -\frac{\partial H}{\partial \xi} = \xi^{\dagger}(\underline{\alpha} \cdot \underline{P} + \beta\, m)\,,$$

$$\dot{\xi} = +\frac{1}{i} \frac{\partial H}{\partial \xi^{\dagger}} = -\,i\,(\underline{\alpha}\, \underline{P} + \beta\, m)\, \xi\,.$$

Die beiden letzten äquivalenten Gleichungen stimmen mit der Diracgleichung überein. Sie sind auch Poincaréinvariant. Doch zeigt die zugehörige Lie-Algebra, daß obiges H kein klassisches Modell für Spinelektronen liefert. Insbesondere gibt es keinen inneren Drehimpuls.

Auch andere Ansätze, z. B. auch SU3-symmetrische sind möglich. Doch gibt es keine Anzeichen dafür, daß solche ad hoc eingeführten Modifikationen geeignet sind, innere Freiheitsgrade von Materiepunkten klassisch physikalisch zu erfassen.

Wir haben gezeigt, wie tief die relativistische Mechanik in der von Newton verankert ist. Nur die Dreidimensionalität des Raumes und eine Modifikation von Newtons Definition II mußten als empirisch gegeben vorausgesetzt werden, um nicht nur die relativistischen kanonischen Bewegungsgleichungen, sondern auch die Struktureigenschaften der Minkowskischen Raum-Zeit abzuleiten. Das ist selbst für die Newtonsche Mechanik nicht ohne Bedeutung. Kehrt man nämlich zu Newtons Definition II zurück, so erhält man aus den nämlichen Prinzipien die Euklidsche Geometrie und die sogenannte Galileische Raum-Zeitstruktur, wiederum ohne diese Struktureigenschaften zu postulieren.

Wir meinen darum, sowohl die Newtonsche als auch die Einsteinsche Mechanik tiefer verankert zu haben.

Literaturhinweise und Anmerkungen

[1] F. Bopp: Sitz. ber. d. Bay. Akad. d. Wiss.; Math.-naturw. Kl.; **1983,** xxxx

[2] F. Cajori: Sir Isaac Newton's mathematical principles and his system of the world, translated into English by Andrew Motte in 1729; Univ. of California Press, Berkeley-London 1962; hier S. 546/547.

[3] D. Terhaar: Elements of Hamiltonian Mechanics, North-Holland Publ.Cy, Amsterdam 1961,; hier ch 5, § 3.

[4] E. Kamke: Differentialgleichungen, Band II, AVG Leipzig 1950, S. 19.

[5] E. Noether: Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, Math.-phys. Kl. **1918,** 235.

[6] W. Kaufmann: Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, Math.-phys. Kl. **1901,** 143; **1902,** 291; **1903,** 90. – A. Einstein: Ann. d. Phys. **17,** 891 (1905).

[7] H. Weyl: Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel-Verlag, Leipzig, 1928; hier S. 105.

[8] H. Minkowski: Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, Math.-phys. Kl. **1908,** 53.

[9] H. Weyl: Raum-Zeit-Materie, 5. Aufl., J. Springer-Verlag, Berlin 1923; hier Kapitel III.

[10] H. J. Ives, G. R. Stievell: J. Opt. Soc. **28,** 215, (1938); – G. Otting: Phys. Z. **40,** 681 (1939).

[11] Denn darauf beziehen sich geometrische Kongruenzen.

Teil III

Die Elektrodynamik als Eichfeldtheorie

Wie bereits in Teil II erwähnt[1] lassen sich die Bewegungen von Materiepunkten bei endlichen Abständen wegen der Laufzeiteffekte nur näherungsweise durch kanonische Gleichungen beschreiben. Mittler der Wechselwirkung sind Felder, und diese brauchen zur Ausbreitung Zeit.

Einem speziellen Feld begegnet man bereits im Newtonschen Gravitationsgesetz. Zwar gibt es den Begriff des Feldes noch nicht. Auch fehlen dem Newtonschen Gravitationsfeld Eigenschaften, die sich erst aus voll entwickelten Feldtheorien ergeben. Doch sind schon einige fundamentale Eigenschaften von Feldern zu erkennen. Das zeigt bereits das einfachste Beispiel.

Seien M die Masse der ruhend gedachten Sonne und m die der Erde, sei ferner $\underline{r}$ der Vektor von der Sonne zur Erde, so ist die Kraft der Sonne auf die Erde nach dem Newtonschen Gesetz

$$(1) \qquad \underline{F} = -\frac{GMm}{r^2}\underline{n}, \quad \underline{n} = \underline{r}/r.$$

Formal handelt es sich um ein Fernwirkungsgesetz, um eine momentane Wirkung über beliebig große Abstände hinweg.

Die Fernwirkung ist von Huygens und anderen abgelehnt worden, die an der Fortentwicklung der kartesischen Ätherwirbeltheorie beteiligt gewesen sind. Leibniz hat in einem Brief an Huygens befürchtet, Newton kehre zu übersinnlichen Kräften zurück, obwohl es eine „mechanische“ Erklärung des Gravitationsfelds gebe[2], gemeint ist eine auf Stöße zurückführbare. Die Kartesianer der nächsten Generation haben dann unbefangen die Fernwirkung als axiomatische Prämisse hingenommen und auf diese Weise die analytische Mechanik entwickelt. Seit dieser Zeit hat man bis heute von Newtons Fernwirkungstheorie gesprochen.

Newton hat dem entgegengehalten[3], kein zu philosophischem Urteil Befugter könne an Fernwirkungen glauben. Man dürfe aber auch nicht Unbeobachtbares zur Erklärung heranziehen. Denn das nenne er Hypothese und sei unzulässig. Zwar wisse er nicht, was Gravitation sei. Doch genüge es, diese mit dem Gesetz so weit im

Griff zu haben, daß man damit die Planetenbahnen und die Meeresflut erfassen könne.

Nicht ein materielles Modell, sondern ein in der Erfahrung sich bewährendes mathematisches Gesetz wird als Garant dafür betrachtet, daß man Wirklichkeitsordnung im Griff hat. Wie Kepler denkt Newton platonisch und nicht materiell. Wir sollen aus den Erscheinungen (auf dem Bildschirm in der Höhle des Gleichnisses von Platon) auf die Ordnung schließen, welche zwar die Erscheinungen bestimmt, welche aber nicht mit diesen identisch ist. Die platonische Einfärbung der modernen Physik ist also eher eine Rückkehr zu Newtons Naturphilosophie als eine Wende. Man hat sich nur von der philosophisch reichlich unkritischen nachnewtonschen Zeit abgekehrt.

In Newtons vorsichtig abwägender Zurückhaltung steckt eine Vorahnung des Feldbegriffs. Spaltet man nämlich (1) gemäß

$$\underline{F} = m\underline{g}, \quad \underline{g} = -\frac{GM}{r^2}\underline{n}. \tag{2}$$

die Erdmasse ab, so ist $\underline{g}$ eine im ganzen Raum definierte Vektorfunktion, welche allein durch die Sonne bestimmt ist oder von ihr erzeugt wird, wie man auch sagen kann. Sie ist in Hinblick auf das Gravitationsgesetz mathematischer Ausdruck jener Realität, die wir heute Gravitationsfeld nennen. Das Feld ist hiernach Inbegriff möglicher Kraftwirkungen. Es ist überflüssig und überschreitet im Sinne von Newton die Grenzen des Erfahrbaren, von einem Äther und dgl. als Träger des Feldes zu reden.

Zwei zentrale Eigenschaften aller Felder sind schon hier erkennbar. Erstens gibt es Quellen des Feldes, die in der Materie verankert sind. Bei der Gravitation ist es die Masse, bei elektromagnetischen Feldern die Ladung. Zweitens erfahren die Quellen, wo immer die zugehörigen Felder vorhanden sind, zu deren Stärke proportionale Kräfte. Daran ändert sich bei aller Unvollkommenheit der Newtonschen Gravitationstheorie nichts mehr. Der Mangel dieser Theorie zeigt sich allein darin, daß das Newtonsche Gravitationsfeld im ganzen Raum der Bewegung der Körper augenblicklich folgt. Erst in der Elektrodynamik hat man gelernt, daß die Ausbreitung der Feldwirkungen Zeit braucht und mit Lichtgeschwindigkeit vorsichgeht.

Ursprünglich hat man die Gesetze für Felder aus spezifischen Erfahrungen abgeleitet. Wir werden darauf noch zurückkommen. Allein schon die oben erwähnte gemeinsame Struktur aller Feldtheorien läßt übergeordnete Prinzipien erwarten, welche von vorneherein die große Mannigfaltigkeit denkbarer Felder begrenzt. Nachdem man gelernt hatte, wie eng das Gravitationsfeld mit Eigenschaften der Geometrie verknüpft ist, hatte man vermutet, die Geometrisierung aller Physik müsse zu einer einheitlichen Feldtheorie führen. Doch ist das Warenhaus der denkbaren Geometrien nicht weniger gut assortiert als das der denkbaren Feldtheorien. Letztlich kann man jede Feldtheorie geometrisch formulieren, was in mannigfacher Hinsicht wichtig sein kann. Doch ergeben sich daraus keine Prinzipien zur Unterscheidung realistischer Felder von spekulativen und zur Bestimmung ihrer Gesetze. Tatsächlich hat man die allgemeine Relativitätstheorie nicht aus einem Geometrisierungsprogramm gewonnen. Am Anfang steht, wie wir noch sehen werden, der Erfahrungssatz der Äquivalenz von Trägheit und Schwere, aus dem sich ergeben hat, daß Gravitationsfelder zu einer Riemann-Minkowskischen Raum-Zeit führen.

Ein Feldtheorien fundierendes Prinzip ist aus der Eichidee von Weyl hervorgegangen. Er hat sich dabei von der allgemeinen Relativitätstheorie leiten lassen und zunächst kaum vom Geometrisierungsprogramm entfernt. Die Weyl-Geometrie[4] ist an die Stelle der Riemannschen getreten. Doch hat sein Versuch aus dem Jahre 1917 zu physikalisch unhaltbaren Ergebnissen geführt. Erst rund zehn Jahre später hat er sich vom Geometrisierungsprogramm gelöst und die Eichidee als Basisprinzip für Feldgesetze erkannt[5]. Nach einem Jahrzehnte langen Dornröschenschlaf ist man sich der fundamentalen Bedeutung des Eichprinzips erst vor wenigen Jahren allgemein bewußt geworden.

