BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1986

MÜNCHEN 1987

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über einen Satz von Möbius-Hjelmslev

von **Georg Nöbeling**

Vorgetragen in der Sitzung vom 12. Dezember 1986

Auf A. F. Möbius geht zurück der Satz: Ist eine glatte, geschlossene Kurve K ohne mehrfache Punkte in der projektiven, reellen Ebene P^2 lokal konvex, so ist sie auch global konvex.[1] J. Hjelmslev hat diesen Satz verallgemeinert: Ist eine glatte, geschlossene Kurve K ohne k-Sekanten im projektiven, reellen Raum $P^k (k \geqq 2)$ lokal von der Ordnung k, so ist sie auch global von der Ordnung k.[2] M. a. W.: Ist K von einer Ordnung $> k$, so hat K mindestens einen Scheitel, d. h. einen Punkt von einer Ordnung $> k$. Wir geben hierfür einen Beweis und zeigen überdies, daß K im Fall ord $(K) > k$ noch mindestens einen zweiten Scheitel hat.[3]

A. Vorbereitungen[4]

Unser Operationsbereich ist der k-dimensionale, reelle, projektive Raum P^k $(k \geqq 2)$.

Für jede Punktmenge $M \subseteqq P^k$ bezeichne $|M|$ die Anzahl der Punkte von $M: 0 \leqq |M| \leqq \infty$ und $L(M)$ die lineare Hülle von M. Die (lineare) Ordnung von M, in Zeichen ord (M), ist die kleinste ganze Zahl $m \leqq \infty$ mit $|M \cap L| \leqq m$ für jede Hyperebene L. Ist x ein Punkt von M, so

---

[1] A. F. Möbius, „Über die Grundformen der Linien dritter Ordnung", Abh. Akad. Sächs. Wiss., Math.-Phys. Kl. 1 (1852), 1–82. Ges. Werke Bd. 2, 89–176 (sp. 108). Erster Beweis bei A. Kneser, „Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Curven", Math. Ann. 41 (1893), 349–376.

[2] J. Hjelmslev, „Ein Satz über monotone Raumkurven im R_n ...", Acta Math. 87 (1952), 59–82. (Aus dem Nachlaß herausgegeben.)

[3] Wir haben Schwierigkeiten, den Beweisüberlegungen l. c.[2] im einzelnen zu folgen, insbesondere was die verwendeten Tangentialhalbebenen betrifft. Wir führen unseren Beweis nach dem Konzept l. c.[2], vermeiden jedoch die Verwendung der Halbebenen.

[4] Vgl. O. Haupt u. H. Künneth, „Geometrische Ordnungen", Springer-Verlag 1967, Teil II.

ist die *Ordnung* von M in x, in Zeichen ord $(x; M)$, das Minimum von ord $(U \cap M)$ für alle Umgebungen U von x. Es ist ord $(x; M) \leqq$ ord $(M) \leqq \infty$ für alle Punkte $x \in M$.

Unter einer Kurve bzw. einem Bogen verstehen wir das topologische Bild eines Kreises bzw. einer abgeschlossenen Strecke. Ist $B = B[p, q]$ ein Bogen mit den Randpunkten p und q, so ist $\underline{B} = B(p, q)$ der größte offene Teilbogen von B.

Nun sei K eine Kurve im P^k. Dann ist ord $(x; K) \geqq k$ für jeden Punkt $x \in K$. Ein Punkt x von K heißt ein *Scheitel* von K, wenn ord $(x; K) > k$ ist.

Eine h-Ebene L^h $(h = 1, \ldots, k-1)$, d. h. ein h-dimensionaler Teilraum von P^k, heißt eine *h-Paratingente* (oder eine h-Schmiegebene) von K im Punkt $x \in K$, in Zeichen $S^h(x)$, wenn L^h der Limes einer Folge (L^h_n), $n = 1, 2, \ldots$, von h-Ebenen $L^h_n = L(x_{0,n}, \ldots, x_{h,n})$, aufgespannt durch Punkte $x_{0,n}, \ldots, x_{h,n} \in K$ mit $x_{0,n}, \ldots, x_{h,n} \to x$ ist. Wir setzen noch $S^{-1}(x) := \emptyset$ und $S^0(x) := \{x\}$. Die Kurve heiße *glatt*, wenn in jedem Punkt $x \in K$ für jedes $h = 1, \ldots, k-1$ genau eine Paratingente $S^h(x)$ existiert. Es gilt dann $S^0(x) \subset S^1(x) \subset \ldots \subset S^{k-1}(x)$.

