BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1988

MÜNCHEN 1989

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über eine einparametrige Familie von Mittelwerten II

Von **Horst Alzer** in Waldbröl

Vorgelegt von F. L. Bauer am 6. 5. 1988

Herrn Professor Dr. Heinz Bauer zum 60. Geburtstag gewidmet

1. Gegenstand dieser Arbeit ist die für positive reelle Zahlen x und y (mit $x \neq y$) sowie für reelle Parameter r definierte Funktionenschar:

$$F_r(x, y) = \frac{r}{r+1} \; \frac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r}, \quad r \neq 0, -1,$$

$$F_0(x, y) = \frac{x - y}{\ln(x) - \ln(y)},$$

$$F_{-1}(x, y) = xy \, \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y}.$$

Durch stetige Ergänzung können wir $F_r(x, y)$ auch für $x = y$ definieren:

$$F_r(x, x) = \lim_{y \to x} F_r(x, y) = x.$$

Einfache Rechnungen zeigen, daß $F_r(x, y)$ folgende Eigenschaften besitzt:

$$\lim_{r \to -\infty} F_r(x, y) = \min(x, y) \leq F_r(x, y) \leq \max(x, y) = \lim_{r \to \infty} F_r(x, y),$$

$$a\,F_r(x, y) = F_r(ax, ay) \quad \text{für } a > 0,$$

$$F_r(x, y) = F_r(y, x);$$

somit handelt es sich bei $F_r(x, y)$ um eine einparametrige Familie von homogenen symmetrischen Mittelwerten, die neben den drei klassischen Mittelwerten: dem **arithmetischen,** dem **geometrischen** und dem **harmonischen** Mittel von x und y ($r = 1, -½, -2$) auch das bei einer Reihe von physikalischen, chemischen und wirtschaftswissenschaftlichen Fragen bedeutsame **logarithmische** Mittel $F_0(x, y)$ enthält.

Der folgende (später mehrfach benötigte) Monotoniesatz ist zuerst von K. B. Stolarsky [17] bewiesen worden:

$$\text{Wenn } x \neq y \text{ und } r < s, \text{ dann gilt: } F_r(x, y) < F_s(x, y). \tag{1.1}$$

$F_r(x, y)$ ist ein Spezialfall der zweiparametrigen Mittelwertfamilie

$$E(r, s; x, y) = \left[\frac{r}{s}\,\frac{x^s - y^s}{x^r - y^r}\right]^{1/(s-r)},$$

die erstmals im Jahre 1938 von R. Cisbani [6] in die mathematische Literatur eingeführt und seither von mehreren Autoren, insbesondere von E. B. Leach und M. C. Sholander [11–13], intensiv untersucht wurde.

Auf Grund der Identität

$$L_r(x, y) = F_r(x^2, y^2)/F_r(x, y)$$

steht $F_r(x, y)$ in enger Beziehung zu der einparametrigen Mittelwertfamilie

$$L_r(x, y) = \frac{x^{r+1} + y^{r+1}}{x^r + y^r},$$

für die H. W. Gould und M. E. Mays [9] die Bezeichnung **Lehmer** Mittel gewählt haben.

$L_r(x, y)$ enthält – ebenso wie $F_r(x, y)$ – das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel von x und y ($r = 0, -½, -1$), und dies sind, wie in [9] bewiesen wurde, die einzigen Mittelwerte, die beiden Familien: $F_r(x, y)$ und $L_r(x, y)$ angehören. Eine ausführliche Behandlung der Mittelwertfamilie $L_r(x, y)$ findet man in [2], [5], [7–9], [14].

In einer Note mit dem Titel „Über eine einparametrige Familie von Mittelwerten“ ist gezeigt worden, wie sich die Doppelungleichung zwischen dem geometrischen, dem logarithmischen und dem arithmetischen Mittel:

$$F_{-1/2}(x, y) < F_0(x, y) < F_1(x, y), \quad x \neq y,$$

mit Hilfe von $F_r(x, y)$ verschärfen läßt; für alle x und y mit $x \neq y$ und für alle $r \neq 0$ gilt:

$$F_{-1/2}(x, y) < \sqrt{F_r(x, y)\, F_{-r}(x, y)} < F_0(x, y)$$
$$< \tfrac{1}{2}\,(F_r(x, y) + F_{-r}(x, y)) < F_1(x, y).$$

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die in [1] begonnenen Untersuchungen über $F_r(x, y)$ fortzusetzen und einige neue Ungleichungen für $F_r(x, y)$ zu beweisen.

