BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1989

MÜNCHEN 1990

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Einige Bemerkungen zur Eulerschen Konstanten

Max Koecher

Math. Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Einleitung. Für die Eulersche Konstante C findet man in der Literatur kaum Darstellungen durch Reihen oder Folgen von rationalen Zahlen. In der vorliegenden Note soll u. a. die Darstellung

$$(1)\qquad C = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \text{ mit } c_n := \sum_{2^n \leqq k < 2^{n+1}} \frac{(-1)^k}{k} = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

hergeleitet werden. Mit Hilfe der Gauß-Klammer kann man dafür natürlich auch

$$(1')\qquad C = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \left[\frac{\log k}{\log 2}\right]$$

schreiben. Alle Beweise sind elementar. Die Reihe (1) findet man bereits 1910 bei G. VACCA (Quat. J. of pure and appl. Math. 41, 363–364).

1. Hilfsbetrachtungen. Ist a_n, $n \geqq 1$, eine reelle Folge, so definiere man

$$b_m := \sum_{n=1}^{m} n(a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1}) \quad (a_0 := 0).$$

Es handelt sich also um eine „doppelte Teleskopsumme“ und eine Verifikation ergibt

$$b_m = m a_{m+1} - (m+1)\, a_m.$$

Hat man daher für a_n eine Asymptotik der Form

$$a_n = an + b + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

so erhält man mühelos

$$b_m = -b + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Mit diesem einfachen Sachverhalt bekommt man nun die gewünschte Reihe.

2. Beweis von (1). Es bezeichne h_n die Folge der Partialsummen der harmonischen Reihe, also

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n \geqq 1.$$

Man hat dann

$$(2) \qquad h_{2n-1} - h_{n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} = - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Wählt man also

$$a_n := h_{2^n-1}, \quad n \geqq 1,$$

so folgt in der Bezeichnung (1) aus (2)

$$a_{n+1} - 2\,a_n + a_{n-1} = -\,c_n,\ n \geqq 1.$$

Wegen

$$a_n = \log\,(2^n - 1) + C + O\left(\frac{1}{2^n}\right) = n \log 2 + C + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ergeben die obigen Hilfsbetrachtungen sofort

$$\sum_{n=1}^{m} n \cdot c_n = C + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

also die Behauptung (1).

Bemerkung. Aus (2) entnimmt man ohne irgendwelche Grenzwertsätze, daß log 2 gleich der alternierenden harmonischen Reihe ist.

3. Eine Verallgemeinerung. Sind die natürlichen Zahlen q und r mit $q \equiv 1\ (r)$ gegeben, so kann man (1) wie folgt verallgemeinern: Man wählt

$$a_n := h_{\frac{q^n-1}{r}} = \log q \cdot n + C - \log r + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

und kann wieder Abschnitt 1 anwenden. Es folgt

$$C \log r = - \sum_{n=1}^{\infty} n \left(h_{\frac{q^{n+1}-1}{r}} - 2\, h_{\frac{q^n - 1}{r}} + h_{\frac{q^{n-1}-1}{r}} \right).$$

Im Falle $q = 3$ und $r = 2$ entsteht hieraus nach geschickter Umformung eine Reihe für $C - \log 2$, die man bereits bei S. RAMANUJAN (Collected Papers, Cambridge 1927, Seite 325, Question 327) findet.

4. Erste Konvergenz-Verbesserung. Schreibt man

$$4 c_n = \sum_{\mathrm{I}} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} + 2 \sum_{\mathrm{II}} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{\mathrm{III}} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1},$$

wobei die Summen jeweils über die k mit

$$\mathrm{I}: 2^n + 1 \leqq k \leqq 2^{n+1}, \quad \mathrm{II}: 2^n \leqq k \leqq 2^{n+1} - 1,$$

$$\mathrm{III}: 2^n - 1 \leqq k \leqq 2^{n+1} - 2,$$

zu erstrecken sind, so erhält man

$$4 c_n = 4 d_n + \sum_{\mathrm{II}} (-1)^k \left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right),$$

mit

$$d_n := \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right),$$

also

$$(3) \qquad c_n = d_n - \frac{1}{2} \sum_{2^n \leqq k < 2^{n+1}} \frac{(-1)^k}{(k-1)\, k\, (k+1)} = d_n + O(8^{-n}).$$

Aus (1) folgt daher

$$(4) \qquad C = D - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sum_{2^n \leqq k < 2^{n+1}} \frac{(-1)^k}{(k-1)\, k\, (k+1)}$$

mit

$$D := \sum_{n=1}^{\infty} n\, d_n = \frac{1}{4} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \right) \sim 0{,}651.673.788.$$

Für (4) kann man wieder

$$(4') \quad C = D - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)\,k\,(k+1)} \cdot \left[\frac{\log k}{\log 2}\right]$$

schreiben.