Eine $(k-2)$-Ebene L^{k-2} heißt eine *k-Sekante* von K, wenn es Punkte $x_1, \ldots, x_s \in K$ (verschieden, wenn $s > 1$) mit Paratingenten $S^{h_1}(x_1), \ldots, S^{h_s}(x_s)$ gibt derart, daß

$$h_1 + \ldots + h_s + s \geqq k \text{ und } S^{h_1}(x_1), \ldots, S^{h_s}(x_s) \subset L^{k-2}.$$

Die Kurve K sei glatt und habe keine k-Sekanten. Es sei x_0 ein Punkt von K; P^l ein Teilraum von P^k $(1<l<k)$, fremd zu $Z := S^{k-l-1}(x_0)$; π die Projektion aus Z in den P^l; $K' := \pi(K)$ und $x' := \pi(x)$. Dann gilt:

(a) π ist auf $P^k \setminus Z$ stetig; $\pi \mid K$ eine Injektion, also K' eine Kurve;

(b) K' ist glatt und hat keine l-Sekanten;

(c) $\pi(S^h(x)) = S^h(x')$, wenn $Z \cap S^h(x) = \emptyset$;
$P^l \cap S^h(x)) = S^{h+l-k}(x')$, wenn $Z \subseteqq S^h(x)$;

(d) ist ord $(K) = k$, so ist ord $(K') = l$;

(e) ist $l = k-1$ und ord $(x_0; K) = k$, so ist ord $(x'_0; K') = k-1$;

(f) ist $l = k-1$ und $x \neq x_0 \notin S^{k-1}(x)$, so ist ord $(x'; K') = k-1$.

Beweis. (a) – (c) trivial. – (d) Angenommen: ord $(K') > l$. Dann existiert eine $(l-1)$-Ebene $L^{l-1} \subset P^l$, aufgespannt durch Punkte y'_1,

…, $y'_{l+1} \in K'$. Weil K' keine l-Sekanten hat, kann L^{l-1} so gewählt werden, daß $y'_1, \ldots, y'_{l+1}$ Schnittpunkte und $\neq x'_0$ sind. Die Urbilder $y_1, \ldots, y_{l+1}$ in K sind dann Schnittpunkte von K und $L\,(Z \cup L^{l-1})$ und sind $\neq x_0$. Für $k-l$ Punkte $x_1, \ldots, x_{k-l}$ von K, hinreichend nahe bei x_0, enthält die Hyperebene L durch $x_1, \ldots, x_{k-l}, y_1, \ldots, y_l$ noch einen $(k+1)$-ten Punkt, nahe bei y_{l+1}. Widerspruch zu ord $(K) = k$. – (e) Analog zu (d). – (f) Angenommen: ord $(x'; K') > k-1$. Dann existiert eine $(k-2)$-Ebene $L^{k-2} \subset P^{k-1}$, aufgespannt durch $x'_1, \ldots, x'_k \in K'$, beliebig nahe bei x'. Die Urbilder $x_1, \ldots, x_k$ in K, zusammen mit x_0, spannen eine $(k-1)$-Ebene L^{k-1} auf. Für $x_1, \ldots, x_k \to x$ gilt dann $L^{k-1} \to S^{k-1}(x)$. Es folgt $x_0 \in S^{k-1}(x)$. Widerspruch zur Voraussetzung.

Analog für Bogen.

B. Hjelmslev-Bogen

Im P^k liege vor ein glatter Bogen $B = B\,[p, q]$ ohne k-Sekanten. Wir nennen B einen *Hjelmslev-Bogen*, wenn:

(1_q) ord $(q; B) = k$;

(2_q) $S^{k-1}(q) \cap B = \{p, q\}$;

(3_q) es existiert eine Hyperebene $L \supset S^{k-2}(q)$ mit $L \cap B = \{q\}$.

Es folgt:

(4) B ist beschränkt.

Denn durch eine beliebig kleine Drehung von L um eine den Punkt q nicht enthaltende $(k–2)$-Ebene $\subset L$ kann L übergeführt werden in eine Hyperebene L_u mit $L_u \cap B = \emptyset$.