Man kann die Notwendigkeit des Eichkonzepts wie folgt verstehen: Die kanonischen Gleichungen für freie Materiepunkte sind Poincaréinvariant. Ein einzelner Materiepunkt sieht als abgeschlossenes System nur die hochsymmetrische Minkowskische Raum-Zeit und vielleicht noch andere globale Symmetrien. Sobald mindestens ein zweiter Materiepunkt ins Spiel kommt, ist die Umwelt jedes einzelnen nicht mehr hochsymmetrisch. Wechselwirkungen brechen die Symmetrie. Das zeigen schon einfachste Systeme. Für die Erde im Felde der Sonne gilt z. B.

$$H = \frac{1}{2m}\underline{p}^2 - \frac{GMm}{r}.$$

Z. B. ist die Translationsinvarianz verletzt und wird erst wieder hergestellt, wenn wir das Gesamtsystem Sonne-Erde betrachten mit der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2m}\underline{p}_1^2 + \frac{1}{2M}\underline{p}_2^2 - \frac{GMm}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}.$$

In Eichfeldtheorien hat man es zunächst nicht mit zwei Materiepunkten zu tun, sondern mit einem einzelnen Materiepunkt in einem vorgegebenen äußeren Feld. Dies wird im allgemeinen Symmetrien stören. Die negative Feststellung, eine Symmetrie sei gebrochen, öffnet zunächst der Willkür Tür und Tor.

Wenn man jedoch jede Symmetriegruppe einzeln betrachtet, wird die Willkür durch die Forderung begrenzt, daß die Symmetrie von Materiepunkt und Feld zusammen erhalten bleibt. Danach gehört zu jeder Symmetriegruppe der Gleichungen für freie Materiepunkte ein gerade zu ihr gehöriges Feld samt gewissen Feldgleichungen. Maximal gibt es nur so viele Felder wie verschiedene Symmetriegruppen. Das Prinzip liefert unmittelbar die von den Feldern herrührenden Kräfte, aber erst nach weiteren, ebenfalls universell geltenden Annahmen Quellengleichungen, welche die Felderzeugung beschreiben.

Weyl hat die Elektrodynamik aus einer in der Quantenmechanik wohlbekannten Symmetrie abgeleitet, nämlich aus der Phaseninvarianz von Schrödinger- oder Diracgleichung. Diese Symmetrie besteht auch in der klassischen Mechanik, ist aber in ihr wenig beachtet. In Rahmen der Physik gehen wir von dieser Symmetrie aus. Aus der Hamiltonfunktion

$$H = c\sqrt{\underline{P}^2 + m^2c^2}$$

folgt die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{(\mathrm{grad}\, S)^2 + m^2c^2} = 0,$$

die man gemäß

(3) $$\partial_\mu S\, \partial^\mu S + m^2c^2 = 0, \quad \partial_\mu = \partial/\partial x^\mu, \quad \partial_\mu = g_{\mu\nu}\partial^\nu$$

raum-zeitsymmetrisch schreiben kann. Sie ist offensichtlich gegen die Transformation

(4) $$S \rightarrow S' = S + \chi \, , \chi = \text{const},$$

invariant. Die Poincaré-Invarianz bleibt zunächst außer Betracht.

Da χ nach (4) in der ganzen Raum-Zeit den gleichen Wert hat, handelt es sich um eine globale Symmetrie. Ersetzt man die Konstante χ in (4) durch eine Funktion $\chi(x)$, so folgt aus der für S' geltenden Gleichung in (3)

$$(\partial_\mu S(x) + \partial_\mu \chi(x))(\partial^\mu S(x) + \partial^\mu \chi(x)) + m^2 c^2 = 0$$

als Gleichung für S. Klarerweise ist die Differentialgleichung dagegen nicht mehr invariant. Die S-Symmetrie ist gebrochen.

Doch kann man die Symmetrie durch Einführung der Eichpotentiale $A_\mu(x)$ retten. Die Gleichung

(5) $$(\partial_\mu S(x) - \lambda A_\mu(x))(\partial^\mu S(x) - \lambda A^\mu(x)) + m^2 c^2 = 0$$

ist wieder invariant, wenn sich $\partial_\mu S(x)$ und $\lambda A_\mu(x)$ gegenläufig transformieren, d.h. wenn $S(x)$ und $A_\mu(x)$ simultan der Eichtransformation

(6) $$\begin{aligned} S(x) &\rightarrow S'(x) = S(x) + \chi(x), \\ \lambda A_\mu(x) &\rightarrow \lambda A'_\mu(x) = \lambda A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x) \end{aligned}$$

unterworfen werden. Darin ist der Faktor λ ein zunächst willkürlich wählbarer konstanter Faktor. Er wird später die Anpassung an herkömmliche Dimensionen erleichtern.

Gl. (5) ist wiederum eine Hamilton-Jacobische Differentialgleichung. Ersetzt man dementsprechend $\partial_\mu S$ durch p_μ und führt man außerdem die Bezeichnungen

(7) $$A_0(x) = -\frac{1}{c}\Phi(\lambda), \quad (A_1(x), A_2(x), A_3(x)) = \underline{A}(x)$$

ein, so gelangt man mit $p_0 = -H$ zur Hamiltonfunktion

(8) $$H = \lambda \Phi(\underline{r}, t) + c\sqrt{(\underline{p} - \lambda \underline{A}(x))^2 + m^2 c^2}$$

und zu den kanonischen Gleichungen

(9) $$\begin{aligned} \underline{v} &= \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{c(\underline{p} - \lambda \underline{A})}{\sqrt{(\underline{p} - \lambda \underline{A})^2 + m^2 c^2}}, \\ \frac{d\underline{p}}{dt} &= -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{r}} + \lambda \operatorname{grad}(\underline{v} \cdot \underline{A}). \end{aligned}$$

Aus der ersten folgt

$$(10) \qquad \underline{p} - \lambda \underline{A} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = |\underline{v}/c|,$$

und durch Substitution in die zweite erhält man die Bewegungsgleichungen für Materiepunkte mit der Ladung λ im elektromagnetischen Feld

$$(11) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \lambda\,(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

mit

$$(12) \qquad \underline{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \dot{\underline{A}}, \quad \underline{B} = \operatorname{rot}\underline{A}.$$

Hieraus folgen für $\underline{E}$ und $\underline{B}$ die homogenen Maxwellschen Gleichungen

$$(13) \qquad \operatorname{rot}\underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0, \quad \operatorname{div}\underline{B} = 0.$$

Hierbei ist zu beachten, daß die Eichprozedur bei jeder einparametrigen Symmetriegruppe zu den nämlichen Gleichungen führt. Dem ist der Teilerfolg von Weyls erstem Vorstoß zu verdanken. Stets gelangt man zu den relativistischen Bewegungsgleichungen mit Lorentzkraft, zur elektrischen Feldstärke $\underline{E}$ und zur magnetischen Induktion $\underline{B}$, die beide nach (12) bei den Eichtransformationen in (6) invariant sind, wie es für Größen sein muß, die durch Messungen bestimmt sind. Dabei entpuppt sich der zunächst willkürlich abgespaltene Faktor λ als elektrische Ladung, welche man (z.B. elektrolytisch) unabhängig von Kräften messen kann. Der entscheidend neue und weiterführende Gedanke in Weyls zweiter Arbeit besteht darin, daß man nicht von neu eingeführten Symmetrien ausgehen darf. Man muß sich vielmehr auf Symmetrien stützen, die in den kräftefreien Gleichungen vorhanden sind. Erst hierdurch wird die Eichprozedur zu einem Prinzip, welches Felder und Kräfte abzuleiten gestattet.

Es fehlen noch die Quellengleichungen und die Prinzipien, welche zu solchen Gleichungen führen. Ehe wir darauf eingehen, betrachten wir die Lagrangefunktion. Aus der Hamiltonfunktion in (8) und den folgenden Gleichungen erhält man

$$(14) \qquad L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - \lambda\,(\Phi - \underline{v}\cdot\underline{A}).$$

Sie ist nicht eichinvariant. Der letzte Term erfährt bei Umeichungen die Transformation

$$\lambda\,(\Phi - \underline{v}\cdot\underline{A}) \rightarrow \lambda\,(\Phi - \underline{v}\cdot\underline{A}) - (\dot{\chi} + \underline{v}\cdot\nabla\chi)\,.$$

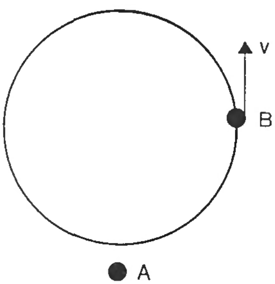
Das ist gerade diejenige Transformation, deren Einfluß auf die kanonische Eigenzeit am Ende von Teil I (l. c. l) betrachtet worden ist. Die kanonische Eigenzeit ist also nicht eichinvariant. Doch ist gezeigt, daß dies ohne Einfluß auf den Unterschied der Alterung von Reisenden zwischen zwei Wiederbegegnungen ist. Da man $\chi\,(x)$ stets so bestimmen kann, daß längs Raum-Zeitbahnen

$$\left(\frac{d\chi}{dt} - \lambda\,(\Phi - \underline{v}\cdot\underline{A})\right)_{Bahn} = 0$$

ist, kann man Alterungsunterschiede aus der durch

$$t_0 = \int\sqrt{1-\beta^2}\,dt$$

definierten Eigenzeit, also so berechnen, als wäre kein Feld vorhanden.



Das zeigt das bereits mehrfach erwähnte Genfer Müonenexperiment[6], das in nebenstehender Figur schematisch dargestellt ist. Müonen sind Elementarteilchen mit einer mittleren Lebensdauer von etwa $\tau_0 = 2{,}2\cdot 10^{-6}\,s$. Das ist zugleich die Lebensdauer eines im Laboratorium ruhenden Müons *A*. Das in *B* befindliche Müon habe die Geschwindigkeit *v* und wird durch ein Magnetfeld auf einer Kreisbahn geführt. Im konkret durchgeführten Versuch ist $1/\sqrt{1-\beta^2} = 13{,}5$, und Messungen haben im Einklang damit eine 13,5mal größere Lebensdauer ergeben. Das bestätigt erstens mit beträchtlicher Genauigkeit, die verschiedene Alterung des ruhenden und des bewegten Teilchens und zweitens die Unabhängigkeit vom Magnetfeld. Damit ist erwiesen, daß die Eigenzeit auch in der Elektrodynamik mit der kanonischen übereinstimmt. Erinnern wir uns, daß die kanonische Eigenzeit gleich der in Wellenphasen gemessenen Zeit ist, so braucht uns das Ergebnis nicht zu wundern. Doch ist es neu, daß man Eigenzeit-differenzen und damit Phasendifferenzen durch den Gang ungestörter Uhren bestimmen kann.