In der Theorie der Mittelwerte spielt das für positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ und für reelle Parameter r definierte **Potenz** Mittel

$$M_r(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{1/r}, \quad r \neq 0,$$

$$M_0(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{r \to 0} M_r(x_, \ldots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n},$$

eine besondere Rolle. Keine andere Mittelwertfamilie ist in der Vergangenheit so gut untersucht worden, wie das Potenz Mittel. Die Zahl der Veröffentlichungen zu diesem Thema ist sehr groß; insbesondere findet man eine Reihe von interessanten Ungleichungen [3], [10], [15], [16].

Einige besonders bemerkenswerte Ungleichungen, die von H. Minkowski (1864–1909), P. L. Tschebyscheff (1821–1894) und A. M. Lyapunov (1857–1918) für das Potenz Mittel bewiesen wurden und mittlerweile zum klassischen Bestand der Theorie der Ungleichungen gehören, haben zu der Frage geführt: Lassen sich analoge Ergebnisse auch für die Mittelwerte $F_r(x, y)$ formulieren und beweisen?

In den nachfolgenden Zeilen geben wir eine Antwort auf diese Frage.

Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein:

$$R_+^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid 0 < x_i \in \boldsymbol{R}, \quad i = 1, \ldots, n\};$$

für zwei Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}_+^n$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \boldsymbol{R}_+^n$ definieren wir Summe und Produkt durch

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{und} \quad xy = (x_1y_1, \ldots, x_ny_n).$$

2. Zwei reellwertige Funktionen f und g, die denselben Definitionsbereich D haben, heißen **miteinander vergleichbar,** wenn entweder

$$f(x) \leq g(x) \qquad \text{für alle } x \in D$$

oder

$$f(x) \geq g(x) \qquad \text{für alle } x \in D.$$

In seinem im Jahre 1896 erschienenen berühmten Buch „Geometrie der Zahlen“ hat H. Minkowski gezeigt, daß die beiden Funktionen $M_r(x+y)$ und $M_r(x) + M_r(y)$ im Falle $r > 1$ miteinander vergleichbar sind:

Für alle Vektoren $x \in \boldsymbol{R}_+^n$ und $y \in \boldsymbol{R}_+^n$ und für alle reellen Zahlen $r > 1$ gilt:

$$M_r(x+y) \leq M_r(x) + M_r(y). \tag{2.1}$$

Aber auch für $r < 1$ lassen sich $M_r(x+y)$ und $M_r(x) + M_r(y)$ miteinander vergleichen. In diesem Fall muß in (2.1) das Zeichen „$\leq$“ durch „$\geq$“ ersetzt werden. Das Gleichheitszeichen gilt jeweils genau dann, wenn die Vektoren x und y proportional sind.

Für diese Aussagen gibt es sowohl zahlreiche Beweise als auch diverse Varianten und Verallgemeinerungen; siehe [3], [10], [15], [16].

Wir wollen nun das folgende Gegenstück zu (2.1) beweisen.

Satz 2.1. Für alle Vektoren $x \in \boldsymbol{R}_+^2$ und $y \in \boldsymbol{R}_+^2$ gilt:

$$F_r(x+y) \leq F_r(x) + F_r(y), \quad \text{wenn} \quad r \geq 1, \tag{2.2}$$

$$F_r(x+y) \geq F_r(x) + F_r(y), \quad \text{wenn} \quad r \leq 1. \tag{2.3}$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (2.2) und (2.3) genau dann, wenn $r = 1$ oder wenn x und y proportional sind.

Beweis. Eine einfache Rechnung zeigt: Wenn $r = 1$ oder wenn x und y proportional sind, dann gilt

$$F_r(x+y) = F_r(x) + F_r(y).$$

Wir nehmen nun an, $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, x_2)$ seien nicht proportional und bezeichnen mit A_1, A_2 und G_r die im Intervall $[0,1]$ definierten Funktionen

$$A_i(t) = t\,x_i + (1-t)\,y_i,\ i = 1, 2,$$

und

$$G_r(t) = F_r(t\,x + (1-t)\,y) = F_r(A_1(t), A_2(t)).$$

Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß $G_r(t)$ (bezüglich t) im Intervall $[0,1]$ streng konvex (bzw. streng konkav) ist, wenn $r > 1$ (bzw. $r < 1$).