(5) ord $(B) > k$.

Denn ist q' ein zu q hinreichend benachbarter Punkt von B, so hat die Hyperebene $L' := L(\{q'\} \cup S^{k-2}(q))$ zufolge (4) mit B noch mindestens einen Punkt $p' \neq q'$ gemein. Sind nun $q_1, \ldots, q_{k-1}$ Punkte von B, hinreichend benachbart zu q, so hat die Hyperebene $L(\{q_1\} \cup \ldots \cup \{q_{k-1}\} \cup \{q'\})$ mit B noch einen $(k+1)$-ten (zu p' benachbarten) Punkt gemein.

Hilfssatz 1. In jedem Hjelmslev-Bogen $B = B[p, q]$ gilt für jeden Punkt $y_0 \in \underline{B}$, welcher nahe genug bei q liegt: Zu jedem Punkt $y \in B(y_0, q)$ existiert ein Punkt $x \in B(p, y)$ derart, daß $B[x, y]$ ein Hjelmslev-Bogen ist.

Beweis. Für $k = 2$ ist die Behauptung trivial. Wir machen die Induktionsvoraussetzung, daß sie richtig ist für $k-1$ statt k.

(1_y). Aus (1_q) folgt ord $(y; B) = k$ für jeden zu q hinreichend benachbarten Punkt $y \in \underline{B}$ und sodann ord $(y; B[x, y]) = k$ für jeden Punkt $x \in B(p, y)$.

(2_y). 1. Schritt. Wir projizieren aus q in einen $P^{k-1} \subset P^k$, welcher q nicht enthält. Zufolge A, $(a)-(d)$ mit B statt K ist das Bild B' von B ein Hjelmslev-Bogen im P^{k-1}. Also können wir die Induktionsvoraussetzung auf B' anwenden. Demzufolge gilt für jeden Punkt $y_0' \in \underline{B}'$, welcher nahe genug bei q' liegt: erstens existiert zu jedem Punkt $y' \in B'(y_0', q')$ ein Punkt $z' \in B'(p', y')$ derart, daß $S^{k-2}(y') \cap B'[z', y'] = \{z', y'\}$ ist; zweitens existiert eine $(k-2)$-Ebene $L' \supset S^{k-3}(y')$ im P^{k-1} mit $L' \cap B' = \{y'\}$. Dies liefert unter Verwendung von A, (b) mit B statt K: Erstens hat jeder Punkt $y_0 \in \underline{B}$, hinreichend nahe bei q, die Eigenschaft, daß zu jedem Punkt $y \in B(y_0, q)$ ein Punkt $z \in B(p, y)$ derart existiert, daß

(6) $\quad L(\{q\} \cup S^{k-2}(y)) \cap B[z, y] = \{z, y\};$

zweitens gilt:

(7) es existiert eine Hyperebene $L \supset S^{k-3}(y)$ mit $L \cap B[z, y] = \{y\}$.

2. Schritt. Wir wählen einen Punkt $y \in B(y_0, q)$ und projizieren aus $S^{k-3}(y)$ in einen dazu fremden $P^2 \in P^k$. Dann gilt, wenn y_0 nahe genug bei q liegt:

(8) das Bild B'' von B in P^2 ist ein glatter Bogen (zufolge A, $(a)-(b)$ mit B statt K);
(9) $B''[y_0'', q'']$ ist konvex (wegen (1_q) zufolge A, (d) mit B statt K);
(10) für die Gerade G durch z'' und y'' ist $G \cap B''[z'', y''] = \{z'', y''\}$ (denn es ist $G = L(\{q\} \cup S^{k-2}(y)) \cap P^2$ und es gilt (6));
(11) es existiert eine Gerade H durch y'' mit $H \cap B''[z'', y''] = \{y''\}$ (dies leistet $H := L \cap P^2$, wobei L wie in (7) gewählt wird).