Wir kehren zur Frage nach den Quellengleichungen zurück. Ihre Formulierung erfordert Erfahrungen, welche über das eigentliche Eichprinzip hinausgehen, die aber in allen bisher bekannten Eichfeldtheorien von gleicher Art sind. Das Eichprinzip hat zur Lorentzkraft geführt. Man weiß also, wie elektromagnetische Felder auf elektrische Ladungen wirken. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz bestimmen die Massen nicht nur die Größe der Kräfte. Sie sind zugleich die Quellen des Feldes. Gilt das auch für die Elektrodynamik, so müssen die elektrischen Ladungen zugleich die Quellen elektromagnetischer Felder sein. Die Identität der Quellen von Feldern mit den Empfängern von Kräften ist das zweite Prinzip der Eichfeldtheorien.

Wegen der Ladungserhaltung gilt für Ladungsdichten $\varrho(\underline{r}, t)$ und Stromdichten $\underline{j}(\underline{r}, t)$ die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\varrho}(\underline{r}, t) + \operatorname{div} \underline{j}(\underline{r}, t) = 0.$$

Sie läßt sich auch auf Punktladungen anwenden, für die

$$\varrho(\underline{r}, t) = \lambda\,\delta(\underline{r} - \underline{r}_0(t)), \quad \underline{j}(\underline{r}, t) = \lambda\,\dot{\underline{r}}_0(t)\,\delta(\underline{r} - \underline{r}_0(t)),$$
$$\underline{r}_0(t) = Bahn,$$

ist. Mit $J^0 = c\varrho$, $\underline{J} = (J^1, J^2, J^3) = \underline{j}$ erhält man die raum-zeitsymmetrisch geschriebene Kontinuitätsgleichung

(15) $$\partial_\mu J^\mu(x) = 0.$$

Beliebige Integrale dieser Differentialgleichung lassen sich in der Form

(16) $$J^\mu(x) = \partial_\nu H^{\mu\nu}(x), \quad H^{\mu\nu}(x) = -H^{\nu\mu}(x)$$

darstellen, und beliebige Schieftensoren $H^{\mu\nu}(x)$ liefern nach (16) Integrale. Darin sind $H^{\mu\nu}$ Ladungs-Strompotentiale. Mit

$$(H_{10}, H_{20}, H_{30}; H_{23}, H_{31}, H_{12}) = (c\,\underline{D}\,; \underline{H})$$

erhält man daraus formal die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen

(17) $$\operatorname{div} \underline{D} = P, \operatorname{rot} \underline{H} - \dot{\underline{D}} = \underline{j}.$$

Sie sind aber inhaltlich noch von diesen verschieden, weil die Potentiale $H^{\mu\nu}$ durch die Viererstromdichte J^{μ} noch nicht eindeutig bestimmt sind. Denn

$$H^{\mu\nu} \to H'^{\mu\nu} = H^{\mu\nu} + \partial_{\lambda} F^{\mu\nu\lambda}, \quad F^{\mu\nu\lambda} = -F^{\mu\lambda\nu}$$

liefern bei beliebigen Tensoren $F^{\mu\nu\lambda}$ obiger Symmetrie dieselbe Viererstromdichte.

Wir haben noch nicht berücksichtigt, daß die Viererstromdichte J^{μ} Quelle des elektromagnetischen Feldes

(18) $$B_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

mit

$$(A_0; A_1, A_2, A_3) = \left(-\frac{1}{c}\Phi ; \underline{A}\right),$$

$$(B_{10}, B_{20}, B_{30}; B_{23}, B_{31}, B_{12}) = \left(\frac{1}{c}\underline{E} ; \underline{B}\right)$$

sein soll. Die Gleichungen in (18) liefern (12) in raum-zeit-symmetrischer Darstellung, nämlich

(19) $$\partial_{\lambda} B_{\mu\nu} + \partial_{\mu} B_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} B_{\lambda\mu} = 0.$$

Aus der Quelleneigenschaft folgt, daß $B_{\mu\nu}$ durch J^{μ} bestimmt und somit ein Funktional von J^{μ} sein muß. Nach (16) ist dann $B_{\mu\nu}$ auch ein Funktional von $H_{\mu\nu}$. Selbst in der allgemeinen Relativitätstheorie, in der sich am Ende nichtlineare Gleichungen ergeben, wird das entsprechende Funktional linear sein. Außerdem ist der Zusammenhang lokal, d.h. $B_{\mu\nu}(x)$ hängt nur von $H_{\mu\nu}(x)$ im gleichen Raum-Zeitpunkt ab. Wäre es anders, gäbe es sozusagen eine Fernwirkung, so müßten wir auf die Existenz intermediärer Felder schließen, wozu kein konkreter Anlaß besteht. Nach ihrer Definition sind $B^{\mu\nu}$ und $H^{\mu\nu}$ kontravariante Schieftensoren in der Minkowskischen Raum-Zeit. Die Symmetrie des Gesamt-Systems soll durch das Eichkonzept nicht gestört werden. Man könnte Gleichungen von der Form

$$B^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu}_{\varrho\sigma}(x)\, H^{\varrho\sigma}$$

erwarten. Beispielsweise hat man in der geometrischen Optik inhomogener und anisotroper Systeme mit ähnlichen Gleichungen zu tun. Doch sind Inhomogenität und Anisotropie durch das Medium bestimmt. Das Vakuum ist kein solches Medium. Darum folgt schließlich

$$B_{\mu\nu} = \mu_0 H_{\mu\nu} \text{ bzw. } \underline{B} = \mu_0 \underline{H},$$

(20)

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}, \quad \mu_0 = \text{const}, \quad \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1.$$

Superponierbarkeit, Lokalität und Kovarianz bestimmen also die letzte Gleichung, durch die (17) nicht nur formal, sondern inhaltlich mit den inhomogenen Maxwellschen Gleichungen übereinstimmt.

Zu demselben Ergebnis wie die Eichprozedur führt der Erfahrungssatz, daß elektromagnetische Kräfte unabhängig von der Beschleunigung sind. Denn daraus folgt unmittelbar die Lagrangefunktion in (14), und die weiteren Betrachtungen bleiben unverändert. Ein beinahe unscheinbarer Erfahrungssatz, einer über die Ladungserhaltung und eine die Symmetrie nicht störende Verknüpfung von Feld- und Ladungsgrößen bilden eine Grundlage der Elektrodynamik, der gegenüber die Eichprozedur als reichlich formalistisch erscheinen könnte. Man wird nicht auf die Einsichten verzichten wollen, die solche Erfahrungssätze vermitteln.

Aber die Feststellung von der wir ausgegangen sind, ist keineswegs formalistisch. Ein in seine Umwelt eingebetteter Materiepunkt sieht nichts von der Symmetrie, die die Gleichungen für freie Teilchen bestimmt. Allenfalls kann man beim Gesamtsystem hoffen, – z. B. beim obigen Materiepunkt in einem gegebenen äußeren Feld, – daß die volle Symmetrie wieder in Erscheinung tritt. Auf ihrer Allgemeingültigkeit beruht die Bedeutung der Weylschen Idee. Sie macht die Berufung auf spezielle Erfahrungen entbehrlich, welche von Fall zu Fall wechseln, und welche innerhalb der Eichfeldtheorien als Folgesätze erscheinen. Darüber hinaus ist es ein anders kaum erreichbarer Gewinn, daß das Eichkonzept Auskunft darüber gibt, welche Felder möglich sind. Sollte es mehr Felder geben, als man hiernach erwarten kann, so weiß man ferner, daß die Gleichungen für freie Materiepunkte zu modifizieren sind.

Von dem System, das aus einem Teilchen und einem äußeren Feld besteht, gelangt man fast ohne besondere Annahmen zu Gleichungen für Mehrteilchensysteme. Seien $\underline{r}_i(t), i \in (1, 2 \ldots n)$, die Bahnkurven von n Punktladungen mit den Ladungen λ_i, so lauten Ladungs- und Stromdichte

$$\begin{aligned} \varrho(\underline{r}, t) &= \sum_i \lambda_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t)), \\ \underline{j}(\underline{r}, t) &= \sum_i \lambda_i \dot{\underline{r}}_i(t)\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t)). \end{aligned} \tag{21}$$

Die Quellengleichungen liefern in Verbindung mit den homogenen Maxwellgleichungen (13) und den Verknüpfungsgleichungen (20) die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$, sowie die Potentiale Φ und $\underline{A}$, durch die Lagrangefunktion des Mehrteilchensystems

$$L = -\sum_i m_i c^2 \sqrt{1 - \dot{\underline{r}}_i^2/c^2} - \sum_i \lambda_i (\Phi(\underline{r}_i, t) - \dot{\underline{r}}_i(t)\, \underline{A}(\underline{r}_i(t), t) \tag{22}$$

bestimmt ist.

Solche Gleichungen schließen Selbstwechselwirkungen ein. Denkt man dabei an ausgedehnte Teilchen, so ist die Selbstwechselwirkung nichts anderes als die Wechselwirkung von Teilen des Teilchens. Das paßt aber nicht zu der Voraussetzung, daß Hamiltonsche Gleichungen in Strenge nur für Materiepunkte gelten. Hiernach liegt es nahe anzunehmen, daß Materiepunkte nur unter dem Einfluß der von ihrer Umwelt erzeugten Felder stehen. Jedes Teilchen lebt sozusagen im Feld der anderen. F. Rohrlich[7] hat gezeigt, daß diese Annahme innerhalb der klassisch physikalischen Elektrodynamik möglich ist. Die von der Selbstwechselwirkung punktförmiger Teilchen herrührende Singularitäten sollen also Scheinprobleme sein. Vielleicht ist über Rohrlichs Prinzip der Ausschließung von Selbstwechselwirkungen das letzte Wort noch nicht gesprochen. Doch bringt die Idee, Felder seien allein durch die Umwelt bestimmt, das klassisch physikalische Konzept zu einem möglichen und durchaus harmonischen Abschluß.

Bezüglich der Konsequenzen sei wiederum auf Lehrbücher verwiesen, insbesondere auch auf Rohrlichs Buch. Nur eine Bemerkung gehört noch hier her. Vor einem beschleunigt bewegten Ladungspunkt gehen elektromagnetische Wellen aus. Darum verliert der Ladungspunkt Energie. Es gibt also eine Strahlungsdämpfung. Sie beruht auf einer Selbstwechselwirkung, allerdings auf einer, die selbst bei punktförmigen Teilchen endlich und darum ganz unproblematisch ist. Hierdurch wird das Prinzip von Rohrlich eingeschränkt. Vielleicht ist das ein Hinweis darauf, daß man das Selbstwechselwirkungsproblem nur quantenphysikalisch behandeln kann.

