

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1990

MÜNCHEN 1991

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Zwei weitere Beweise zu einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon

Von Herbert Naumann in Hilden

Vorgelegt von Kurt Schütte in der Sitzung vom 12. Januar 1990

Als Satz von Napoleon wird folgender Satz der Elementargeometrie bezeichnet:

Die Mittelpunkte der über den Seiten eines beliebigen Dreiecks nach außen angelegten gleichseitigen Dreiecke bilden stets ein gleichseitiges Dreieck.

(Die Herkunft dieses Satzes konnte bisher nicht geklärt werden, vor 1912 ist jedenfalls eine Zuschreibung an Napoleon nicht bekannt. Siehe hierzu J. Fischer [1], S. 324–325 und die dort zitierte Literatur.)

K. Schütte hat in [2] und [3] eine Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon bewiesen, die (in unwesentlich geänderter Formulierung) lautet:

**Voraussetzung.** An die Seiten eines beliebigen Dreiecks  $A_1A_2A_3$  seien außen die Dreiecke  $A_3A_2B_1$ ,  $A_1A_3B_2$ ,  $A_2A_1B_3$  angelegt mit den gerichteten Winkeln  $\beta_1 = \sphericalangle A_3B_1A_2$ ,  $\beta_2 = \sphericalangle A_1B_2A_3$ ,  $\beta_3 = \sphericalangle A_2B_3A_1$ , wobei  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$  ist. Dann hat man an den Umkreismittelpunkten  $M_1, M_2, M_3$  der außen angelegten Dreiecke die gerichteten Winkel  $2\beta_1 = \sphericalangle A_3M_1A_2$ ,  $2\beta_2 = \sphericalangle A_1M_2A_3$ ,  $2\beta_3 = \sphericalangle A_2M_3A_1$ .

**Behauptung.**  $M_1M_2M_3$  ist ein Dreieck mit den gerichteten Winkeln  $\beta_1 = \sphericalangle M_2M_1M_3$ ,  $\beta_2 = \sphericalangle M_3M_2M_1$ ,  $\beta_3 = \sphericalangle M_1M_3M_2$ .

(Bei dem Satz von Napoleon ist  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \pi/3$ , das Dreieck  $M_1M_2M_3$  also ein gleichseitiges.)

In den nun folgenden Beweisen sei unter einem Winkel stets der *gerichtete* Winkel verstanden. Dadurch brauchen Fallunterscheidungen nicht gemacht zu werden, die Beweise werden so kürzer und direkter.

## Beweis 1

$M_2M_3P$  sei das Dreieck mit  $\sphericalangle PM_3M_2 = \beta_3$  und  $\sphericalangle M_3M_2P = \beta_2$ , also mit  $\sphericalangle M_2PM_3 = \beta_1$ .

$a_1, a_2, a_3$  seien die Verbindungsgeraden  $M_2M_3, M_3P, PM_2$ .

1. Spiegelt man hintereinander an den Geraden  $a_2$  und  $a_1$ , so erhält man eine Drehung um den Punkt  $M_3$  mit dem Drehwinkel  $2\beta_3$ , durch die  $A_2$  auf  $A_1$  abgebildet wird.

2. Spiegelt man hintereinander an den Geraden  $a_1$  und  $a_3$ , so erhält man eine Drehung um den Punkt  $M_2$  mit dem Drehwinkel  $2\beta_2$ , durch die  $A_1$  auf  $A_3$  abgebildet wird.

3. Aus 1. und 2. folgt: Spiegelt man hintereinander an den Geraden  $a_2$  und  $a_3$ , so erhält man eine Drehung um den Punkt  $P$  mit dem Drehwinkel  $2\beta_3 + 2\beta_2 = 2\pi - 2\beta_1$ , durch die  $A_2$  auf  $A_3$  abgebildet wird.

4. Aus 3. folgt: Durch eine Drehung um den Punkt  $P$  mit dem Drehwinkel  $2\beta_1$  wird  $A_3$  auf  $A_2$  abgebildet.

Da auch durch eine Drehung um den Punkt  $M_1$  mit dem Drehwinkel  $2\beta_1$  der Punkt  $A_3$  auf  $A_2$  abgebildet wird, folgt  $P = M_1$ .

Somit ist die Behauptung bewiesen.

**Anmerkung.** Es lohnt sich, die Spiegelungen an den Geraden  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  noch einmal zu betrachten. Im obigen Beweis wird  $A_2$  zunächst durch Spiegelung an  $a_2$  auf einen Punkt abgebildet, der  $S$  genannt sei, anschließend wird  $S$  durch Spiegelung an  $a_1$  auf  $A_1$  abgebildet. Damit ist also  $S$  auch das Spiegelbild von  $A_1$  an  $a_1$ , und da  $S$  sodann durch Spiegelung an  $a_3$  in  $A_3$  übergeht, ist  $S$  ebenfalls das Spiegelbild von  $A_3$  an  $a_3$ . Die Existenz dieses gemeinsamen Spiegelpunktes  $S$ , der ersichtlich noch die interessante Eigenschaft hat, gemeinsamer Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke  $A_iA_jB_k$  zu sein, ist in Schütte [2], [3] ein wesentlicher Bestandteil der dortigen Beweise.

