BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

# SITZUNGSBERICHTE

## JAHRGANG
1986

MÜNCHEN 1987

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Mittelwerte und Funktionalgleichungen

von **Heinz Bauer**

Mathematisches Institut der Universität Erlangen-Nürnberg

Sitzung vom 13. Dezember 1985

## Einleitung

In dieser Note wird mit völlig elementaren Hilfsmitteln gezeigt, daß sich geometrisches und arithmetisches Mittel zweier positiver reeller Zahlen einem gemeinsamen Gesichtspunkt unterordnen lassen. Dieser läßt außerdem die bekannte Ungleichung zwischen beiden Mitteln in überraschend einfacher Weise geometrisch evident werden. Der gemeinsame Gesichtspunkt führt zugleich auch zu einer Klasse allgemeinerer Mittelbildungen sowie zu hierfür relevanten Funktionalgleichungen und deren Lösung.

## 1. u-Mittel

Im folgenden betrachten wir eine auf einem beliebigen nicht-ausgearteten (d. h. weder leeren noch einpunktigen) Intervall $I \subset ]0, \infty[$ definierte *stetige* reelle Funktion

$$u : I \to \boldsymbol{R}$$

mit folgender einzigen Zusatzeigenschaft:

$$(1.1) \qquad x \to \frac{u(x)}{x}$$

*ist auf $I$ streng monoton* (wachsend oder fallend). Eine derartige Funktion $u : I \to \boldsymbol{R}$ nennen wir kurz *zulässig*.

Die Gleichung

$$(1.2) \qquad \frac{u(x)}{x} = \frac{u(a) + u(b)}{a + b}$$

besitzt dann für je zwei Zahlen $a, b \in I$ genau eine Lösung $x \in I$. Im Falle $a = b$ folgt dies unmittelbar aus der strengen Monotonie der

Funktion (1.1). Im Falle $a \neq b$ kann $a < b$ und die Funktion (1.1) als streng monoton wachsend angenommen werden. Dann aber gilt

$$\frac{u(a)}{a} < \frac{u(b)}{b}$$

und somit

$$\frac{u(a)}{a} < \frac{u(a) + u(b)}{a + b} < \frac{u(b)}{b} .$$

Aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen und der strengen Monotonie der Funktion (1.1) folgt dann die Behauptung.

Die einzige Lösung $x \in I$ von (1.2) liegt somit im Falle $a \neq b$ echt zwischen $a$ und $b$; im Falle $a = b$ fällt sie mit $a$ und $b$ zusammen.

Im folgenden soll diese eindeutig bestimmte Lösung von (1.2) das $u$-Mittel von $a$ und $b$ genannt und mit

$$M_u(a, b)$$

bezeichnet werden. Definitionsgemäß gilt somit

$$\frac{u(M_u(a, b))}{M_u(a, b)} = \frac{u(a) + u(b)}{a + b} \tag{1.3}$$

für beliebige $a, b \in I$.

Von Interesse sind u. a. die folgenden Beispiele:

**1.1.** $u(x) = \text{const} = 1$ auf $I = ]0, +\infty[$. Dann ist

$$M_u(a, b) = \frac{a + b}{2}$$

das *arithmetische Mittel* von $a > 0,\ b > 0$.

**1.2.** $u(x) = \dfrac{1}{x}$ auf $I = ]0, +\infty[$. Dann ist

$$M_u(a, b) = \sqrt{ab}$$

das *geometrische Mittel* von $a > 0,\ b > 0$.

**1.3.** Es bezeichne $u_p$ die Funktion

$$u_p(x) = x^p \qquad \text{auf } I = ]0, +\infty[.$$

Diese ist für alle $p \in \boldsymbol{R}$ mit $p \neq 1$ zulässig. Man erhält

$$M_{u_p}(a, b) = \left(\frac{a^p + b^p}{a + b}\right)^{\frac{1}{p-1}} \qquad (a > 0,\ b > 0). \tag{1.4}$$

Für $p = 0$ und $p = -1$ liefert dies erneut die Beispiele 1.1 und 1.2. Für $p = 2$ ergibt sich

$$M_{u_2}(a,b) = \frac{a^2 + b^2}{a + b} \qquad (a > 0,\ b > 0). \tag{1.5}$$

**1.4.** Die auf $I = ]0,\ 1]$ definierte Funktion

$$u(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

ist zulässig. Man erhält

$$M_u(a,b) = \frac{a + b}{[(a+b)^2 + (\sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 - b^2}\,)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

für je zwei Zahlen $0 < a,\ b \leq 1$.