Literaturhinweise und Anmerkungen

[1] F. Bopp: Sitz.ber. d. Bay. Akad. d. Wiss., Mathematisch-naturw. Kl., 1983, I xxx, II xxx.

[2] E. J. Diksterhuis: Die Mechanisierung des Weltbilds, Springer-Verlag, Berlin etc. 1956; hier S. 538.

[3] l. c. 2, Newtons Brief an Bentley, S. 545; Zitat aus Newtons scholium generale, S. 537 unten. Die Bemerkungen des Verfassers in Ziff. 315, S. 538, machen deutlich, wie schwer es sein kann, und wie nötig es zum Verständnis von Newton ist, sich von dem sogenannten mechanistischen Weltbild der nachnewtonschen Zeit zu lösen und zu verstehen, daß das bewährte mathematische Gesetz selbst Ausdruck von Wirklichkeitsordnung ist, sowie einzusehen, daß man gar nichts anderes kann, als Wirklichkeitsordnung anzuerkennen, nämlich jenes Licht Platons, welches die Welt der Erscheinungen verständlich macht.

[4] H. Weyl: Raum-Zeit-Materie, 5. Aufl., Springer-Verlag, Berlin 1923, hier § 40.

[5] H. Weyl: Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel-Verlag, Leipzig 1928; hier § 19, insbesondere S. 88 oben. – F. London, Z. f. Phys. **42**, 375 (1927).

[6] A Primakoff: Müonen-Lebensdauer im Speicherring, CERN-Berichte 1971.

[7] F. Rohrlich: Classical charged particles, foundations of their theory; Addison-Wesley Publ. Cy. 1963.

Teil IV

Die Gravitation als Eichfeld

Die Eichidee von H. Weyl[1] ist aus der allgemeinen Relativitätstheorie hervorgegangen. Diese macht deutlich, daß Symmetrien nur lokal definiert sind, und daß durch sie definierte Orientierungen nicht ohne weiteres über endliche Distanzen vergleichbar sind. Es gibt also keine globalen Symmetrien. Darum ist zu erwarten, daß sich umgekehrt die allgemeine Relativitätstheorie dem Eichkonzept unterordnet.

Um das zu sehen, ist es bequem, vom Hamiltonschen Prinzip für freie Materiepunkte

$$(1) \qquad \delta S = 0, \quad S = -mc^2 \int ds = -mc \int \sqrt{-g^M_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}\, d\tau$$

auszugehen. Darin ist $g^M_{\mu\nu}$ der Minkowskitensor, und τ ist wegen der Parameterinvarianz des Integrals ein willkürlicher Parameter, der von der Variation unberührt bleiben soll. Es empfiehlt sich, $d\tau$ erst nach der Variation mit dem Linienelement ds zu identifizieren, weil die Variation von ds zu überflüssigen Komplikationen führt.

Mit der allgemeinen Relativitätstheorie hat es noch nichts zu tun, wenn wir das Wirkungsintegral in (1) durch beliebige Koordinaten darstellen, obwohl sich dabei Ausdrücke ergeben, die dem Physiker erst durch die allgemeine Relativitätstheorie vertraut geworden sind. Durch die Transformation

$$(2) \qquad x^\mu \to x'^\mu = f^\mu(x), \quad dx'^\mu = f^\mu_\nu(x)\, dx^\nu, \quad f^\mu_\nu(x) = \partial_\nu f^\mu(x)$$

geht die metrische Fundamentalform ds^2 aus (1) wieder mit x^μ statt mit x'^μ in

$$(3) \qquad ds^2 = -g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu, \quad g_{\mu\nu}(x) = g^M_{\varrho\sigma} f^\varrho_\mu(x) f^\sigma_\nu(x),$$

über und liefert die Lagrangefunktion

$$(4) \qquad L = -mc\sqrt{-g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu}, \quad x'^\mu = dx^\mu / d\tau .$$

Danach lauten die Lagrangeschen Gleichungen

$$mc \frac{d}{d\tau}\left(\frac{g_{\mu\nu} x'^\nu}{\sqrt{-g_{\varrho\sigma} x'^\varrho x'^\sigma}}\right) = \frac{1}{2} mc \frac{x'^\varkappa x'^\lambda \partial_\mu g_{\varkappa\lambda}}{\sqrt{-g_{\varrho\sigma} x'^\varrho x'^\sigma}}$$

oder nach dem Übergang von $d\tau$ zu ds

$$\frac{d}{ds}(g_{\mu\nu}u^{\nu}) = \frac{1}{2}u^{\varrho}u^{\sigma}\partial_{\mu}g_{\varrho\sigma}, \quad u^{\varrho} = dx^{\varrho}/ds,$$

mit u^{μ} als Vierergeschwindigkeit, für die

(5) $$g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} \equiv u^{\mu}u_{\mu} = -1$$

ist. Zieht man $g_{\mu\nu}$ aus der Ableitung heraus, so folgt

(6) $$\frac{du^{\mu}}{ds} + \Gamma^{\mu}_{\varrho\sigma}u^{\varrho}u^{\sigma} = 0$$

mit

(7) $$\Gamma^{\mu}_{\varrho\sigma} = g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\varrho\sigma}, \quad \Gamma_{\lambda\varrho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_{\varrho}g_{\sigma\lambda} + \partial_{\sigma}g_{\varrho\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\varrho\sigma}).$$

Der Ausdruck

$$F^{\mu}_{t} = -mc\,\Gamma^{\mu}_{\varrho\sigma}u^{\varrho}u^{\sigma}$$

ist die Trägheitskraft in beliebig bewegten, krummlinigen Koordinatensystemen.

Auch bei weiteren Koordinatentransformationen erfahren die infinitesimalen Verrückungen dx^{μ} wie in (2) lokal lineare Transformationen, die sich im allgemeinen von Punkt zu Punkt ändern. Die Verrückungen spannen daher wenigstens lokal lineare Vektorräume auf[2]. Es handelt sich um kontravariante Vektoren im Sinne der linearen Algebra. Alle Größen a^{μ}, die sich lokal wie dx^{μ} transformieren (in Zeichen: $a^{\mu} \sim dx^{\mu}$), heißen kontravariante Vektoren.

Ist $\varphi(x)$ eine skalare Funktion, also eine, die unabhängig vom Koordinatensystem in jedem Punkt stets den gleichen Wert hat, so ist auch

$$d\varphi(x) = dx^{\mu}\partial_{\mu}\varphi(x)$$

skalar, so daß sich $\partial_{\mu}\varphi(x)$ gegenläufig zu dx^{μ} transformiert. Alle Größen a_{μ}, die sich lokal wie $\partial_{\mu}\varphi(x)$ transformieren (in Zeichen: $a_{\mu} \sim \partial_{\mu}$), heißen kovariante Vektoren. Die Transformationsgesetze lauten explizit

(8) $$a'^{\mu} = f^{\mu}_{\nu}a^{\nu}, \quad b'_{\mu} = \check{f}^{\nu}_{\mu}b_{\nu}, \quad \check{f}^{\mu}_{\varrho}f^{\sigma}_{\mu} = \delta^{\sigma}_{\varrho}.$$

Entsprechend sind Tensoren durch ihr Transformationsgesetz definiert, z.B. heißt $c^{\nu}_{\mu} \sim a_{\mu}b^{\nu}$ explizit

$$c'^{\nu}_{\mu} = \check{f}^{\varrho}_{\mu} f^{\nu}_{\sigma} c^{\sigma}_{\varrho} .$$

Alle diese Begriffe sind zunächst nur lokal definiert. Eine Fernvergleichung von Vektoren ist nicht unmittelbar möglich. Zwar ist in unserem speziellen Fall eine Fernvergleichung durch Rückkehr zum Minkowskitensor definiert. Doch wird das im weiteren gewöhnlich nicht möglich sein. Wir werden später sehen, daß die Fernvergleichung nur längs Wegen definiert ist, und daß man auf verschiedenen Wegen zwischen zwei Punkten im allgemeinen zu verschiedenen Vektoren gelangt.

Um dem Begriff infinitesimal zu entgehen, pflegt man die lokalen Vektoren in Tangentialräumen darzustellen. Doch genügt es zu wissen, wie man den Schwierigkeiten des Infinitesimalen entgehen kann. Darum braucht man auf dessen Anschaulichkeit nicht zu verzichten. Sommerfeld hat einmal gesagt, man habe die Epsilontik nicht gelernt, um ständig mit Bleigewichten an den Füßen herumzulaufen, sondern um sich mit größerer Freiheit bewegen zu können[3]. Dazu kommt, daß neuere Entwicklungen der Analysis dem Infinitesimalen wieder Lebensrecht verschafft haben.

Bisher haben wir nur kräftefreie Bewegungen betrachtet. Symmetriebrechung im Sinne der Eichidee besteht darin, daß auch metrische Tensoren $g_{\mu\nu}(x)$ zugelassen werden, die nicht mehr durch eine globale Transformation aus dem Minkowskitensor hervorgehen. Es ist nur noch zu fordern, daß man lokal zu $\overset{M}{g}_{\mu\nu}$ zurückkehren kann. Die Transformation $\overset{M}{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(x)$ in (3) muß nach wie vor gelten. Doch brauchen die von Ort zu Ort variierenden Transformation $f^{\mu}_{\nu}(x)$ nicht mehr integrabel zu sein. Es brauchen keine globalen Transformationen $x^{\mu} \rightarrow f^{\mu}(x)$ zu existieren, so daß im allgemeinen

$$\partial_{\mu} f^{\varrho}_{\nu}(x) \neq \partial_{\nu} f^{\varrho}_{\mu}(x) \tag{9}$$

ist. Das ist fast uneingeschränkt möglich. Denn durch die lineare Transformation kann man zur Normalform übergehen

$$g_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu} \delta_{\mu\nu}, \quad \varepsilon_{\mu} \in (+1, -1, 0) . \tag{10}$$

Die Raum-Zeit ist wie gefordert lokal Minkowskisch, wenn die Signatur gleich $(-+++)$ oder wenn

$$g = -\det(g_{\mu\nu}) > 0, \quad g_{\infty} < 0 \tag{11}$$

ist. Da sich bei dieser Verallgemeinerung des Tensors $g_{\mu\nu}(x)$ die Form der Lagrangefunktion nicht ändert, bleiben die Bewegungsgleichungen in (6) samt den Definitionsgleichungen für $\Gamma^{\mu}_{\varrho\sigma}$ in (7) unverändert. An die Stelle der Trägheitskraft tritt der formal ebenfalls unveränderte Ausdruck

(12) $$F^{\mu} = -mc\Gamma^{\mu}_{\varrho\sigma}u^{\varrho}u^{\sigma}.$$

Er enthält aber neben dem Beitrag der Trägheit noch einen weiteren, nämlich, wie wir noch sehen werden, den der Gravitation.