Dann folgt für $r > 1$ (bzw. $r < 1$):

$$G_r(1/2) < \tfrac{1}{2}\,(G_r(0) + G_r(1)), \quad \text{d.h.: } F_r(x+y) < F_r(x) + F_r(y),$$

$$(\text{bzw. } G_r(1/2) > \tfrac{1}{2}\,(G_r(0) + G_r(1)), \quad \text{d.h.: } F_r(x+y) > F_r(x) + F_r(y)).$$

Wir setzen: $B_i = x_i - y_i$, $i = 1, 2$, und differenzieren $G_r(t)$ zweimal nach t; dann erhalten wir (nach einer Reihe von elementaren aber (leider) sehr mühsamen Zwischenrechnungen) im Falle $A_1(t) \neq A_2(t)$ (wenn wir abkürzend $A_i = A_i(t)$, $i = 1, 2$, schreiben):

$$G_r''(t) = \frac{r^2}{r+1}\,\frac{(A_1B_2 - A_2B_1)^2}{(A_1^r - A_2^r)^3}\,(A_1A_2)^{r-2}\,[(r-1)$$

$$(A_1^{r+1} - A_2^{r+1}) - (r+1)\,A_1A_2(A_1^{r-1} - A_2^{r-1})], \quad r \neq 0, -1,$$

sowie

$$G_0''(t) = 2\,(F_0(A_1, A_2) - F_1(A_1, A_2))\left[\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2\ln(A_1/A_2)}\right]^2,$$

$$G_{-1}''(t) = \frac{2}{A_1A_2}\,(F_{-1}(A_1, A_2) - F_1(A_1, A_2))\left[\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1 - A_2}\right]^2,$$

und im Falle $A_1(t) = A_2(t)$:

$$G_r''(t) = \frac{r-1}{6\,A_1}\,(B_1 - B_2)^2.$$

Da x und y nicht proportional sind, gilt:

$$A_1B_2 \neq A_2B_1;$$

somit erhalten wir im Falle $A_1 = A_2$ die Ungleichungen:

$$G_r''(t) > 0 \quad \text{für } r > 1$$

und

$$G_r''(t) < 0 \quad \text{für } r < 1.$$

Wir setzen nun $A_1 \neq A_2$ voraus. Nach dem Monotoniesatz (1.1) folgt

$$G_0''(t) < 0 \quad \text{und} \quad G_{-1}''(t) < 0. \tag{2.4}$$

Nun bestimmen wir das Vorzeichen von $G_r''(t)$ für $r \neq 0, -1$. Die Funktion

$$G_r''(t) = G_r''(A_1, A_2, B_1, B_2)$$

ist in A_1, A_2, B_1 und B_2 homogen vom Grade 1, d. h., es gilt für alle $c > 0$:

$$c\, G_r''(A_1, A_2, B_1, B_2) = G_r''(cA_1, cA_2, cB_1, cB_2);$$

folglich dürfen wir uns beim Beweis der beiden Ungleichungen:

$$G_r''(A_1, A_2, B_1, B_2) > 0 \quad \text{für} \quad r > 1$$

und

$$G_r''(A_1, A_2, B_1, B_2) < 0 \quad \text{für} \quad r < 1$$

auf den Fall $A_2 = 1$ beschränken.

Wir untersuchen nun die für $r \neq -1$ und $a > 0$ definierte Funktion

$$f(a) = f_r(a) = \frac{1}{r+1}\,[(r-1)(a^{r+1}-1) - (r+1)(a^{r-1}-1)\,a].$$

Eine kleine Rechnung ergibt:

$$f(1) = f'(1) = 0$$

und

$$f''(a) = r(r-1)\,a^{r-2}(a-1).$$

Hieraus folgt:
Wenn $r > 1$ oder $-1 \neq r < 0$, dann gilt:

$$0 < a < 1 \Rightarrow f(a) < 0\,,$$
$$1 < a \qquad \Rightarrow f(a) > 0\,,$$

und wenn $0 < r < 1$, dann gilt:

$$0 < a < 1 \Rightarrow f(a) > 0\,,$$
$$1 < a \qquad \Rightarrow f(a) < 0.$$

Bezeichnen wir mit g die für $r \neq 0$ und $0 < a \neq 1$ definierte Funktion

$$g(a) = g_r(a) = (a^r - 1)^{-3},$$

so erhalten wir:

Wenn $r > 0$, dann gilt:

$$0 < a < 1 \Rightarrow g(a) < 0,$$
$$1 < a \qquad \Rightarrow g(a) > 0,$$

und wenn $r < 0$, dann gilt:

$$0 < a < 1 \Rightarrow g(a) > 0,$$
$$1 < a \qquad \Rightarrow g(a) < 0.$$

Folglich gelten für

$$G_r''(t) = G_r''(A_1, 1, B_1, B_2) = f_r(A_1)\, g_r(A_1)\, (A_1B_2 - B_1)^2 r^2 A_1^{r-2}$$
$$\text{mit} \quad r \neq 0, -1 \quad \text{und} \quad A_1 \neq 1,$$

folgende Abschätzungen:

$$G_r''(t) > 0 \quad \text{für} \quad r > 1$$

und

$$G_r''(t) < 0 \quad \text{für} \quad r < 1,\ r \neq 0, -1.$$

Auf Grund von (2.4) gilt die Ungleichung

$$G_r''(t) < 0 \quad \text{für alle } r < 1.$$

Damit ist Satz 1.1 vollständig bewiesen. □

3. Im Gegensatz zu den beiden Funktionen $M_r(x+y)$ und $M_r(x) + M_r(y)$ sind $M_r(xy)$ und $M_r(x)\,M_r(y)$ nicht miteinander vergleichbar. Es gilt jedoch der folgende Satz:

Für alle Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}_+^n$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \boldsymbol{R}_+^n$

mit

$x_1 \leq \ldots \leq x_n$ und $y_1 \leq \ldots \leq y_n$

oder

$x_1 \geq \ldots \geq x_n$ und $y_1 \geq \ldots \geq y_n$

sowie für alle positiven reellen Zahlen r gilt:

$$M_r(xy) \geq M_r(x)\,M_r(y). \tag{3.1}$$

Falls

$x_1 \geq \ldots \geq x_n$ und $y_1 \leq \ldots \leq y_n$

oder

$x_1 \leq \ldots \leq x_n$ und $y_1 \geq \ldots \geq y_n$,

dann muß in (3.1) das Zeichen „$\geq$" durch „$\leq$" ersetzt werden.

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x_1 = \ldots = x_n$ oder $y_1 = \ldots = y_n$.

Dies ist die Tschebyscheffsche Ungleichung. Eine elegante Herleitung von (3.1) ist in [10] angegeben worden, wo man neben interessanten Verallgemeinerungen auch einige historische Anmerkungen zu dieser Ungleichung findet; siehe auch [15].

Für $F_r(x, y)$ gilt folgendes Analogon zur Ungleichung (3.1).

Satz 3.1. Für alle Vektoren $x = (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}_+^2$ und $y = (y_1, y_2) \in \boldsymbol{R}_+^2$ mit

$$x_1 \leq x_2 \quad \text{und} \quad y_1 \leq y_2 \quad \text{oder} \quad x_1 \geq x_2 \quad \text{und} \quad y_1 \geq y_2$$

gilt:

Wenn $r \geq -\frac{1}{2}$, dann

$$F_r(xy) \geq F_r(x)\,F_r(y) \tag{3.2}$$

und wenn $r \leq -\frac{1}{2}$, dann

$$F_r(xy) \leq F_r(x)\, F_r(y). \tag{3.3}$$

Falls

$$x_1 \leq x_2 \quad \text{und} \quad y_1 \geq y_2 \quad \text{oder} \quad x_1 \geq x_2 \quad \text{und} \quad y_1 \leq y_2,$$

dann gilt die Ungleichung (3.2) für alle $r \leq -\frac{1}{2}$ und die Ungleichung (3.3) für alle $r \geq -\frac{1}{2}$.

Das Gleichheitszeichen gilt in allen Fällen genau dann, wenn $r = -\frac{1}{2}$ oder wenn $x_1 = x_2$ oder $y_1 = y_2$.

Beweis. Ohne Schwierigkeiten zeigt man: Wenn $r = -\frac{1}{2}$ oder wenn $x_1 = x_2$ oder $y_1 = y_2$, dann gilt

$$F_r(xy) = F_r(x)\, F_r(y).$$

Im Folgenden beschränken wir uns darauf, die beiden Ungleichungen

$$F_r(xy) > F_r(x)\, F_r(y), \quad r > -\tfrac{1}{2},$$

und

$$F_r(xy) < F_r(x)\, F_r(y), \quad r < -\tfrac{1}{2},$$

für den Fall:

$$x_1 > x_2 \quad \text{und} \quad y_1 > y_2$$

zu beweisen. Die übrigen Fälle lassen sich auf analogem Weg behandeln.