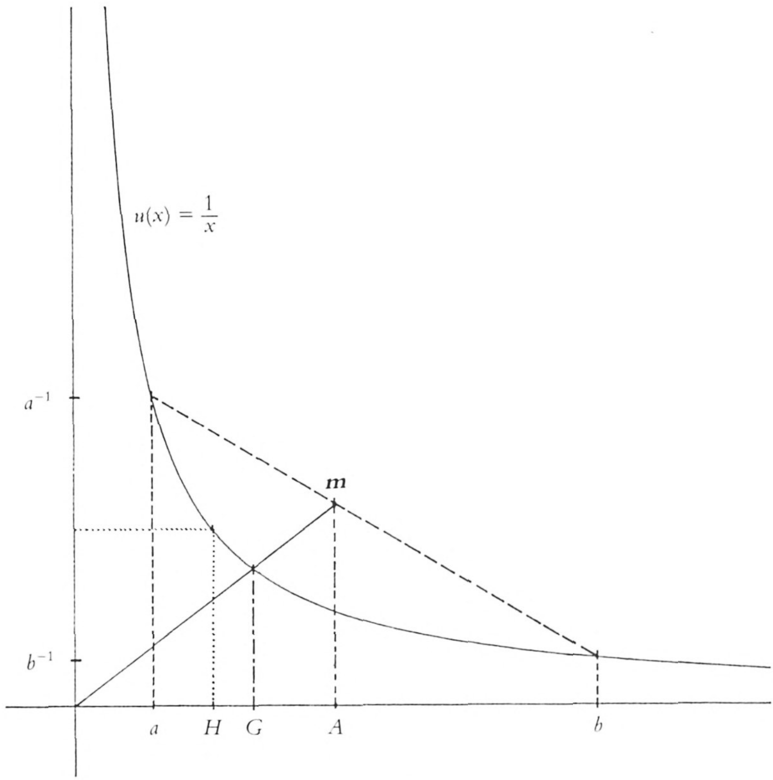
## 2. Geometrische Interpretation

Schreibt man die Bestimmungsgleichung (1.2) für das $u$-Mittel in der Form

$$\frac{u(x)}{x} = \frac{\dfrac{u(a) + u(b)}{2}}{\dfrac{a + b}{2}}, \tag{2.1}$$

so erhält man eine einfache geometrische Interpretation des $u$-Mittels $M_u(a,b)$. Es ist nämlich $\dfrac{u(x)}{x}$ die Steigung der Geraden durch die Punkte $\mathbf{0} = (0,0)$ und $(x, u(x))$ des $\boldsymbol{R}^2$. Auf der rechten Seite von (2.1) steht die Steigung der Geraden durch die Punkte $\mathbf{0}$ und $\boldsymbol{m}$, wobei $\boldsymbol{m}$ der Mittelpunkt der Sehne zwischen den Punkten $(a, u(a))$ und $(b, u(b))$ des Graphen von $u$ ist. Somit ist $M_u(a,b)$ die Abszisse des einzigen Schnittpunktes der Geraden durch die Punkte $\mathbf{0}$ und $\boldsymbol{m}$ mit dem Graphen von $u$.

Für die Funktion $u_{-1}(x) = x^{-1}$ (Beispiel 1.2) erhält man so die angekündigte anschauliche Interpretation des geometrischen Mittels zweier positiver reeller Zahlen:



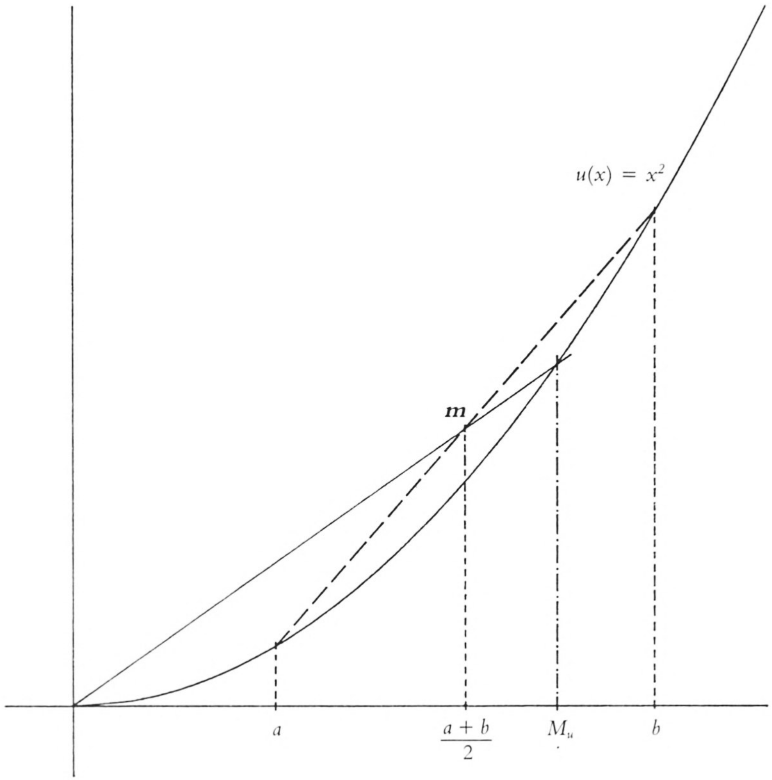

Figur 1

Man „sieht“, daß im Falle $a \neq b$ das geometrische Mittel links vom arithmetischen Mittel liegt. Die Figur 1 wurde außerdem so ergänzt, daß die volle Ungleichungskette

$$\left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{-1} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$

zwischen dem harmonischen, geometrischen und arithmetischen Mittel H bzw. G bzw. A sichtbar wird ($a \neq b$, $a > 0$, $b > 0$). Nach Aczél [1] ist übrigens das harmonische Mittel selbst kein $u$-Mittel.

Für die Funktion $u_2(x) = x^2$ (Beispiel (1.5)) sieht die entsprechende zum Mittel $M_{u_2}(a, b)$ führende Figur wie folgt aus:




Figur 2

Übrigens folgt aus der Definition des $u$-Mittels sofort, daß im Falle einer *konvexen* zulässigen Funktion $u : I \to \mathbf{R}$ stets

$$M_u\,(a, b) \leq \frac{a+b}{2} \qquad (a, b \in I) \tag{2.2}$$

bzw.

$$\frac{a+b}{2} \leq M_u\,(a, b) \qquad (a, b \in I) \tag{2.3}$$

gilt, je nachdem, ob $x \to \dfrac{u(x)}{x}$ streng monoton fallend bzw. wachsend ist. Setzt man nämlich für $a, b \in I$ abkürzend

$$A = \frac{a+b}{2},$$

so gilt aufgrund der Konvexität von $u$

$$u(A) \leq \frac{1}{2}(u(a) + u(b))$$

und somit

$$\frac{u(A)}{A} \leq \frac{u(a) + u(b)}{a+b} = \frac{u(M_u(a,b))}{M_u(a,b)}.$$

Ist daher $x \to \frac{u(x)}{x}$ streng monoton fallend bzw. wachsend, so folgt hieraus (2.2) bzw. (2.3). Ist die Funktion u sogar streng konvex, so liefert diese Überlegung für $a, b \in I$ mit $a \neq b$ das <-Zeichen in (2.2) bzw. (2.3).

Schließlich sei noch erwähnt, daß das Mittel $M_{u_2}$ in gewissem Sinn die Keimzelle aller $u$-Mittel ist. Bezeichnet nämlich $v$ die Funktion (1.1), setzt man also für eine zulässige Funktion $u: I \to \boldsymbol{R}$

$$v(x) = \frac{u(x)}{x} \qquad (x \in I), \tag{2.4}$$

so nimmt die Gleichung (1.2) die äquivalente Form

$$v(x) = \frac{a}{a+b}\, v(a) + \frac{b}{a+b}\, v(b) \tag{2.5}$$

an. Hieraus entnimmt man die folgende Interpretation von $M_u(a, b)$ für $a, b \in I$ mit $a \neq b$: Es sei $\boldsymbol{s}$ derjenige Punkt der Sehne zwischen den Punkten $(a, v(a))$ und $(b, v(b))$ des Graphen von $v$, welcher

$$M_{u_2}(a,b) = \frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{a}{a+b}\, a + \frac{b}{a+b}\, b$$

als Abszisse besitzt. Die Gerade parallel zur $x$-Achse durch $\boldsymbol{s}$ schneidet dann den Graphen von $v$ in genau einem Punkt. Dieser hat das $u$-Mittel $M_u(a, b)$ zur Abszisse.