Doch sind wir mit dieser Verallgemeinerung über das vom Eichkonzept vorgezeichnete Ziel hinausgegangen. Bei globalen Lorentztransformationen bleibt der Tensor $g^{M}_{\mu\nu}$ invariant. Dem Eichkonzept würde entsprechen, daß wir die globalen Lorentztransformationen durch ebensolche ersetzen, die von Punkt zu Punkt variieren. Tatsächlich gibt es keinen Zweifel, daß wir beliebige lineare Transformationen zulassen müssen, weil es allein um Trägheitsbewegungen und nicht um das Koordinatensystem geht.

Das führt zu einer Erweiterung des Eichkonzepts. Eichfelder, die aus linearen Transformationen hervorgehen, implizieren eine Symmetrie bei global linearen Transformationen. Doch sind die Bewegungsgleichungen außer bei Translationen nur bei Lorentztransformationen invariant. Allerdings gilt der Trägheitssatz auch nach beliebigen linearen Transformationen. Darum führen globale lineare Transformationen zwar zu anderen, aber zu physikalisch äquivalenten Bewegungsgleichungen. Danach ist die Klasse äquivalenter Bewegungsgleichungen nicht nur Lorentzinvariant, sondern linear invariant, so daß die allgemeine Relativitätstheorie das auf die Symmetrie der Klasse bezogene Eichfeld liefert.

Das könnte eine Erweiterung des Eichkonzepts sein, welche von weitreichenden Folgen ist. Darum sei eine Abschweifung gestattet. Die Klasse äquivalenter Diracgleichungen ist unitär invariant, weil die Diracmatrizen nur durch ihre Vertauschungsrelationen definiert sind. Spaltet man die zur Elektrodynamik führenden Phasentransformationen ab, so bleibt die 15parametrige Gruppe SU4 als Basissymmetrie für neue Eichfelder übrig. Da für Elementarteilchen eine Symmetriegruppe gleicher Parameterzahl erwartet wird[4], und da die sechs Untergruppen SU2 der SU4 einigermaßen zu den zweimal drei Paaren von Quarks und Leptonen passen, könnten die Gluonenfelder Eichfelder zu obiger Klassensymmetrie sein. Das zu untersuchen, ist Sache der Quantenphysik. Hier genüge der Hinweis, daß die heutige Teilcheninflation durch die Einbeziehung der Klassensymmetrie beendet werden könnte[5].

Wir kehren zu den Gleichungen in (6/7) zurück, in denen wir mit Rücksicht auf die Klassensymmetrie beliebige Tensoren $g_{\mu\nu}(x)$ vom Typus (9) zulassen. Kann man global zur Minkowskimetrik zurückkehren, so ist die Viererkraft in (12) gleich 0. Trägheitskräfte lassen sich global wegtransformieren. Wenn Ungleichung (9) gilt, existiert eine solche Transformation nicht. In jedem Koordinatensystem bleibt eine von 0 verschiedene Kraft übrig. Die Eichprozedur führt erwartungsgemäß zu einem neuen Typ von Kräften. Dieser ist auch von der Lorentzkraft verschieden, weil F^{μ} nicht mehr linear, sondern quadratisch in u^{μ} ist.

Doch ändern sich die $\Gamma^{\mu}_{\varrho\sigma}$ und damit auch die Kräfte bei Koordinatentransformation. In allen Lehrbüchern[6] wird gezeigt, daß man stets Koordinatensysteme finden kann, in denen F^{μ} an einer beliebig vorgegebenen Stelle gleich 0 ist. Kann man auch die neuen Kräfte nicht mehr lokal wegtransformieren, so ist das immer noch in einem beliebig vorgebbaren Raum-Zeitpunkt möglich. Die neuen Kräfte sind also lokal mit den Trägheitskräften äquivalent. Einstein hat als Erster bemerkt, daß dies wegen der Gleichheit von träger und schwerer Masse für die Gravitation gilt. Davon ausgehend hat er die Gleichungen in (6/7) abgeleitet. Hier müssen wir umgekehrt schließen: Wegen der aus der Eichprozedur folgenden lokalen Äquivalenz mit der Trägheit dürfen wir die neuen Kräfte mit der Gravitation identifizieren.

Einsteins Weg, die Gleichungen (6/7) aus der empirisch gesicherten Äquivalenz von Trägheit und Schwere abzuleiten, entspricht, die Lorentzkraft aus ihrer Beschleunigungsunabhängigkeit zu gewinnen. In Hinblick auf unser Thema, Einheit der klassischen Physik, ist zu beachten, daß beide Voraussetzungen einerseits eine Lücke schließen und andererseits mit Newtons Programm im Einklang sind, von einem empirisch gesicherten mathematischen Gesetz ausgehend in vorher unbeackertes Land vorzustoßen. Beide Theorien liegen also auf dem Wege zur Vollendung der klassischen Physik. Durch Weyls Eichpostulat[7] ist diese Entwicklung zum

Abschluß gelangt. Sie erlaubt es, alle möglichen Feldtheorien aus einem einheitlichen Prinzip abzuleiten.

Es fehlen noch die Quellengleichungen. Wir wissen seit Newton, daß Massen Gravitationsfelder erzeugen. Aus der speziellen Relativitätstheorie und auch aus Erfahrungen der Elementarteilchenphysik folgt, daß Massen untrennbare Bestandteile der Energie sind. Alle Energiebeiträge wirken darum gravitierend. Durch Lorentztransformationen werden Energie und Impuls vermischt. Somit gehört auch der Impuls zu den Quellen des Gravitationsfelds.

Für Energie und Impuls gelten Erhaltungssätze. In der speziellen Relativitätstheorie werden sie bei Minkowskikoordinaten durch vier Kontinuitätsgleichungen

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

beschrieben. Darin ist $T^{\mu\nu}$ der Energie-Impulstensor. Wie insbesondere aus den Dimensionen hervorgeht, sind die

		-dichte	-stromdichte
(14)	Energie-	$T^{oo}[kg\,m^{-1}s^{-2}]$	$cT^{ok}[kg\,s^{-3}]$
	Impuls-	$\frac{1}{c}T^{io}[kg\,m^{-2}s^{-1}]$	$T^{ik}[kg\,m^{-1}s^{-2}]$

In der Tat sind die Dimensionen von T^{oo} und T^{ik} gleich Energie/m^3 bzw. Kraft/m^2. Die negativen Komponenten T^{ik} liefern den Spannungstensor.

Schon bei beliebigen Koordinaten in der Minkowskischen Raum-Zeit und erst recht in der Riemann-Minkowskischen[8] muß man die Ableitungen ∂_ν durch die kovarianten Ableitungen ∇_ν ersetzen, mit denen man bei Produktdifferentiationen wie mit der differentiellen rechnen kann. Danach lautet der Energie-Impulssatz in der speziellen Relativitätstheorie bei beliebigen Koordinaten und auch in der allgemeinen Relativitätstheorie

(15) $$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0.$$

Insbesondere bei zweifach kontravarianten Tensoren lauten die kovarianten Ableitungen, wie wir noch zeigen werden,

(16) $$\nabla_\lambda T^{\mu\nu} = \partial_\lambda T^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\varrho} T^{\varrho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\varrho} T^{\mu\varrho},$$

so daß die Energie-Impulsgleichungen

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma^{\,\mu}_{\nu\varrho} T^{\varrho\nu} + \Gamma^{\,\nu}_{\nu\varrho} T^{\mu\varrho} = 0$$

wegen der nichtdifferentiellen Glieder nicht mehr unmittelbar Erhaltungssätze liefern. Was das bedeutet, werden wir am Ende sehen.

Die Zusatzterme rühren daher, daß sich beim Übergang $x^\mu \to x^\mu + dx^\mu$ zu Nachbarpunkten die Orientierung der lokalen Koordinatensysteme ändert. Sei beispielsweise $\xi^\mu(x)$ in jedem Punkt x ein lokaler kontravarianter Vektor, und sei a^μ eine infinitesimale Verrückung, so liefert

$$\xi^\mu(x) \to \xi^\mu(x) + a^\nu \nabla_\nu \xi^\nu(x)$$

denjenigen Vektor in $x^\mu + a^\mu$, den man mit den lokalen Vektoren in $x^\mu + a^\mu$ vergleichen kann. Man sagt deshalb, der transformierte Vektor gehe durch Parallelverschiebung in Richtung a^μ aus $\xi^\mu(x)$ hervor. Entsprechende Gleichungen gelten für Skalare, kovariante Vektoren, Tensoren usw.

Damit gelangt man zu derjenigen Größe, die die Krümmung der Raum-Zeit beschreibt, zum Krümmungstensor. Seien a^μ und b^μ zwei infinitesimale Verrückungen und verschieben wir den Vektor $\xi^\mu(x)$ von A nach B zuerst über C mit $AC = a^\mu$ und $CB = b^\mu$ und dann über D mit $AD = b^\mu$ und $DB = a^\mu$, so erhält man auf dem ersten Weg

$$(1 + b^\varrho \nabla_\varrho)(1 + a^\sigma \nabla_\sigma)\,\xi^\mu = (1 + b^\varrho \nabla_\varrho + a^\sigma \nabla_\varrho + b^\varrho a^\sigma \nabla_\varrho \nabla_\sigma)\,\xi^\mu$$

und auf dem zweiten

$$(1 + a^\sigma \nabla_\sigma)(1 + b^\varrho \nabla_\varrho)\,\xi^\mu = (1 + a^\sigma \nabla_\sigma + b^\varrho \nabla_\sigma + a^\sigma b^\varrho \nabla_\sigma \nabla_\varrho)\,\xi^\mu.$$

Die Differenz ist im allgemeinen, nämlich bei Krümmung, von 0 verschieden. Es ergibt sich

(17) $$d\xi^\mu = (\nabla_\varrho \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\varrho)\,\xi^\mu \cdot \frac{1}{2}(a^\sigma b^\varrho - a^\varrho b^\sigma).$$

Darin ist der letzte Faktor die Komponente $d\sigma^{\varrho\sigma}$ des von a^ϱ *und* b^τ aufgespannten Flächenelementes, und der erste ist ein linearer Ausdruck in ξ^μ, so daß wir für (17) auch

(18) $$d\xi^\mu = R^{\,\mu}_{\nu\varrho\tau}\,\xi^\nu d\sigma^{\varrho\sigma}$$

schreiben können. Wegen der Kovarianz der Ableitungen ist $R^{\mu}_{\nu\varrho\sigma}$ ein Tensor vierter Stufe. Er heißt Riemannscher Krümmungstensor.