5. Zweite Konvergenz-Verbesserung. Man schreibt dazu

$$c_n = \frac{1}{2\,(2^n - 1)} + \sum_{2^n \leqq 2k < 2^{n+1}} \left(-\frac{1}{2\,(2\,k-1)} + \frac{1}{2\,k} - \frac{1}{2\,(2\,k+1)}\right)$$

$$- \frac{1}{2\,(2^{\,n+1} - 1)}\,,$$

und bekommt

$$(5) \quad c_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}\right) - \sum_{\substack{2^n \leqq k < 2^{n+1} \\ k \equiv 0\,(2)}} \frac{1}{(k-1)\,k\,(k+1)}\,.$$

Ein Vergleich mit (3) ergibt

$$(6) \quad c_n = \frac{1}{2^{n+2}} + \sum_{\substack{2^n \leqq k < 2^{n+1} \\ k \equiv 1\,(2)}} \frac{1}{(k-1)\,k\,(k+1)}\,,$$

und (1) liefert

$$(7) \quad C = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{\substack{2^n \leqq k < 2^{n+1} \\ k \equiv 1\,(2)}} \frac{1}{(k-1)\,k\,(k+1)}\,,$$

oder

$$(7') \quad C = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=3 \\ k \equiv 1\,(2)}}^{\infty} \frac{1}{(k-1)\,k\,(k+1)} \cdot \left[\frac{\log k}{\log 2}\right].$$

6. Dritte Konvergenzverbesserung. Für $m \geqq 0$ und $n \geqq 1$ setze man

$$(8) \quad c_n^{(m)} := \sum_{2^n \leqq k < 2^{n+1}} \frac{(-1)^k}{k\,(k+1)\ldots\ldots(k+m)}\,,$$

also $c_n^{(0)} = c_n$. Man hat hier

$$2c_n^{(m)} = \sum_{2^n \leqq k < 2^{n+1}} \frac{(-1)^k}{k(k+1)\ldots\ldots(k+m)}$$

$$+ \sum_{2^n \leqq k+1 < 2^{n+1}} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\ldots\ldots(k+m+1)}$$

$$= \sum_{2^n \leqq k < 2^{n+1}} (-1)^k \left(\frac{1}{k\ldots\ldots(k+m)}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{(k+1)\ldots\ldots(k+m+1)}\right) + d_n^{(m)} - d_{n+1}^{(m)}$$

mit

$$d_n^{(m)} := \frac{1}{2^n(2^n+1)\ldots\ldots(2^n+m)} = \frac{(2^n-1)!}{(2^n+m)!}, \tag{9}$$

also

$$c_n^{(m)} = \frac{1}{2}\left(d_n^{(m)} - d_{n+1}^{(m)}\right) + \frac{m+1}{2}\, c_n^{(m+1)}, \quad m \geqq 0. \tag{10}$$

Man erhält

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n^{(m)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(m)} + \frac{m+1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n^{(m+1)}. \tag{11}$$

Im Falle $m = 0$ ergibt (1)

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n^{(1)},$$

und eine Induktion nach q liefert

$$C = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{q-1} \frac{m!}{2^{m+1}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(m)} + \frac{q!}{2^q}\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n^{(q)}, \quad q \geqq 1. \tag{12}$$

Im Falle $q \geqq 2$ entnimmt man (8) sofort

$$0 < c_n^{(q)} < \sum_{2^n \leqq k < 2^{n+1}} \frac{1}{k^2 q!} < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{2^n - 1},$$

so daß man den Limes $q \to \infty$ in (12) ausführen darf.

Es folgt

$$C = \frac{1}{2} + \sum_{m,n\geqq 1} \frac{m!}{2^{m+1}} \cdot \frac{1}{2^n(2^n+1)\ldots\ldots(2^n+m)}$$

also auch

(13)
$$\boxed{C = \frac{1}{2} + \sum_{m,n\geqq 1} \frac{1}{2^{m+n+1} \cdot \binom{2^n+m}{m}}\,.}$$

Ordnet man hier die Nenner in der Summe der Größe nach, so erhält man eine monoton wachsende Folge C_k, $k \geqq 1$, also

$$\left\{C_k;\ k \geqq 1\right\} = \left\{2^{m+n+1} \cdot \binom{2^n+m}{m};\ m \geqq 1, \quad n \geqq 1\right\}.$$

Speziell folgt

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{80} + \frac{1}{96} + \frac{1}{288} + \frac{1}{320} + \frac{1}{480} + \frac{1}{960} + \ldots \sim 0.574.$$

Auf Grund numerischer Rechnungen bis C_{360} ($\sim 10^{25}$) scheint

$$1 \leqq \frac{1}{k} \cdot \log C_k \cdot \log k \cdot \log\log k \leqq 2$$

für $k \geqq 6$ zu gelten.