Aus (11) folgt, daß $B''[z'', y'']$ beschränkt ist; denn wegen (9) können wir H durch eine beliebig kleine Drehung um einen Punkt $\neq y''$ von H in eine zu $B''[z'', y'']$ fremde Gerade überführen. Sodann folgt aus (9) und (10), daß die Tangente $S^1(y'')$ an B'' im Punkt y'' den Bogen $B''(z'', y_0'')$ trifft. Wegen $S^1(y'') = S^{k-1}(y) \cap P^2$ trifft daher $S^{k-1}(y)$ den Bogen $B(z, y_0)$. Schließlich sei x der dem Punkt y auf $B(z, y_0)$ nächstgelegene Punkt von $S^{k-1}(y) \cap B(z, y)$. Dann gilt $S^{k-1}(y) \cap B[x, y] = \{x, y\}$.

(3_y). Für die Hyperebene $L := L(S^{k-3}(y) \cup H)$ gilt $L \supset S^{k-2}(y)$ und $L \cap B[x, y] = \{y\}$.

Hilfssatz 2. Es sei $(B_n)_{n \in N}$ eine monoton fallende Folge von Hjelmslev-Bogen $B_n = B[p_n, q_n]$ im glatten Bogen B ohne k-Sekanten. Der Durchschnitt $\cap B_n$ sei mehrpunktig, also ein Bogen $B_0^\star = B[p_0^\star, q_0]$. Es sei $\operatorname{ord}(q_0; B) = k$. Dann enthält $B_0^\star$ einen Hjelmslev-Bogen $B_0 = B[p_0, q_0]$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt (1_{q_0}). – Wegen $p_n \in S^{k-1}(q_n)$ für alle n und wegen der Stetigkeit von S^{k-1} gilt $p_0^\star \in S^{k-1}(q_0)$. Es sei p_0 der dem Punkt $p_0^\star$ auf B am nächsten gelegene Punkt von $S^{k-1}(q_0) \cap B_0^\star$. Dann gilt ($2_{q_0}$). – Nach ($3_{q_1}$) ist B_1 enthalten in einem affinen Raum $R^k \subset P^k$. Wegen (3_{q_n}) existiert im P^k für jedes n eine Hyperebene L_n mit $S^{k-2}(q_n) \subset L_n \subset S^{k-1}(q_n)$ derart, daß für einen der vier räumlichen Winkel, in welche $R^k \setminus (S^{k-1}(q_n) \cup L_n)$ zerfällt, er heiße W_n, folgendes gilt: es ist $B_n \subset \overline{W}_n$, $(B_n \setminus \{q_n\}) \cap L_n \neq \emptyset$; alle Punkte $\neq q_n$ von $B_n \cap L_n$ sind Stützpunkte. Einer der Punkte von $(B_n \setminus \{q_n\}) \cap L_n$ heiße s_n. Indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge der n übergehen, können wir annehmen, daß die Folge der L_n gegen eine Hyperebene L_0 und die Folge der s_n gegen einen Punkt s_0 konvergiert. Dann gilt zunächst $S^{k-2}(q_0) \subset L_0$ und $s_0 \in B_0 \cap L_0$. Weil $\operatorname{ord}(q_0; B) = k$ und jeder Punkt s_n Stützpunkt ist, gilt $s_0 \neq q_0$. Weil B keine k-Sekanten hat, ist weiter $s_0 \notin S^{k-2}(q_0)$. Wegen (2_{q_0}) ist endlich $s_0 \notin S^{k-1}(q_0)$. Es folgt $L_0 \neq S^{k-1}(q_0)$. Also gilt für einen der vier räumlichen Winkel, in welche $R^k \setminus (S^{k-1}(q_0) \cup L_0)$ zerfällt, er heiße W_0 und es ist $\overline{W}_0 = \lim W_n$, folgendes: es ist $B_0 \subset \overline{W}_0$; $(B_0 \setminus \{q_0\}) \cap L_0 \neq \emptyset$; alle Punkte $\neq q_0$ von $B_0 \cap L_0$ sind Stützpunkte. Folglich können wir L_0 durch eine beliebig kleine Drehung um $S^{k-2}(q_0)$ überführen in eine Hyperebene $L \supset S^{k-2}(q_0)$ mit $L \cap B_0 = \{q_0\}$. Es gilt also auch (3_{q_0}).

Hilfssatz 3. Es sei K eine glatte Kurve im P^k ohne k-Sekanten. Es sei q ein Punkt von K mit ord $(q; K) = k$. Die Hyperebene $S^{k-1}(q)$ habe mit K noch mindestens einen Punkt $\neq q$ gemein. Dann enthält K einen Hjelmslev-Bogen $B[p, q]$.