Für positive reelle Zahlen x_1, x_2, y_1 und y_2 mit $x_1 > x_2$ und $y_1 > y_2$ bezeichnen wir mit f die für alle reellen r definierte Funktion:

$$f(r) = f(r;\, x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{cases} \ln \dfrac{r[(x_1 y_1)^r - (x_2 y_2)^r]}{(x_1^r - x_2^r)\,(y_1^r - y_2^r)}, & r \neq 0, \\[2ex] \ln \dfrac{\ln (x_1 y_1/x_2 y_2)}{\ln (x_1/x_2)\, \ln (y_1/y_2)}, & r = 0; \end{cases}$$

dann folgt:

$$\ln \frac{F_r(xy)}{F_r(x)\,F_r(y)} = f(r+1) - f(r). \tag{3.4}$$

Wir untersuchen nun das Monotonieverhalten von f im Intervall $[0, \infty)$. Setzen wir

$$a = x_1/x_2 \quad \text{und} \quad b = y_1/y_2,$$

dann erhalten wir für f folgende vereinfachte Darstellung:

$$f(r) = \begin{cases} \ln \dfrac{r[(ab)^r - 1]}{(a^r - 1)\,(b^r - 1)}, & r \neq 0, \\[2ex] \ln \dfrac{\ln(ab)}{\ln(a)\,\ln(b)}, & r = 0. \end{cases}$$

Differentiation von f ergibt für $r > 0$:

$$r f'(r) = 1 + \frac{(ab)^r \ln (ab)^r}{(ab)^r - 1} - \frac{a^r \ln (a^r)}{a^r - 1} - \frac{b^r \ln (b^r)}{b^r - 1}.$$

Wir setzen

$$u = a^r \quad \text{und} \quad v = b^r,$$

und bezeichnen mit g die im Intervall $(0, \infty)$ definierte Funktion:

$$g(u) = \begin{cases} \dfrac{u \ln(u)}{u - 1}, & u \neq 1, \\[2ex] 1, & u = 1, \end{cases}$$

sowie mit h die für alle positiven Zahlen u und v definierte Funktion:

$$h(u, v) = 1 + g(uv) - g(u) - g(v);$$

dann folgt:

$$r f'(r) = h(a^r, b^r). \tag{3.5}$$

Differenzieren wir h zunächst nach u und dann nach v, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\,h(u,v)=\begin{cases}\dfrac{2\ln(uv)}{(uv-1)^3}\,(F_1(uv,1)-F_0(uv,1)), & uv\neq 1,\\[2mm] \frac{1}{6}, & uv=1,\end{cases}$$

und nach (1.1) folgt für alle positiven u und v:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\,h(u,v)>0.$$

Somit gilt:

$$\frac{\partial}{\partial u}\,h(u,v)>\frac{\partial}{\partial u}\,h(u,1)=0 \quad \text{für} \quad u>1 \quad \text{und} \quad v>1,$$

und folglich:

$$h(u,v)>h(1,v)=0 \quad \text{für} \quad u>1 \quad \text{und} \quad v>1. \tag{3.6}$$

Auf Grund von

$$x_1>x_2 \quad \text{und} \quad y_1>y_2$$

gilt für $r>0$:

$$u=a^r=(x_1/x_2)^r>1$$

und $v=b^r=(y_1/y_2)^r>1$.

Nach (3.5) und (3.6) folgt für $r>0$:

$$r f'(r)>0.$$

Also ist f im Intervall $[0,\infty)$ streng monoton steigend; und da es sich bei f (wie man leicht nachrechnet) um eine gerade Funktion handelt, erhalten wir die Ungleichungen:

$$f(r+1)-f(r)>0 \qquad \text{für} \quad r>-\tfrac{1}{2},$$

und

$$f(r+1)-f(r)<0 \qquad \text{für} \quad r<-\tfrac{1}{2}.$$

Nach (3.4) sind somit für alle x_1, x_2, y_1 und y_2 mit $x_1>x_2>0$ und $y_1>y_2>0$ folgende Abschätzungen gültig:

$$F_r(xy) > F_r(x)\, F_r(y) \qquad \text{für} \quad r > -\tfrac{1}{2},$$

und

$$F_r(xy) < F_r(x)\, F_r(y) \qquad \text{für} \quad r < -\tfrac{1}{2}. \square$$

4. Wenn die positiven reellen Zahlen r, s und t den Ungleichungen $r < s < t$ genügen, dann gilt für alle $x \in \boldsymbol{R}^n_+$:

$$(M_s(x))^{s(t-r)} \leq (M_r(x))^{r(t-s)}\, (M_t(x))^{t(s-r)}, \tag{4.1}$$

wobei das Gleichheitszeichen in (4.1) genau dann gilt, wenn $x_1 = \ldots = x_n$.