7. Eine Sackgasse. Schließlich wird man in (13) versuchen, durch eine Umordnung zu neuen Reihen zu kommen: Man benutzt die Potenzreihen

(14) $$f_N(x) := \sum_{m\geqq 0} \frac{1}{\binom{N+m}{m}}\, x^{m+1}, \quad |x| < 1,$$

für $N = 1,2,\ldots$ und hat dann nach (13) auch

$$C = \sum_{n \geqq 1} L_n \text{ mit } L_n = \frac{1}{2^n} \cdot f_{2^n}\left(\frac{1}{2}\right). \tag{15}$$

Die für $0 < |x| < 1$ gültige Identität

$$\frac{1}{N} \cdot f_N(x) = -\log(1-x) \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{N-1} + \sum_{r=1}^{N-1} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{N-r-1} \tag{16}$$

führt dann auf

$$\frac{1}{N} \cdot f_N\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^N \cdot \sum_{r=N}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r}. \tag{17}$$

Aus (15) erhält man also (1) zurück. Zum Beweis von (16) stellt man fest, daß beide Seiten Potenzreihen sind, die einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung genügen.

Aus (17) bekommt man

$$L_n = \sum_{r=1}^{2^n-1} \frac{(-1)^{r+1}}{r} - \log 2. \tag{18}$$

Ich verdanke Herrn F. L. Bauer die Bemerkung, daß die Näherung

$$\sum_{k=1}^{n} L_k + L_n \text{ an Stelle von } \sum_{k=1}^{n} L_k$$

für C gemäß (15) eine Verdoppelung der genauen Dezimalstellen zu geben scheint.

Euler-Mascheroni-Konstante auf 5000 Dezimalen

$$C = \sum_{n=1}^{N}(1/n) - 1/2N - \log N + \sum_{k=1}^{r}(B_{2k}/2k)N^{-2k} + R_{N,r}$$

mit $|R_{N,r}| \le |B_{2r}/2r|\cdot N^{-2r}$, hier $N = 2^{16}$, $r = 900$.