## Beweis 2

Die Summe der Innenwinkel in einem Sechseck beträgt  $4\pi$ . Da in dem Sechseck  $A_1M_3A_2M_1A_3M_2$  die Summe der Winkel bei den  $M_i$  gleich  $\Sigma 2\beta_i = 2\pi$  ist, so muß auch die Summe der Sechseckinnenwinkel  $\gamma_i$  bei den  $A_i$  gleich  $2\pi$  sein.

Wegen  $\overline{A_3M_1} = \overline{A_2M_1}$  läßt sich an  $\overline{A_3M_1}$  das Dreieck  $M'_3A_3M_1$  kongruent und orientierungsgleich dem Dreieck  $M_3A_2M_1$  anlegen. Das Dreieck  $M_2A_3M'_3$  ist dann kongruent und orientierungsgleich dem Dreieck  $M_2A_1M_3$ , denn  $\overline{M_2A_3} = \overline{M_2A_1}$ ,  $\overline{A_3M'_3} = \overline{A_2M_3} = \overline{A_1M_3}$  und  $\sphericalangle M'_3A_3M_2 = 2\pi - \gamma_2 - \gamma_3 = \gamma_1$ .

Da  $\sphericalangle M'_3M_1A_3 = \sphericalangle M_3M_1A_2$ , ist  $\sphericalangle M'_3M_1M_3 = \sphericalangle A_3M_1A_2 = 2\beta_1$ , da ferner  $\sphericalangle A_1M_2M_3 = \sphericalangle A_3M_2M'_3$ , so ist  $\sphericalangle M_3M_2M'_3 = \sphericalangle A_1M_2A_3 = 2\beta_2$ .

Wegen  $\overline{M'_3M_1} = \overline{M_3M_1}$ ,  $\overline{M'_3M_2} = \overline{M_3M_2}$  und  $M'_3 \neq M_3$  halbiert die Verbindungsgerade  $M_1M_2$  die Winkel  $\sphericalangle M'_3M_1M_3 = 2\beta_1$  und  $\sphericalangle M_3M_2M'_3 = 2\beta_2$ .

Somit ist die Behauptung ein zweites Mal bewiesen.

**Anmerkung zum Beweis 2.** Durch Spiegelung an  $M_1M_2$  wird das Dreieck  $M_1M_2M'_3$  auf  $M_1M_2M_3$  und der Punkt  $A_3$  auf einen Punkt abgebildet, der S genannt werde. Das Dreieck  $SM_1M_2$  ist dann spiegelbildlich kongruent zu  $A_3M_1M_2$ ,  $SM_2M_3$  ist spiegelbildlich kongruent zu  $A_3M_2M'_3$  und damit auch zu  $A_1M_2M_3$ , und  $SM_3M_1$  ist spiegelbildlich kongruent zu  $A_3M'_3M_1$  und damit auch zu  $A_2M_3M_1$ . Daraus ergibt sich von neuem, daß S auch Spiegelbild von  $A_1$  an  $M_2M_3$  und von  $A_2$  an  $M_3M_1$  ist.

Die Kanten  $SM_1$ ,  $SM_2$ ,  $SM_3$  bewirken eine Aufteilung des Sechsecks  $A_1M_3A_2M_1A_3M_2$  in drei Drachenvierecke (Drachen, *engl.* kite), deren Symmetrieachsen  $M_1M_2$ ,  $M_1M_3$ ,  $M_2M_3$  sind. Aus der Winkelhalbierungseigenschaft dieser Achsen folgt, wenn  $(i, j, k)$  eine zyklische Permutation von  $(1, 2, 3)$  ist, unmittelbar  $\sphericalangle M_kM_jM_i = \frac{1}{2} \sphericalangle A_iM_jA_k = \beta_j$ , q.e.d.

Herrn Prof. Dr. K. Schütte danke ich herzlich für die freundliche Ermunterung, diese Beweise zu publizieren.

### Literatur

- [1] Fischer, J.: Napoleon und die Naturwissenschaften. Stuttgart: Franz Steiner Verlag Wiesbaden 1988 (= Boethius; Bd. 16).
- [2] Schütte, K.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. Mathematische Semesterberichte **34**, 256–268 (1987).
- [3] Schütte, K.: Neue Fassung einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. Elemente d. Mathematik **44**, 133–138 (1989).

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1991

Band/Volume: [1990](#)

Autor(en)/Author(s): Naumann Herbert

Artikel/Article: [Zwei weitere Beweise zu einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon 1-3](#)