In der Minkowskischen Raum-Zeit und bei Minkowskischen Koordinaten folgt aus (17/18) wegen $\nabla_\varrho = \partial_\varrho$

(19) $$R^{\mu}_{\nu\varrho\sigma} = 0.$$

Da ein Tensor in allen Koordinatensystemen gleich 0 ist, wenn er in einem verschwindet, gilt (19) in der Minkowskischen Raum-Zeit bei beliebigen Koordinaten. Wenn (19) gilt, kann man durch Koordinatentransformation zum Minkowskitensor zurückkehren. Wenn dagegen

(20) $$R^{\mu}_{\nu\varrho\sigma} \neq 0$$

ist, ist das ebensowenig möglich wie beim Linienelement dl auf einer Kugelfläche, das durch

$$dl^2 = R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)$$

definiert ist, und das nicht in das Euklidsche $dl^2 = dx^2 + dy^2$ übergeführt werden kann. Das rechtfertigt, von Krümmung zu sprechen, sobald die Ungleichung in (20) gilt.

Bezüglich der Definition von kovarianten Ableitungen sei auf die Lehrbücher verwiesen[9]. Es sei nur an den Weg erinnert, wie man dazu gelangt. Eine skalare Funktion $\varphi(x)$ verhält sich in jedem lokalen Vektorraum wie ein Skalar. Darum ist auch längs Bahnkurven

$$\frac{d\varphi(x)}{ds} = u^\mu \partial_\mu \varphi(x)$$

ein Skalar. Da u^μ lokal ein kontravarianter Vektor ist, muß $\partial_\mu \varphi(x)$ ein kovarianter Vektor sein. Gemäß

(21) $$\nabla_\mu \varphi(x) \equiv \partial_\mu \varphi(x)$$

ist also die kovariante Ableitung einer skalaren Funktion gleich der differentiellen. Es gibt keinen Unterschied zwischen beiden Typen.

Ist $\varphi_\mu(x)$ ein kovarianter Vektor, so sind $u^\mu \varphi_\mu(x)$ und die Ableitungen längs Bahnkurven

$$\frac{d}{ds}(u^\mu \varphi_\mu) = u^\mu u^\nu \partial_\mu \varphi_\nu - \Gamma^{\nu}_{\mu\varrho} \varphi_\nu u^\mu u^\varrho$$

skalar. Der letzte Ausdruck ist gleich

$$u^\mu u^\nu (\partial_\mu \varphi_\nu - \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} \varphi_\varrho).$$

Folglich ist

(22) $$\nabla_\mu \varphi_\nu \equiv \partial_\mu \varphi_\nu - \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} \varphi_\varrho$$

ein Tensor zweiter Stufe, und $\nabla_\mu \varphi_\nu$ sind die kovarianten Ableitungen von φ_ν. Daraus folgt übrigens

(23) $$B_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,.$$

Die Γ-Glieder heben sich wegen $\Gamma^{\mu}_{\varrho\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\sigma\varrho}$ heraus. Die kovariante raum-zeitliche Rotation ist gleich der differentiellen. Die Berechnung des elektromagnetischen Feldes aus den Potentialen ist also auch allgemein relativistisch korrekt. Ebenso sind es die homogenen Maxwellschen Gleichungen

(24) $$\partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} = 0\,.$$

Letzteres folgt aus den kovarianten Tensorableitungen

$$\nabla_\lambda B_{\mu\nu} = \partial_\lambda B_{\mu\nu} - \Gamma^{\varrho}_{\lambda\mu} B_{\varrho\nu} - \Gamma^{\varrho}_{\lambda\nu} B_{\mu\varrho},$$

welche sich aus dem Transformationsgesetz $B_{\mu\nu} \sim \xi_\mu \eta_\nu$ und aus

$$\nabla_\lambda (\xi_\mu \eta_\nu) = \xi_\mu \nabla_\lambda \eta_\nu + \eta_\nu \nabla_\lambda \xi_\mu$$

ergeben.

Da das Produkt $\chi^\nu(x)\, \varphi_\nu(x)$ einer kontra- und einer kovarianten Vektorfunktion skalar ist, folgt aus (21)

$$\nabla_\mu (\chi^\nu \varphi_\nu) \equiv \partial_\mu (\chi^\nu \varphi_\nu) = \chi^\nu \partial_\mu \varphi_\nu + \varphi_\nu \partial_\mu \chi^\nu.$$

Nach (22) kann man dafür

$$\chi^\nu \nabla_\mu \varphi_\nu + \varphi_\nu (\partial_\mu \chi^\nu + \Gamma^{\nu}_{\mu\varrho} \chi^\varrho)$$

schreiben. Da der erste Summand und der Faktor φ_ν im zweiten kovariante Vektoren sind, ist

(25) $$\nabla_\mu \chi^\nu \equiv \partial_\mu \chi^\nu + \Gamma^{\nu}_{\mu\varrho} \chi^\varrho$$

ein ko-kontravarianter Tensor, so daß (25) die kovarianten Ableitungen von χ^ν liefern. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\nabla_\mu (\xi^\varrho \eta^\sigma) &= (\partial_\mu \xi^\varrho + \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} \xi^\nu)\, \eta^\sigma + \xi^\varrho (\partial_\mu \eta^\sigma + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \eta^\nu)\\ &= \partial_\mu (\xi^\varrho \eta^\sigma) + \Gamma^{\varrho}_{\nu\mu} \xi^\mu \eta^\sigma + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \xi^\varrho \eta^\nu.\end{aligned}$$

Wegen $T^{\mu\nu} \sim \xi^\mu \eta^\nu$ und $\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\varrho}_{\nu\mu}$ folgt daraus die kovariante Ableitung des Energie-Impulstensors in (16). Auf diese Weise kann man alle kovarianten Ableitungen ausrechnen und nunmehr meistens schon erraten, z. B. ist

(26) $$\nabla_\lambda \xi^\nu_\mu \equiv \partial_\lambda \xi^\nu_\mu - \Gamma^\varrho_{\lambda\mu} \xi^\nu_\varrho + \Gamma^\nu_{\lambda\varrho} \xi^\varrho_\mu, \quad \nabla_\mu \delta^\nu_\mu = 0.$$

Für den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}(x)$ erhält man auf dieselbe Weise

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu\lambda},$$

woraus nach (7)

(27) $$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$$

hervorgeht. Der metrische Tensor ist sozusagen kovariant konstant. Die gemäß

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$$

zu $g_{\mu\nu}$ reziproke Matrix ist ein kontravarianter Tensor. Daraus folgt nach (27)

$$g_{\lambda\nu} \nabla_\varrho g^{\mu\lambda} + g^{\mu\lambda} \nabla_\varrho g_{\lambda\nu} = g_{\lambda\nu} \nabla_\varrho g^{\mu\lambda} = 0.$$

Multiplikation mit $g^{\sigma\nu}$ ergibt

(28) $$\nabla_\varrho g^{\mu\sigma} = 0.$$

Auch die reziproken metrischen Tensoren sind kovariant konstant. Das hat eine praktisch wichtige Konsequenz. Aus $g_{\mu\nu} f^\nu = f_\mu$ und

$$g_{\mu\nu} \nabla_\lambda f^\nu = \nabla_\lambda (g_{\mu\nu} f^\nu) = \nabla_\lambda f_\mu$$

folgt, daß man Indizes unter kovarianten Ableitungen beliebig hoch oder tief stellen kann.

Sei $g = -\det(g_{\mu\nu})$, so sind $-g\, g^{\mu\nu}$ die Unterdeterminanten von g zu den Elementen $g_{\mu\nu}$. Damit erhält man aus einem bekannten Determinantensatz und nach (7)

$$\partial_\lambda g = g \cdot g^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu} = g \cdot g^{\mu\nu} (\Gamma_{\nu\mu\lambda} + \Gamma_{\mu\nu\lambda}),$$

und es folgt

(29) $$\partial_\lambda \sqrt{g} = \Gamma^\mu_{\mu\lambda} \sqrt{g}, \quad \nabla_\lambda \sqrt{g} = \partial_\lambda \sqrt{g} - \Gamma^\mu_{\mu\lambda} \sqrt{g} = 0.$$

Das hat eine wichtige Konsequenz z. B. für die elektrische Viererstromdichte. Die zu $\partial_\mu J^\mu = 0$ gehörige allgemein kovariante Gleichung lautet nach (25) und (29)

$$\nabla_\mu J^\mu = \partial_\mu J^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\varrho} J^\varrho = \partial_\mu J^\mu + \frac{\partial_\lambda \sqrt{g}}{\sqrt{g}} J^\mu = 0.$$

Der Erhaltungssatz scheint verletzt zu sein. Doch erhält man durch Multiplikation mit $\sqrt{g}$

$$(30) \qquad \partial_\mu \mathfrak{J}^\mu = 0, \quad \mathfrak{J}^\mu = \sqrt{g}\, \mathfrak{J}^\mu .$$

Ladungserhaltung gilt also nicht für J^μ, sondern für die durch (30) definierte Vektordichte, nach der

$$(31) \qquad \Lambda = \int \mathfrak{J}^0 d\tau = \int \mathfrak{J}^0 \sqrt{g}\, d\tau = \text{const}$$

ist. In der Tat ist schon bei linearen Transformationen nur dieses Integral invariant.

Das führt uns unmittelbar zur allgemein relativistischen Formulierung der elektrodynamischen Quellengleichungen. Sei $H^{\mu\nu} = -H^{\nu\mu}$ ein beliebiger Schieftensor, so ist

$$\nabla_\lambda (\sqrt{g} H^{\mu\nu}) = \partial_\lambda (\sqrt{g} H^{\mu\nu}) + \sqrt{g}\,(\Gamma^{\,\mu}_{\lambda\varrho} H^{\varrho\nu} + \Gamma^{\,\nu}_{\lambda\varrho} H^{\mu\varrho} + \Gamma^{\,\varrho}_{\varrho\lambda} H^{\mu\nu})$$

Daraus folgt wegen $H^{\mu\nu} = -H^{\nu\mu}$ und $\Gamma^{\,\mu}_{\varrho\sigma} = \Gamma^{\,\mu}_{\sigma\varrho}$

$$\nabla_\nu (\sqrt{g} H^{\mu\nu}) = \partial_\nu (\sqrt{g} H^{\mu\nu}) .$$

Dementsprechend gilt für die Tensordichten $\mathfrak{H}^{\mu\nu} = \sqrt{g} H^{\mu\nu}$

$$(32) \qquad \nabla_\nu \mathfrak{H}^{\mu\nu} \equiv \partial_\nu \mathfrak{H}^{\mu\nu} = \mathfrak{J}^\mu, \quad \partial_\mu \mathfrak{J}^\mu = 0 .$$

Das sind die allgemein relativistischen inhomogenen Maxwellschen Gleichungen. Die kovarianten Verknüpfungsgleichungen lauten

$$(33) \qquad \sqrt{g}\, g^{\mu\varrho} g^{\nu\sigma} B_{\varrho\sigma} = \mathfrak{B}^{\mu\nu} = \mu_0\, \mathfrak{H}^{\mu\nu} .$$

Danach liefern (23/24) und (32/33) die Elektrodynamik in allgemein relativistischer Form. Es ist nur nötig, die bekannten Gleichungen kovariant zu schreiben. Insbesondere sind keine neuen Voraussetzungen erforderlich.