Diese Abschätzung wird nach dem russischen Mathematiker A. M. Lyapunov benannt, der sie im Jahre 1901 veröffentlichte [10], [15]. Man kann sogar zeigen, daß die Ungleichung (4.1) für alle reellen Zahlen r, s und t mit $r < s < t$ gültig ist. Einen einfachen Beweis für diese Aussage findet man in [16]; siehe auch [3].

In diesem Abschnitt wollen wir für die Mittelwerte $F_r\,(x, y)$ einige Varianten der Lyapunov Ungleichung beweisen.

Satz 4.1. Es seien x und y voneinander verschiedene positive reelle Zahlen sowie r, s und t reelle Zahlen.

Wenn $r < s < t \leq -\tfrac{1}{2}$, dann gilt:

$$(F_s(x, y))^{t-r} < (F_r(x, y))^{t-s}\, (F_t(x, y))^{s-r}. \tag{4.2}$$

Falls $-\tfrac{1}{2} \leq r < s < t$, dann muß in (4.2) das Zeichen „<" durch „>" ersetzt werden.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß die Funktion $F_r(x, y)$ (mit $x \neq y$) bezüglich r im Intervall $(-\infty, -\tfrac{1}{2}]$ logarithmisch streng konvex und im Intervall $[-\tfrac{1}{2}, \infty)$ logarithmisch streng konkav ist. Auf Grund von

$$\ln F_r(x, y) = \ln(y) + \ln F_r(x/y, 1)$$

können wir ohne Einschränkung $y = 1$ voraussetzen.

Wenn wir mit f die Funktion

$$f(r) = \ln F_r(x, 1), \quad x \neq 1,$$

bezeichnen, dann erhalten wir für die zweite Ableitung von f die Darstellung:

$$f''(r) = g(r+1) - g(r),$$

mit

$$g(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{r^2} - (\ln(x))^2 \dfrac{x^r}{(x^r-1)^2}, & r \neq 0, \\[2ex] \dfrac{1}{12} (\ln(x))^2, & r = 0. \end{cases}$$

Differentiation von g führt zu

$$\frac{r^3}{2} g'(r) = F_1(x^r, 1)\,(F_{-1/2}(x^r, 1))^2\,(F_0(x^r, 1))^{-3} - 1 < 0, \quad r \neq 0. \quad (4.4)$$

(Beweise für die Ungleichung (4.4) findet man in [1] und [12].)

Folglich ist g eine in $[0, \infty)$ streng monoton fallende und in $(-\infty, 0]$ streng monoton steigende Funktion. Beachten wir, daß g eine gerade Funktion ist, so erhalten wir:

$$g(r+1) - g(r) > 0 \qquad \text{für} \quad r < -\tfrac{1}{2}$$

und

$$g(r+1) - g(r) < 0 \qquad \text{für} \quad r > -\tfrac{1}{2},$$

also gilt nach (4.3):

$$f''(r) > 0 \ \text{ für } \ r < -\tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad f''(r) < 0 \ \text{ für } \ r > -\tfrac{1}{2}.$$

Wir setzen nun $r < s < t \leqslant -\tfrac{1}{2}$ voraus. Da $h(r) = \ln F_r(x, y)$ (mit $x \neq y$) im Intervall $(-\infty, -\tfrac{1}{2}]$ streng konvex ist, folgt für alle reellen Zahlen $a \in (0, 1)$:

$$h(ar + (1-a)t) < a\,h(r) + (1-a)\,h(t). \qquad (4.5)$$

Wenn wir in (4.5) $a = (t-s)/(t-r)$ einsetzen und anschließend beide Seiten von (4.5) mit $t - r$ multiplizieren, dann erhalten wir die logarithmierte Form von (4.2).