.57721 56649 01532 86060 65120 90082 40243 10421 59335 93992 35988 05767 23488 48677 26777 66467
09369 47063 29174 67495 14631 44724 98070 82480 96050 40144 86542 83622 41739 97644 92353 62535
00333 74293 73377 37673 94279 25952 58247 09491 60087 35203 94816 56708 53233 15177 66115 28621
19950 15079 84793 74508 57057 40029 92135 47861 46694 02960 43254 21519 05877 55352 67331 39925
40129 67420 51375 41395 49111 68510 28079 84234 87758 72050 38431 09399 73613 72553 06088 93312
67600 17247 95378 36759 27135 15772 26102 73492 91394 07984 30103 41777 17780 88154 95706 61075
01016 19166 33401 52278 93586 79654 97252 03621 28792 26555 95366 96281 76388 79272 68013 24310
10476 50596 37039 47394 95763 89065 72967 92960 10090 15125 19595 09222 43501 40934 98712 28247
94974 71956 46976 31850 66761 29063 81105 18241 97444 86783 63808 61749 45516 98927 92301 87739
10729 45781 55431 60050 02182 84409 60537 72434 20328 54783 67015 17739 43987 00302 37033 95183
28690 00155 81939 88042 70741 15422 27819 71652 30110 73565 83396 73487 17650 49194 18123 00040
65469 31429 99297 77956 93031 00503 08630 34185 69803 23108 36916 40025 89297 08909 85486 82577
73642 88253 95492 58736 29596 13329 85747 39302 37343 88470 70370 28441 29201 66417 85024 87333
79080 56275 49984 34590 76164 31671 03146 71072 23700 21810 74504 44186 64759 13480 36690 25532
45862 54422 25345 18138 79124 34573 50136 12977 82278 28814 89459 09863 84600 62931 69471 88714
95875 25492 36649 35204 73243 64109 72682 76160 87759 50880 95126 20840 45444 77992 29915 72482
92516 25127 84276 59657 08321 46102 98214 61795 19579 59095 92270 42089 89627 97125 53632 17948
87376 42106 60607 06598 25619 90102 88075 61251 99137 51167 82176 43619 05705 84407 83573 50158
00560 77457 93421 31449 88500 78641 51716 15194 56570 61704 32450 75008 16870 52307 89093 70461
43066 84817 91649 68425 49150 49672 43121 83783 87535 64894 95086 84541 02340 60162 25085 15583
86723 49441 87880 44094 07701 06883 79511 13078 72023 42639 52269 20971 60885 69083 82511 37871
28368 20491 17892 59447 84861 99118 52939 10293 09905 92552 66917 27446 89204 43869 71114 71745
71574 57320 39352 09122 31608 50868 27558 89010 94516 81181 01687 49754 70969 36667 12102 06304
82716 58950 49327 31486 08749 40207 00674 25909 18248 75962 13738 42311 44265 31350 29230 31751
72257 22162 83248 83811 24589 57438 62398 70375 76628 55130 33143 92999 54018 53134 14158 62127
88648 07611 00301 52119 65780 06811 77737 63501 68183 89733 89663 98689 57932 99145 63886 44310
37060 80781 74489 95795 83245 79418 96202 60498 41043 92250 78604 60362 52772 60229 19682 99586
09883 39013 78717 14226 91788 38195 29844 56079 16051 97279 73604 75910 25109 95779 13351 57917
72251 50254 92932 46325 02874 76779 48421 58405 07599 29040 18557 64599 01862 69267 76437 26605
71176 81336 55908 81554 81074 70000 62336 37252 88949 55463 69714 33012 00791 30855 52639 59549
78230 23144 03914 97404 94746 82594 73208 46185 24605 87766 94882 87953 01040 63491 72292 18580
08706 77069 04279 26743 28444 69685 14971 82567 80958 41654 49185 14575 33196 40633 11993 73821
57345 08749 88325 56088 88735 28019 01915 50896 88554 68259 24544 45277 28173 05730 10806 06177
01136 37731 82462 92466 00812 77162 10186 77446 84959 51428 17901 45111 94893 42288 34482 53075
31187 01860 97612 24623 17674 97755 64124 61983 85640 14841 23587 17724 95542 24820 16151 76579
94080 62968 34242 89057 25947 39269 63863 38387 43805 47131 96764 29268 37249 07608 75073 78528
37023 04686 50349 05120 34227 21743 66897 92848 62972 90889 26789 77703 26246 23912 26188 87653
00577 86274 36060 94443 60392 80977 08133 83693 42355 08583 94112 67092 18734 41451 21878 03276
15050 94780 55466 30058 68455 63152 45460 53151 13252 81889 10792 31491 31103 23443 02450 93345
00030 76558 64874 22297 17700 33178 45391 50566 94015 99884 92916 09114 00294 86902 08848 53816
97009 55156 63470 55445 22176 40358 62939 82865 81312 38701 32535 88006 25686 62692 69977 67737
73068 32269 00916 08510 45150 02261 07180 25546 59284 93894 92775 95897 54076 15599 33782 64824
19795 06418 68143 78817 18508 85408 03679 96314 23954 00919 64388 75007 89000 00627 99794 28098
86372 99259 19777 65040 40992 20379 40427 61681 78371 56686 53066 93983 09165 24322 70595 53041
76673 66401 16792 95901 29305 37449 71830 80042 75848 63508 38080 42466 73509 35598 32324 11696
92148 60649 89276 36244 32958 85487 37897 01489 71334 35384 48002 89046 66509 02845 37689 62239
83048 81406 27305 40879 59118 96705 74938 54432 47869 14808 53377 02640 67758 08127 54587 31117
63647 87874 30739 20664 20112 51352 72749 96175 45053 08558 23566 83068 32291 76766 77041 03523
15350 32510 12465 63861 56706 44984 71326 95969 33016 78661 38333 33344 16579 00605 86749 71036
46895 17456 95971 81553 76407 83776 50184 27834 59918 42015 99543 14490 47725 55230 61476 70165
99341 63906 60912 05400 53221 58902 09134 08027 82251 53385 28995 11665 45224 58691 85993 67122
01321 50144 80142 42309 86254 60448 86725 69343 14887 04915 93044 64018 91645 02022 40549 53862
91847 58629 30778 89350 64377 15966 06909 60468 12437 02305 46570 31606 79992 58716 66752 47219
40977 79801 86362 62563 35825 26279 42239 32548 60132 69353 07013 88937 43692 38428 78938 51276
47408 56548 65028 15630 67740 44220 30644 03756 82630 91029 17514 57223 44410 50369 31771 14521
70888 90744 64160 48688 70108 38623 11426 12844 14259 60956 37040 06192 00579 33503 41552 42624
02620 64656 93543 06125 85265 83452 19212 14977 71878 06958 66085 16334 92210 48367 37994 59259
43403 79560 00219 27854 18379 41776 02033 65594 67307 88798 38084 81631 46782 41492 35464 91488
76683 36840 74928 93865 28186 30485 89820 35481 86243 83848 17599 76358 49075 18079 14806 34943
91628 47054 82200 75494 53489 86133 82723 57309 22190 03074 00968 00337 66684 49325 05567 65493
75303 18112 51641 05524 92384 07764 51498 42395 76201 27815 52322 94492 88545 57853 82024 89189
42441 85709 59195 58208 10007 15783 84039 62747 99858 17880 88886 57168 30699 43606 07359 90421
06851 14279 13169 69959 67923 00828 98815 60975 .....