Beweis. Es seien p_1 und p_2 die beiden dem Punkt q am nächsten gelegenen Punkte $\neq q$ von K, die auf $S^{k-1}(q)$ liegen (es kann $p_1 = p_2$ sein). Von den beiden Teilbogen von K mit $\underline{B}_1 \cap \underline{B}_2 = \emptyset$, dem gemeinsamen Endpunkt q und den Anfangspunkten p_1 und p_2 behaupten wir, daß (mindestens) einer von ihnen ein Hjelmslev-Bogen ist. – Die Bedingungen (1_q) und (2_q) sind für beide Bogen B_1 und B_2 erfüllt. Es ist also nur zu zeigen, daß (3_q) für mindestens einen von ihnen gilt. Und hierzu genügt es zu zeigen: Es gibt eine Hyperebene $L \supset S^{k-2}(q)$ derart, daß $B_1 \cap L = \{q\}$ oder $B_2 \cap L = \{q\}$ ist. Die Projektion aus $S^{k-3}(q)$ in einen dazu fremden $P^2 \subset P^k$ führt diese Aufgabe auf den Fall $k = 2$ zurück. Es sei also $k = 2$. – Wir machen die Annahme, daß jede Gerade $\neq S^1(q)$ durch q sowohl mit B_1 als auch mit B_2 einen Punkt $\neq q$ gemein hat. Um zu einem Widerspruch zu kommen, führen wir in der affinen Ebene $R^2 := P^2 \setminus S^1(q)$ mit der „uneigentlichen" Geraden $S^1(q)$ affine Koordinaten x, y ein derart, daß q der „uneigentliche" Punkt der x-Achse ist. Zufolge der Annahme hat einerseits jede Parallele zur y-Achse sowohl mit $\underline{B}_1$ als auch mit $\underline{B}_2$ einen nichtleeren Durchschnitt. Da aber q nach A, (d) mit B statt K ein Konvexpunkt von $B_1 \cup B_2$ ist, so gilt (nach eventueller Vertauschung der Nummern 1 und 2) anderseits zweierlei: Für jedes hinreichend große $c > 0$ hat die Gerade $x = c$ mit $\underline{B}_1$ genau einen Punkt (c, y_1) gemein und für jeden Punkt $(c, y_2) \in \underline{B}_2$ ist $y_1 < y_2$; für jedes $c < 0$ mit hinreichend großem $|c|$ hat die Gerade $x = c$ mit $\underline{B}_2$ genau einen Punkt (c, y_2) gemein und für jeden Punkt $(c, y_1) \in \underline{B}_1$ ist $y_2 < y_1$. Hieraus folgt $\underline{B}_1 \cap \underline{B}_2 \neq \emptyset$, im Widerspruch zur Wahl von B_1 und B_2.

C. Scheitelsätze

Satz 1. *Ist B ein Hjelmslev-Bogen im P^k, so existiert in $\underline{B}$ ein Scheitel von B.*

Beweis. Angenommen, es wäre ord $(x; B) = k$ für jeden Punkt $x \in \underline{B}$. Dann folgt aus den Hilfssätzen 1 und 2 die Existenz einer Folge (B_n), $n = 1, 2, \ldots$, von Hjelmslev-Bogen $B_n = B[p_n, q_n]$ mit $B_{n+1} \subset \underline{B}_n$ für jedes n, welche sich auf einen Punkt $\xi \in \underline{B}$ zusammenzieht. Nach (5) folgt ord $(\xi; B) > k$.

Satz 2. *Es sei K eine glatte Kurve ohne k-Sekanten im P^k. Ist ord $(K) > k$, so hat K mindestens einen Scheitel* (J. Hjelmslev).