### 3. Funktionalgleichung des u-Mittels

Wiederum sei $u : I \to \boldsymbol{R}$ eine zulässige Funktion. Offenbar ist dann auch jede der Funktionen

$$u^\star(x) = \alpha u(x) + \beta x \qquad (x \in I) \tag{3.1}$$

mit $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ und $\alpha \neq 0$ zulässig. Ferner definieren $u$ und $u^\star$ dasselbe Mittel: es gilt

$$M_{u^\star}(a, b) = M_u(a, b)$$

für beliebige $a, b \in I$. Es erhebt sich die Frage, ob die Funktionen $u^\star$ aus (3.1) die einzigen zulässigen Funktionen sind, welche zu dem u-Mittel $M_u(a, b)$ über die Bestimmungsgleichung (1.3) führen. Diese Frage beantwortet der folgende Satz:

**3.1. Satz.** *Ist $u : I \to \boldsymbol{R}$ eine zulässige Funktion, so sind*

$$x \to \alpha u(x) + \beta x \qquad (\alpha, \beta \in \boldsymbol{R})$$

*die einzigen stetigen Funktionen $f : I \to \boldsymbol{R}$, welche der Funktionalgleichung*

$$\frac{f(M_u(a, b))}{M_u(a, b)} = \frac{f(a) + f(b)}{a + b} \tag{3.2}$$

*für alle $a, b \in I$ genügen.*

*Beweis:* Zu zeigen ist nur noch, daß jede stetige Lösung $f : I \to \boldsymbol{R}$ der Funktionalgleichung (3.2) eine Linearkombination von $u$ und $x \to x$ ist. Wir betrachten hierzu die Funktion $v : I \to \boldsymbol{R}$ aus (2.4). Sie ist stetig und streng monoton, bildet also $I$ stetig und bijektiv, also sogar homöomorph, auf ein Intervall $J \subset \boldsymbol{R}$ ab. Für die stetige Lösung $f : I \to \boldsymbol{R}$ von (3.2) setzen wir:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \qquad (x \in I) \tag{3.3}$$

und

$$\bar{g} = g \circ v^{-1}. \tag{3.4}$$

Dann ist $\bar{g} : J \to \boldsymbol{R}$ stetig und

$$g = \bar{g} \circ v. \tag{3.4'}$$

Also muß nur gezeigt werden, daß $\bar{g}$ auf $J$ affin-linear ist. Nun transformiert sich aber (3.2) in eine entsprechende Funktionalgleichung für $\bar{g}$, nämlich (vgl. (2.5)):

$$\bar{g}\left(\frac{av(a) + bv(b)}{a + b}\right) = \frac{a\bar{g}(v(a)) + b\bar{g}(v(b))}{a + b} \tag{3.5}$$

für alle $a, b \in I$. Diese aber besagt, daß auf der offenen Strecke $S$ zwischen je zwei Punkten $(\xi, \bar{g}(\xi))$ und $(\eta, \bar{g}(\eta))$, $\xi \neq \eta$, $\xi, \eta \in J$, des Graphen von $\bar{g}$ stets ein weiterer Punkt dieses Graphen liegt. In der Tat: Wegen der Bijektivität von $v: I \to J$ ist $\xi = v(a)$ und $\eta = v(b)$ mit $a \neq b$, $a, b \in I$. Die Gleichung (3.5) lehrt somit, daß die offene Strecke S den Graphen von $\bar{g}$ im Punkte