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zur Frage nach den Quellengleichungen zurück. Die Quellen $T^{\mu\nu}$ genügen den Gleichungen in (15). Sie müssen das metrische Feld $g_{\mu\nu}$ bestimmen, aus dem $\Gamma^{\,\mu}_{\varrho\sigma}$ und $R^{\,\mu}_{\nu\varrho\sigma}$ hervorgehen. Da $\Gamma^{\,\mu}_{\varrho\sigma}$ keine kovariante Größe ist, kann sie in den Quellengleichungen nicht vorkommen. Auch $g_{\mu\nu}$ scheidet aus. Man könnte einen solchen Beitrag zu den Quellen zählen, zumal vergleichbare Beiträge vorkommen werden.

Danach müssen die Quellengleichungen eine Relation zwischen $R^{\,\mu}_{\nu\varrho\sigma}$ und $T^{\mu\nu}$ herstellen. Nach dem Vorbild der Elektrodynamik verlangen wir einen linearen Zusammenhang. Wegen der Lokalität sind beide Größen an der nämlichen Stelle zu vergleichen. Aus Kovarianzgründen können nur Tensoren gleicher Stufe vorkommen, also neben $T^{\mu\nu}$ nur der verjüngte Tensor

$$(34) \qquad R_{\mu\nu} = R^{\varrho}_{\mu\varrho\nu} = R_{\nu\mu}.$$

Andere Verjüngungen ergeben *0* oder bis auf das Vorzeichen den nämlichen Tensor. $R_{\mu\nu}$ ist also eindeutig bestimmt. Daneben können Beiträge des Krümmungsskalars

$$(35) \qquad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu}$$

ins Spiel kommen. Damit erhält man als eine mögliche lineare Gleichung[10]

$$(36) \qquad \mathfrak{G}^{\mu}_{\nu} \equiv \mathfrak{R}^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{R} \delta^{M}_{\nu} = \varkappa\, \mathfrak{T}^{\mu\nu}.$$

Da auf beiden Seiten die kovariante Divergenz verschwinden muß, ist der zweite Summand auf der linken durch die Bianchischen Identitäte eindeutig bestimmt. Das sind die Einsteinschen Quellengleichungen. Die Tensordichten $\mathfrak{G}^{\mu}_{\nu}$ und $\mathfrak{R}^{\mu}_{\nu}$ sind nach Einstein bzw. Ricci benannt. Man beachte, daß die Gleichungen (36) eichtheoretisch eindeutig bestimmt sind.

Allerdings hört anders als in der Elektrodynamik die Linearität auf, sobald $g_{\mu\nu}$ ins Spiel kommt. Das gilt schon für die Gleichung

$$(37) \qquad G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \varkappa T^{\mu\nu}$$

und erst recht, wenn man $R_{\mu\nu}$ aus $g_{\mu\nu}$ berechnet. Elementare, wenn auch mühsame Rechnungen ergeben

$$(38) \qquad R_{\mu\nu} = \partial_{\varrho} \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\varrho}_{\varrho\mu} + \Gamma^{\varrho}_{\varrho\tau} \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} - \Gamma^{\varrho}_{\tau\mu} \Gamma^{\tau}_{\varrho\nu}.$$

Danach ist die Dimension von $R_{\mu\nu}$ gleich m^{-2}. Nach (14) hat die Kopplungskonstante $\varkappa$ die Dimension $kg^{-1} m^{-1} s^{-2}$. Sie ist durch die Newtonsche Gravitationskonstante $G = 6{,}67 . 10^{-11} kg^{-1} m^{3} s^{-2}$ bestimmt. Durch Vergleichung mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz erhält man

$$(39) \qquad \varkappa = \frac{8 \pi G}{c^{4}}.$$

Auf den Gleichungen (6/7) und (37/38), sowie auf den Maxwellschen Gleichungen in (23/24) und (32/33) beruhen alle allgemein relativistischen Folgerungen. Wir greifen hier nur eine Frage auf, die zwar vielfältig, aber vielleicht noch nicht abschließend behandelt ist, nämlich die nach der Energie-Impulserhaltung. Der hier einzuschlagende Weg liegt abseits des anerkannten. Doch sind die Bedenken gegen diesen Weg nur bedingt einsichtig.

Nach Einschiebung des Faktors $\sqrt{g}$ gemäß (29) erhält man aus (16)

$$\nabla_\nu \mathfrak{T}^{\mu\nu} = \partial_\nu \mathfrak{T}^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\varrho\sigma} \mathfrak{T}^{\varrho\tau} = 0 . \tag{40}$$

Anders als beim Viererstrom $\mathfrak{J}^\mu$ und beim Feldtensor $\mathfrak{B}^{\mu\nu}$ verschwindet hier der Γ-Term nicht, weil $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ nach (37) symmetrisch ist. Relativ zu beliebigen Koordinaten gelten schon in der speziellen Relativitätstheorie keine Erhaltungssätze.

Speziell relativistisch kann man jedoch sagen, daß es spezielle Flächen gibt, relativ zu denen Erhaltungssätze gelten, z.B. die Koordinatenflächen eines Minkowskischen Koordinatensystems. Daß es nicht für alle Flächen Erhaltungssätze geben kann, sieht man schon daraus, daß sich Flächen, die sich beschleunigt durch einen konstanten Energiestrom bewegen, veränderliche Energiedurchsätze haben. Scheinbare Nichterhaltung ist also eine plausible Konsequenz.

Wir fragen darum, ob es allgemein relativistisch ebenfalls spezielle Flächen gibt, relativ zu denen Erhaltungssätze gelten. Ist $S(x)$ eine beliebige skalare Funktion, so ist $\mathfrak{T}^{\mu\nu} \partial_\mu S$ (x) eine Vektordichte. Deren kovariante Divergenz ist gleich der differentiellen. Gibt es spezielle Funktionen S (x), für die die Divergenz gemäß

$$\nabla_\nu (\mathfrak{T}^{\mu\nu} \partial_\mu S) = \partial_\nu (\mathfrak{T}^{\mu\nu} \partial_\mu S) = 0 \tag{41}$$

verschwindet, so liefern diese Erhaltungsgrößen. Die Integrale lauten

$$P_S = \int \mathfrak{T}^{\mu 0} \partial_\mu S \, d\tau = \text{const} . \tag{42}$$

Dagegen sträubt sich der Glaube, daß es in der allgemeinen Relativitätstheorie keine ausgezeichneten Koordinatensysteme geben dürfe. Dem ist jedoch entgegenzuhalten, daß die Flächen S (x) = const durch (41) kovariant, also unabhängig von der speziellen Koordinatenwahl definiert sind. Es sind keine in einem abstrakten Raum fixierten Flächen, sondern solche, die durch den weltweiten Energie-Impulstensor bestimmt sind. Sobald es Integrale von Gleichung (41) gibt, ist die Existenz von kovariant definierten Erhaltungsflächen bewiesen. Dabei ist es nicht abwegig, Erhaltungsflächen zu erwarten. Denn die formal analoge Gleichung

$$\partial_\mu \left(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \partial_\nu S\right) = 0$$

ist die allgemein relativistische Gleichung für skalare Wellen, bei der man kaum an der Existenz von Lösungen zweifeln kann.

Wendet man Gleichung (41) auf fast abgeschlossene Systeme an, so sind die Lösungen im allgemeinen nur in begrenzten Bereichen regulär. Abgesehen davon, daß in den Regularitätsbereichen Erhaltungssätze gelten und daß die Bereiche von den Punkten abhängen, von denen aus man die Integration beginnt, kann man aus solchen Singularitäten keinen Einwand ableiten. Sie zeigen nur an, daß es in der allgemeinen Relativitätstheorie problematisch sein kann, von abgeschlossenen Teilsystemen zu sprechen.

Bei der Frage nach der Integrabilität von (41) muß man von globalen Systemen ausgehen, also von kosmologischen Modellen. Erst wenn man dafür Lösungen in der Hand hat, wird man zu abgeschlossenen Teilsystemen zurückkehren und genauer definieren können, was darunter zu verstehen ist.

Die Frage nach Erhaltungsflächen hängt eng mit Machschen Ideen zusammen, die anfangs Einstein auf seinem Weg zur allgemeinen Relativitätstheorie geleitet haben. Mach ist (wie übrigens auch Newton) davon ausgegangen, daß man unmittelbar nur Relativbewegungen beobachten kann. Während Newton die Relativität wegen der Wölbung der Wasseroberfläche in einem rotierenden Eimer[11] auf die Trägheitsbewegung beschränkt und trotz seinem Glauben an den absoluten Raum nicht eliminiert hat, ist Mach von der Vorstellung ausgegangen, die Wölbung sei eine Folge der Bewegung relativ zum Fixsternhimmel[12], man könnte auch sagen, relativ zur gesamten Massenverteilung der Welt und damit – modern gesprochen – relativ zur Energie-Impulsverteilung. Das ist klarerweise unsere Situation bei der Frage nach Erhaltungsflächen. Der einzige Unterschied zu Mach besteht darin, daß wir nicht mehr erwarten können, der durch den Kosmos bestimmte Raum sei Euklidisch und die Raum-Zeit Minkowskisch. Tatsächlich ist er Riemann-Minkowskisch.