Beweis. Ist ord $(K) = \infty$, so ist die Behauptung trivial (auch dann, wenn K nicht glatt ist und (oder) k-Sekanten hat). Sei also ord $(K) < \infty$. Wir beweisen durch Induktion. $k = 2$. Zunächst zeigen wir die Existenz eines Punktes q in K derart, daß die Paratingente $S^1(q)$ mit K noch mindestens einen Punkt $\neq q$ gemein hat. Wegen ord $(K) > 2$ existiert eine Gerade, welche mit K mindestens drei verschiedene Punkte x_1, x_2, x_3 gemein hat. Ist x_1 kein Punkt q, so sei B der den Punkt x_1 nicht enthaltende Bogen $\subset K$ mit den Randpunkten x_2 und x_3. Weiter sei π die Projektion aus x_1 in eine x_1 nicht enthaltende Gerade $P^1 \subset P^2$. Dann ist erstens $\pi(x_2) = \pi(x_3)$. Zweitens ist $\pi(x_1) \notin \pi(B)$; weil $\pi(B)$ mehrpunktig ist wegen ord $(B) < \infty$, so ist also $\pi(B) =: B'$ ein Bogen $\subset P^1$. Ist nun q' ein Randpunkt $\neq \pi(x_2) = \pi(x_3)$ von B', so hat der Punkt $q \in \underline{B}$ mit $\pi(q) = q'$ die verlangte Eigenschaft. Nach Hilfssatz 3 enthält nun K einen Hjelmslev-Bogen und dieser nach Satz 1 einen Scheitel. – $k > 2$. Wegen ord $(K) > k$ existiert eine Hyperebene, welche mit K mindestens $k + 1$ verschiedene Punkte $p, \ldots$ gemein hat. Wir projizieren K aus p in einen p nicht enthaltenen $P^{k-1} \subset P^k$. Das Bild K' von K ist nach A, (a)–(d) eine glatte Kurve ohne $(k-1)$-Sekanten und mit ord $(K') > k-1$. Zufolge der Induktionsvoraussetzung existiert in K' ein Punkt q' mit ord $(q'; K') > k-1$. Nach A, (e) ist ord $(p'; K') = k-1$, also $p' \neq q'$. Für das Urbild q von q' in K gilt dann $p \in S^{k-1}(q)$ nach A, (f). Nach Hilfssatz 3 folgt weiter, daß K einen Hjelmslev-Bogen enthält, und sodann nach Satz 1, daß es in K einen Scheitel gibt.

Korollar. *K hat mindestens zwei Scheitel.*

Beweis durch Induktion. $k = 2$. Es sei x_0 ein fester Punkt von K; kein Punkt $x \neq x_0$ von K sei ein Scheitel. Nach Satz 2 genügt es zu zeigen, daß dann auch x_0 kein Scheitel ist. Für jede Gerade $G \subset P^2$ durch x_0 gilt: 1) kein Punkt $x \neq x_0$ von $G \cap K$ ist ein Häufungspunkt von $G \cap K$; denn jeder solche Häufungspunkt wäre ein Scheitel von K; 2) kein Punkt $x \neq x_0$ von G ist Stützpunkt von G und K; denn jeder solche Stützpunkt würde nach Hilfssatz 3 und Satz 1 einen Scheitel $\neq x_0$ liefern. Für jede Gerade G durch x_0 ist also 3) jeder Punkt $\neq x_0$ von $G \cap K$ ein Schnittpunkt von G und K. Es sei nun π die Projektion von K aus x_0 in eine x_0 nicht enthaltende Gerade $H \subset P^2$. Wegen 3) ist π in jedem Punkt $\neq x_0$ von K lokal eineindeutig. Auf $H \setminus (\pi(x_0))$ ist daher die (endliche) Anzahl der π-Urbilder konstant. Folglich ist π auch im Punkt x_0 lokal eineindeutig. Somit ist 4) x_0 ein Stützpunkt von $S^1(x_0)$ und K. Nun ist jeder hinreichend kleine offene Teilbogen von K mit x_0 als Anfangs- oder Endpunkt x_0 konvex, weil er keinen Scheitel enthält. Hieraus und aus 4) folgt, daß x_0 kein Scheitel ist, was zu zeigen war. – $k > 2$. Es existiert ein Hjelmslev-Bogen $B = B[p, q] \subset K$ mit einem Scheitel $r \in B(p, q)$ (vgl. den Beweis von Satz 2). Wir projizieren aus r in einen r nicht enthaltenden $P^{k-1} \subset P^k$. Angenommen, es wäre bereits bewiesen, daß für das Bild K' von K gilt ord $(K') > k-1$. Nach Induktionsvoraussetzung hat K' einen Scheitel $t' \neq r'$. Für das Urbild t in K von t' gilt $t \neq r \in S^{k-1}(t)$. Ist t ein Scheitel, so sind wir fertig. Ist aber ord $(t; K) = k$, so enthält K nach Hilfssatz 3 einen Hjelmslev-Bogen $B[s, t]$ mit $r \notin B(s, t)$. Nach Satz 1 enthält $B(s, t)$ einen Scheitel von K.