$$(p\xi + q\eta,\ p\bar{g}(\xi) + q\bar{g}(\eta))$$

mit

$$p = \frac{a}{a + b} \text{ und } q = \frac{b}{a + b}$$

schneidet. Dann aber muß zufolge der Stetigkeit von $\bar{g}$ diese Funktion auf dem Intervall mit den Endpunkten $\xi$, $\eta$ affin-linear sein. Andernfalls gäbe es nämlich Punkte $\xi_0 < \eta_0$ zwischen $\xi$ und $\eta$ derart, daß $(\xi_0, \bar{g}(\xi_0))$ und $(\eta_0, \bar{g}(\eta_0)$ auf $S$ liegen, daß aber kein Punkt $(\tau, \bar{g}(\tau))$ des Graphen von $\bar{g}$ mit $\tau \in\, ]\xi_0, \eta_0[$ auf $S$ liegt. Dies widerspricht aber, wie soeben dargelegt, der Funktionalgleichung (3.5). Somit ist $\bar{g}$ auf jedem kompakten Teilintervall $[\xi, \eta]$ von $J$ und damit auf $J$ selbst affin-linear.

**3.2. Bemerkungen.** 1) Für die konstante Funktion $u(x) = 1$ auf $]0, +\infty[$ erhält man gemäß Beispiel 1.1 die Jensensche Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) = \frac{f(a) + f(b)}{2} \qquad (a > 0,\ b > 0). \tag{3.6}$$

Der Satz 3.1 liefert in diesem Fall die bekannte Tatsache, daß die affin-linearen Funktionen auf $]0, +\infty[$ die einzigen stetigen Lösungen von (3.6) sind.

2) Für $u(x) = x^2$ und $I = ]0, +\infty[$ ergibt sich die Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{a^2 + b^2}{a + b}\right) = \frac{a^2 + b^2}{(a + b)^2}(f(a) + f(b)) \qquad (a > 0,\ b > 0). \tag{3.7}$$

Auf sie stößt man in der Korovkin-Theorie, wenn man auf direktem Wege zeigen will, daß der freie Korovkin-Abschluß des von $x$ und $x^2$ erzeugten Funktionenraumes auf $]0, 1]$ mit diesem Raum zusammenfällt. (Vgl. Bauer-Donner [3], p. 167).

3) Die Funktionalgleichung (3.7) bildete den Ausgangspunkt dieser Untersuchung. Die im Beweis des obigen Satzes herangezogene Schlußweise wurde in diesem Spezialfall von P. Kröger (unveröffentlicht) und Aczél [1] verwendet. Die Funktion $v$ tritt dabei nicht explizit auf, da $v(x) = x$ für alle $x \in I$ gilt.

## 4. Ausblick

Die hier dargestellte Untersuchung findet ihre tiefere Rechtfertigung in der Tatsache, daß sich die $u$-Mittel $M_u(a, b)$ unter geringfügig schärferen Voraussetzungen an die zulässigen Funktionen $u : I \to \mathbf{R}$ auch für je endlich viele Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in I$ definieren lassen. Für die sich so ergebenden Mittel $M_u(a_1, \ldots, a_n)$ läßt sich dann das genaue Analogon zur Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel herleiten. Ist nämlich etwa $u$ eine auf $]0, +\infty[$ *streng konvexe, monoton fallende, stetige Funktion mit Werten* $> 0$, so gilt

$$M_u(a_1, \ldots, a_n) < \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \tag{4.1}$$

für je endlich viele Zahlen $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$, welche nicht sämtlich einander gleich sind. Speziell für $u(x) = \dfrac{1}{x}$ liefert dies die Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel.

Bezüglich der Einzelheiten sei auf [2] verwiesen.

## Literatur

[1] J. Aczél: Related functional equations applied to Korovkin approximation and to the characterization of Renyi entropies – Links to uniqueness theory. C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada VI, No. 6, 319–336 (1984).

[2] H. Bauer: A class of means and related inequalities. Manuscripta math. 55, 199–211 (1986).

[3] H. Bauer and K. Donner: Korovkin closures in $C_0$ (X). In: Aspects of Mathematics and its Applications (Editor: J. A. Barroso). North Holland Math. Library, Vol. 34, 145–167 (1986).

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1987

Band/Volume: 1986

Autor(en)/Author(s): Bauer Heinz

Artikel/Article: Mittelwerte und Funktionalgleichungen 1-9