Analog beweist man den zweiten Teil des Satzes. □

Der folgende Satz ist von E. M. Wright [18] entdeckt worden:

Lemma. Wenn f eine im Intervall $I \subset \boldsymbol{R}$ definierte monotone oder konvexe Funktion ist, die nur positive Werte annimmt, dann gilt für alle reellen zahlen $r, s, t \in I$:

$$(r-s)(r-t)f(r) + (s-r)(s-t)f(s) + (t-r)(t-s)f(t) \geq 0. \tag{4.6}$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (4.6) genau dann, wenn $r = s = t$.

Beim Beweis des nächsten Satzes spielt das Lemma von Wright eine zentrale Rolle.

Satz 4.2. Es seien x und y positive reelle Zahlen sowie r, s und t reelle Zahlen.

Wenn $\min(x, y) > 1$, dann gilt:

$$1 \leq (F_r(x, y))^{(r-s)(r-t)} (F_s(x, y))^{(s-r)(s-t)} (F_t(x, y))^{(t-r)(t-s)}. \tag{4.7}$$

Falls $\max(x, y) < 1$, dann muß in (4.7) „$\leq$" durch „$\geq$" ersetzt werden.

Das Gleichheitszeichen gilt in beiden Fällen genau dann, wenn $r = s = t$.

Beweis. Nach (1.1) ist $F_r(x, y)$ und folglich auch $\ln F_r(x, y)$ bezüglich r in $\boldsymbol{R}$ monoton steigend. Somit erfüllen die beiden Funktionen:

$$g(r) = \ln F_r(x, y) \qquad \text{mit} \quad \min(x, y) > 1$$

und

$$h(r) = -\ln F_r(x, y) \qquad \text{mit} \quad \max(x, y) < 1$$

in $\boldsymbol{R}$ die Voraussetzungen des obigen Lemmas. Wenn wir in (4.6) f durch g bzw. h ersetzen, dann erhalten wir nach elementaren Umformungen die beiden zu beweisenden Ungleichungen. $\square$

5. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gezeigt, in welchen Intervallen die Funktion $F_r(x, y)$ bezüglich r logarithmisch konvex bzw. logarithmisch konkav ist. Es ist naheliegend zu fragen, ob es sich bei $f_1(r) = F_r(x, y)$ (mit $x \neq y$) ebenso wie $\ln F_r(x, y)$ um eine konvex-konkave Funktion handelt; d. h.: Gibt es eine von x und y unabhängige reelle Zahl r_0, so daß f_1 in $(-\infty, r_0]$ streng konvex und in $[r_0, \infty)$ streng konkav ist?

Darüber hinaus wäre es interessant, weitere in engem Zusammenhang mit $F_r(x, y)$ stehende Funktionen, wie z. B. $f_2(r) = r \ln F_r(x, y)$, auf Konvexität zu untersuchen.

Einige durchgerechnete Beispiele lassen vermuten, daß es sich bei f_2 um eine in $\boldsymbol{R}$ streng konvexe Funktion handelt. Ein Beweis für diese Vermutung steht jedoch noch aus!

Wenn f_2 in $\boldsymbol{R}$ streng konvex ist, dann wäre das folgende Analogon zur Lyapunov Ungleichung (4.1):

$$(F_s(x, y))^{s(t-r)} < (F_r(x, y))^{r(t-s)} \, (F_t(x, y))^{t(s-r)}$$

für alle reellen Zahlen x und y mit $x \neq y$ sowie für alle reellen Zahlen r, s und t mit $r < s < t$ gültig.

Zumindest können wir zeigen, daß die Funktion

$$f(r) = (r+1)\, F_r(x, y) \qquad \text{mit} \quad x \neq y$$

in $\boldsymbol{R}$ streng konvex ist:

Ohne Einschränkung setzen wir $y = 1$ voraus; dann ergibt zweimalige Differentiation von f für $x \neq 1$ und $r \neq 0$:

$$f''(r) = 2x^r(1-x)\ln(x)\,(x^r-1)^{-2}\,[1 - F_1(x^r, 1)/F_0(x^r, 1)],$$

und nach (1.1) folgt:

$$f''(r) > 0 \qquad \text{für} \quad r \neq 0,$$

also ist f in $\boldsymbol{R}$ streng konvex.

Eine einfache Anwendung dieses Resultates ermöglicht es, für den Quotienten

$$\frac{F_t(x, y) - F_r(x, y)}{F_t(x, y) - F_s(x, y)}, \quad x \neq y, \quad -1 < r < s < t, \tag{5.1}$$

eine von den Variablen x und y unabhängige obere Schranke anzugeben.