Das führt zu einer Relativierung der Relativität. Sobald die Gesamtwelt wie heute allgemein anerkannt endlich ist, verliert die Relativität an Bedeutung. Sie ist nach wie vor für alle (fast) abgeschlossene Teilsysteme wichtig. Einschließlich der Grundgleichungen ändert sich nichts an der relativistischen Physik. Auch Fragen nach Bewegungen relativ zur Gesamtwelt bleiben sinnvoll. Doch gibt es keine andere Welt, relativ zu der sich die unsere bewegen könnte. Darum ist durch die Gesamtwelt ein ausgezeichnetes Koordinatensystem definiert. In dem Maße, in dem wir die Gesamtwelt im Griff haben, in dem wir sinnvoll von kosmologischen Modellen sprechen können, was stets nur extrapolatorisch möglich ist, in dem Maße tritt die Gesamtwelt an die Stelle des absoluten Raumes von Newton. Der mathematisch geschulte, mit den Relativitätstheorien vertraute und sie auch anerkennende Naturphilosoph Alois Wenzel[13] hat einmal gefragt, ob nicht Gott trotz aller Relativität den absoluten Raum erkennen könne. Wenn es auch fragwürdig sein mag, in solcher Weise mit Gott zu argumentieren, so ist seine Frage mit ja zu beantworten, sobald man unterstellt, es habe einen Sinn, von der Gesamtwelt zu sprechen.

In Hinblick darauf ist die Frage nach Erhaltungsflächen vergleichsweise harmlos. Hat man nämlich ein spezielles Koordinatensystem aus Erhaltungsflächen, so gibt es unendlich viele, z.B. alle, die durch Poincarétransformationen aus dem einen hervorgehen. Dabei sind nur diejenigen wirklich von Interesse, in denen der Ursprung im Zentrum und der Drehimpuls gleich 0 ist.

Am Beispiel der Friedmanwelt soll gezeigt werden, daß es Erhaltungsflächen gibt. Das geschieht in Anlehnung an die Darstellung von Schmutzer[14]. Für den Lichtkosmos ist der Energie-Impulstensor gleich

$$(T_\mu^\nu) = \begin{pmatrix} w\,, & 0\,, & 0\,, & 0 \\ 0\,, & -w/3\,, & 0\,, & 0 \\ 0\,, & 0\,, & -w/3\,, & 0 \\ 0\,, & 0\,, & 0\,, & -w/3 \end{pmatrix}.$$

Das Linienelement mit $c = 1$ ist durch

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - K^2(d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, dp^2))$$

definiert. Danach ist

$$\sqrt{g} = K^3 \sin^2\chi \sin\vartheta \,.$$

Somit lauten die Diagonalelemente von $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$

$$-\frac{1}{3} w \left(3\,K^3 \sin^2\chi \sin\vartheta, K \sin^2\chi \sin\vartheta, K \sin\vartheta, \frac{K}{\sin\vartheta}\right).$$

Aus der Gleichung für Erhaltungsflächen

$$-\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \left(\mathfrak{T}^{\mu\nu} \partial_\nu S\right) = 0$$

folgt, da w räumlich konstant ist

$$\frac{1}{K^3} \partial_0 \left(w K^3 \partial_0 S\right) +$$

$$+ \frac{w}{K^2 \sin^2\chi} \left\{ \partial_\chi \left(\sin^2\chi\, \partial_\chi S\right) + \frac{1}{\sin\vartheta} \partial_\vartheta \left(\sin\vartheta\, \partial_\vartheta S\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \partial_\varphi^2 S \right\} = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist durch Separation lösbar. Bereits die einfachsten Lösungen liefern die gesuchten Erhaltungsflächen, z.B. die Flächen $S = \varphi =$ const, welche zum Drehimpuls führen. Wir sind insbesondere am Energiesatz interessiert. Darum betrachten wir Lösungen, für die $S = S(t)$ und

$$w K^3 \partial_0 S = C = \text{const}$$

ist. Die Integrale der Einsteingleichung lauten nach Schmutzer

$$K = \sqrt{t\,(2\tau - t)}, \quad w = \frac{3\,\tau^2/\varkappa}{t^2 (2\tau - t)^2}.$$

Daraus folgt

$$\partial_0 S = \frac{C}{w K^3} = \frac{C\varkappa}{3\,\tau^2} \sqrt{t\,(2\tau - t)}\,.$$

Die Integration ergibt mit $S = 0$ für $t = 0$

$$t = 2\tau \sin^2 u, \quad S = \frac{C\varkappa}{6} \left(u - \sin u \cos u\right).$$

Das ist keineswegs singulär und liefert die konstante Energie

$$W = \int w \partial_0 S\, K^3 \sin^2\chi \sin\vartheta\, d\chi\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi^2 C\,.$$

Die Integrationskonstante C als Faktor von S ist unvermeidlich. Sie bestimmt die Zeitskale. Um an die herkömmliche Skala anzuknüpfen, muß man von Punkten ausgehen, in denen sich die Metrik der Minkowskischen anschmiegt. In diesen Punkten muß $S = t + \text{const}$ sein oder $\partial_0 S = 1$. Hier ist das in den infinitesimalen Umgebungen von $t = \tau, \chi = \vartheta = \pi/2$ und φ beliebig der Fall. Daraus folgt

$$\frac{C\varkappa}{3\tau} = 1, \quad C = \frac{3\tau}{\varkappa},$$

so daß die Energie konstant und gleich

$$W = \frac{6\pi^2\tau}{\varkappa} = \frac{3\pi}{4}\,\frac{c^5\tau}{G}$$

ist. Der letzte Ausdruck liefert die Energie in herkömmlichen Einheiten und enthält die Newtonsche Konstante an Stelle von $\varkappa$. Ein elementares Modell auf Newtonscher Basis liefert den Faktor $5/3$ statt $3\pi/4$. Das Verhältnis $9\pi/20 \approx \sqrt{2}$ liegt so nahe bei 1, daß man solchen qualitativen Betrachtungen einiges Vertrauen schenken darf.

Damit ist gezeigt, daß es in der Friedmanwelt Erhaltungsflächen gibt. Man kann nicht mehr daran zweifeln, daß das Verhältnis des allgemein kovarianten Energie-Impulssatzes zu den Erhaltungssätzen das nämliche ist wie in der Minkowskischen Raum-Zeit. Doch bleibt die Frage offen, welche Konsequenzen das für fast abgeschlossene Systeme hat. Wahrscheinlich erfordert die Antwort, daß man solche Systeme nicht isoliert betrachtet, sondern als eingebettet in die Gesamtwelt. Man muß also nach globalen Lösungen der Einsteinschen Gleichungen suchen, die sozusagen Knöllchen im homogenen Materiebrei der Friedmanwelt enthalten.

Eine Frage der klassischen Physik ist noch offen, nämlich die nach dem Verhältnis der Kopplungskonstanten in Elektrodynamik und Gravitationstheorie. Das Verhältnis von Coulomb- und Newtonkraft etwa zwischen Proton und Elektron ist gleich

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \Big/ G\, m_p m_e = 2{,}28 \cdot 10^{39}.$$

Dirac hat die Frage gestellt, wie man eine so große dimensionslose Naturkonstante verstehen könne, und vermutet[15], sie hänge mit dem Weltalter zusammen, weil das Verhältnis des Weltalters zu elementaren nuklearen Zeiten von gleicher Größenordnung ist. Diese großartige Idee hat zu Versuchen geführt, die vermutete Relation aus zielstrebig veränderten Grundgleichungen abzuleiten. Die Bedeutung der Diracschen Idee tritt bei unveränderten Einsteingleichungen mit größerer Klarheit hervor.

Setzt man nämlich Linienelemente voraus, die nicht von vorneherein eine mit dem Weltradius vergleichbare Konstante enthalten, betrachtet man Linienelemente von der Form

$$ds^2 = dt^2 - g_{ik}(\underline{r}/t)\, dx^i dx^k,$$

so muß die Gesamtmasse des Systems aus Dimensionsgründen zum Weltalter proportional, und zwar gleich $\gamma t/\varkappa c$ sein. An anderer Stelle wird gezeigt, daß es Integrale der Einsteingleichung von dieser Art gibt[16].

Voll Bewunderung blicken wir zurück auf die Einheit der von Newton programmierten und von Einstein und Weyl vollendeten klassischen Physik. Die vielfältigen Leistungen auf dem Wege von Newton zu Einstein und Weyl sollen dabei nicht vergessen werden, vor allem nicht die von Faraday und Maxwell und am Ende die von Mach. Gewiß gibt es noch offene Fragen vor allem in der allgemeinen Relativitätstheorie. Doch sind in dieser Synopsis m. E. alle dunkelen Ecken ausgeräumt worden. Jeder Begriff und jedes Gesetz hat seinen ihm angemessenen Platz.

Die Quantenphysik ist ausgeklammert. Sie ordnet sich zwar ebenfalls dem naturphilosophischen Programm von Newton unter, läßt sich aber nicht auf die klassische Physik zurückführen. Völlig neue Basisvorstellungen stehen am Anfang. Doch sollte es gelingen, mittels des Newtonschen Wechselspiels von Erfahrung und Induktion eine eigenständige Quantenphysik zu entwickeln, die nicht mehr der Krücken der Quantisierung bedarf, die zwar ganz verschieden von der klassischen Physik sein wird, die aber am Ende genau so anschaulich ist wie diese, und die natürlich die klassische Physik als Näherung umschließen muß.

Literaturangaben und Anmerkungen

[1] F. Bopp: Sitz.ber. d. Bay. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Kl., 1983, Teil III, xxx, mit weiteren Literaturhinweisen.

[2] H. Weyl: Raum-Zeit-Materie, Springer Berlin, 5. Aufl. 1923: hier Kap. I/II.

[3] Privates Gespräch; vergl. auch l. c. 2., S. 108, Abs. 3.

[4] H. H. Fritzsch: Quarks, R. Piper-Verlag, München etc., 4. Aufl. 1982, hier S. 318.

[5] H. P. Dürr: Heisenbergs einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen, in Festschrift: In memoriam Werner Heisenberg, Nova Acta Leopoldina, Nr. 248, Bd. 55, Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina 1982.

[6] l. c. 2, S. 91

[7] l. c. 2, § 40, erste, noch zum Geometrisierungsprogramm gehörige Formulierung; davon losgelöste Formulierung in H. Weyl: Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel-Verlag, Leipzig 1928, § 19 und S. 88 oben. – F. London, Z. f. Phys. **42,** 375 (1927).

[8] l. c. 2, § 29.

[9] l. c. 2, §§ 14–16.

[10] l. c. 2, § 30.

[11] F. Cajori: Sir Isaac Newton's Principia, Univ. of Calif. Press, Berkeley etc. 1962, S. 12, Zeile 4 ff.

[12] E. Mach: Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 9. Aufl., Wissensch. Buchgemeinschaft, Darmstadt 1976.

[13] Privates Gespräch.

[14] E. Schmutzer: Relativistische Physik, B. G. Teubner, Leipzig 1968, S. 852 und S. 857.

[15] P. A. M. Dirac: Nature **139,** 323 (1937), Proc. Roy. Soc. Ld. (A) **165,** 199 (1938).

[16] F. Bopp: Welt im Werden, noch nicht publiziertes Skriptum. Vorabdruck erhältlich.