Es ist nun noch zu zeigen, daß ord $(K') > k-1$ ist. Wir setzen $L(\{r\} \cup S^{k-2}(q)) =: L$ und untersuchen folgende drei Fälle.

1. Fall: $|L \cap K| = \infty$. Für $L' := L \cap P^{k-1}$ ist dann $|L' \cap K'| = \infty$ und folglich ord $(K') = \infty$.

2. Fall: r ist ein Schnittpunkt von $B(p, q)$ und L. Weil $r \in B(p, q)$, wegen (2_q) also $r \notin S^{k-1}(q)$ ist, existiert wegen (3_q) noch ein weiterer Schnittpunkt s von $B(p, q)$ und L. Ist nun $\bar{q}$ ein zu q hinreichend benachbarter Punkt von K, so schneidet die Hyperebene $L(\{r\} \cup \{\bar{q}\} \cup S^{k-3}(q))$ den Bogen $B(p, q)$ in einem zu s beliebig benachbarten Punkt $\bar{s}$. Der Durchschnitt dieser Hyperebene mit P^{k-1} ist wegen

A, (*b*) die $(k-2)$-Ebene $L(\{\bar{q}'\} \cup S^{k-3}(q'))$ und schneidet K' im Punkt $\bar{s}'$. Sind schließlich $q'_1, \ldots, q'_{k-2}$ Punkte von K', hinreichend benachbart zu q', so schneidet die $(k-2)$-Ebene durch $\bar{q}'$ und die $k-2$ Punkte die Kurve K' in einem zu $\bar{s}'$ beliebig benachbarten Punkt. Sie hat also mit K' mindestens k Punkte gemein.

3. Fall: r ist ein Stützpunkt von $B(p, q)$ und L. Nun ist $S^1(r) \cap S^{k-3}(q) = \emptyset$, weil K keine k-Sekanten hat, also $S^1(r) \not\subset L(\{r\} \cup S^{k-3}(q))$. Ist daher $\bar{q} \neq q$ ein Punkt von B, hinreichend benachbart zu q, so schneidet $L(\{r\} \cup \{\bar{q}\} \cup S^{k-3}(q))$ den Bogen $B(p, q)$ in einem zu s beliebig benachbarten Punkt $\bar{s}$ (dies zeigt die Projektion aus $S^{k-3}(q)$ in einen dazu fremden P^2). Nun weiter wie im 2. Fall.

Beispiele von Kurven K im P^k von der Ordnung $k+2$, glatt, ohne k-Sekanten, mit genau 2 Scheiteln.

$k=2$. K eine stetig differenzierbare Jordan-Kurve in der euklidischen Ebene, von der Ordnung 4, mit 2 Wendepunkten.

$k=3$. Der P^3 sei dargestellt als der projektive Abschluß des euklidischen $x_1x_2x_3$-Raumes R^3. Die Punkte $y = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ von K seien definiert durch:

$$x_1 = \cos t,\ x_2 = \sin t,\ x_3 = tg^3(t/2) - a\, tg(t/2)$$
$$(-\pi < t < \pi;\ 1 < a \text{ fest} < 6).$$

Genau ein Punkt y_0 von K in der uneigentlichen Ebene $P^3 \setminus R^3$. (In allen Punkten $y \in R^3$ von K ist K glatt, weil y' und y'' linear unabhängig sind. Die Funktionaldeterminante verschwindet in genau zwei Punkten $y_1, y_2 \in R^3$ von K; also ist K in allen anderen Punkten $y \in R^3$ von der Ordnung 3. Jede hinreichend kleine, vordere oder hintere Umgebung in K von y_0 hat die Ordnung 3, weil es andernfalls darin Scheitel $\neq y_0$ gäbe nach dem Kontraktionssatz l. c. [4]), S. 47; hieraus folgt nach l. c. [4]), S. 257, 3. Satz, daß K im Punkt y_0 die Ordnung 3 hat und nach l. c. [4]). S. 262, daß K im Punkt y_0 glatt ist. Folglich sind y_1 und y_2 die einzigen Scheitel von K.)