Satz 5.1. Für alle positiven reellen Zahlen x und y mit $x \neq y$ und für alle reellen r, s und t mit $-1 < r < s < t$ gilt:

$$\frac{F_t(x, y) - F_r(x, y)}{F_t(x, y) - F_s(x, y)} < \frac{(s+1)\,(t-r)}{(r+1)\,(t-s)}. \tag{5.2}$$

Beweis. Für $f(r) = (r+1)\, F_r(x, y)$ (mit $x \neq y$) gilt:

$$f(ar + (1-a)t) < a f(r) + (1-a) f(t), \qquad 0 < a < 1. \tag{5.3}$$

Setzen wir in (5.3) $a = (t-s)/(t-r)$ und multiplizieren anschließend beide Seiten mit $t - r$, dann erhalten wir eine zu (5.2) äquivalente Ungleichung. □

Bemerkung. Die Abschätzung (5.2) ist ein Gegenstück zu der folgenden von L. C. Hsu vermuteten und von P. R. Beesack [4] bewiesenen Ungleichung für Potenz Mittel:

Für alle Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}_+^n$ (wobei die Werte $x_1, \ldots, x_n$ nicht alle gleich sind) und für alle positiven reellen Zahlen r, s und t mit $r < s < t$ gilt:

$$\frac{M_t(x) - M_r(x)}{M_t(x) - M_s(x)} < \frac{s(t-r)}{r(t-s)}.$$

Wenn die Zahlen r, s und t den Ungleichungen $0 < r < s < t$ genügen, dann folgt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F_t(x, 1) - F_r(x, 1)}{F_t(x, 1) - F_s(x, 1)} = \frac{(s+1)(t-r)}{(r+1)(t-s)};$$

im Falle positiver reeller Zahlen r, s und t handelt es sich also bei $(s+1)(t-r)/((r+1)(t-s))$ um die bestmögliche (von x und y unabhängige) obere Schranke für den Quotienten (5.1).

Abschließend bemerken wir, daß der Wert 1 für alle reellen r, s und t mit $r < s < t$ eine untere Schranke für (5.1) ist. Dies folgt unmittelbar aus der Monotonieeigenschaft (1.1).

Literatur

[1.] H. Alzer: Über eine einparametrige Familie von Mittelwerten. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., mat.-naturw. Kl. 1987, 1–9.

[2] H. Alzer: Über Lehmers Mittelwertfamilie. Elem. Math. 43 (1988), 50–54.

[3] E. F. Beckenbach and R. Bellman: Inequalities. Springer Verlag. Berlin 1983.

[4] P. R. Beesack: On weighted means of order r. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. **385** (1972), 21–24.

[5] J. L. Brenner and M. E. Mays: Some reproducing identities for families of mean values. Aequat. Math. **33** (1987), 106–113.

[6] R. Cisbani: Contributi alla teoria delle medie I. Metron **13** (2) (1938), 23–34.

[7] D. Farnsworth and R. Orr: Gini means. Amer. Math. Monthly **93** (1986), 603–607.

[8] C. Gini: Di una formula comprensiva delle medie. Metron **13** (2) (1938), 3–22.

[9] H. W. Gould and M. E. Mays: Series expansions of means. J. Math. Anal. Appl. **101** (1984), 611–621.

[10] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya: Inequalities. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1952.

[11] E. B. Leach and M. C. Sholander: Extended mean values. Amer. Math. Monthly **85** (1978), 84–90.

[12] E. B. Leach and M. C. Sholander: Extended mean values II. J. Math. Anal. Appl. **92** (1983), 207–223.

[13] E. B. Leach and M. C. Sholander: Multi-variable extended mean values. J. Math. Anal. Appl. **104** (1984), 390–407.

[14] D. H. Lehmer: On the compounding of certain means. J. Math. Anal. Appl. **36** (1971), 183–200.

[15] D. S. Mitrinović: Analytic Inequalities. Springer Verlag. Berlin 1970.

[16] A. W. Roberts and D. A. Varberg: Convex Functions. Academic Press. New York 1973.

[17] K. B. Stolarsky: Generalizations of the logarithmic mean. Math. Mag. **48** (1975), 87–92.

[18] E. M. Wright: A generalisation of Schur's inequality. Math. Gaz. **40** (1956), 217.