

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1990

MÜNCHEN 1991

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Moduln mit Koprämärzerlegung

Von Helmut Zöschinger

Vorgelegt von Otto Forster in der Sitzung vom 15. Dezember 1989

## Einleitung

Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Ein  $R$ -Modul  $M$  heißt *koprämär*, wenn  $M \neq 0$  ist und wenn für jedes  $x \in R$  entweder  $xM = M$  oder  $x^e M = 0$  ist für ein  $e \geq 1$ .  $M$  heißt *darstellbar*, wenn  $M$  Summe von endlich vielen koprämären Untermoduln ist. Eine Darstellung  $M = U_1 + \dots + U_n$ , in der alle  $U_i$  koprämär sind, heißt nach Kirby [2] eine *Koprämärzerlegung*, nach MacDonald [3] auch eine Sekundärdarstellung von  $M$ . Beide Autoren untersuchen die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Darstellung – analog zur klassischen Noether-Lasker-Theorie der Primärzerlegung von noetherschen Moduln. Sie zeigen insbesondere, daß jeder artinsche Modul darstellbar ist. Nach Sharp ([4] Theorem 2.3) ist über einem noetherschen Ring auch jeder injektive Modul darstellbar.

Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, über einem noetherschen Ring  $R$  weitere Klassen darstellbarer Moduln anzugeben und sie im 1-dimensionalen Fall vollständig zu beschreiben. Dabei erweisen sich die beiden folgenden Reduktionen als sehr nützlich:

- (1.5) Sei  $M$  ein  $R$ -Modul und  $P(M)$  der radikalvolle Anteil von  $M$  (d. h. der größte Untermodul von  $M$ , der keine maximalen Untermoduln besitzt). Genau dann ist  $M$  darstellbar, wenn  $P(M)$  darstellbar ist und wenn es ein Ideal  $\mathfrak{b}$  von  $R$  gibt, so daß  $R/\mathfrak{b}$  artinsch ist und  $\text{Ann}_M(\mathfrak{b}) + P(M) = M$ .
- (1.7) Sei  $M$  ein  $R$ -Modul und  $S$  eine multiplikative Teilmenge von  $R$ , so daß alle Elemente von  $S$  bijektiv auf  $M$  operieren. Genau dann ist  $M$  als  $R$ -Modul darstellbar, wenn  $M_S$  als  $R_S$ -Modul darstellbar ist.

Obwohl beide Aussagen einfach zu beweisen sind, liefern sie eine Fülle bisher nicht bekannter Beispiele, und die zweite erlaubt die Behandlung aller  $R$ -Moduln von endlicher Goldie-Dimension:

(2.4) Ein  $R$ -Modul  $M$  von endlicher Goldie-Dimension ist genau dann darstellbar, wenn auf jedem Faktormodul von  $M$  die Nichtnullteiler bijektiv operieren.

Insbesondere ist jeder radikalvolle Minimax-Modul darstellbar. Mit Hilfe der Menge  $\text{Att}(M) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \text{ ist Annulator eines Faktormoduls von } M \}$  erhält man folgendes hinreichende Kriterium:

(3.2) Sei  $M$  ein  $R$ -Modul, so daß  $\text{Att}(M)$  diskret ist (d. h. aus  $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$  in  $\text{Att}(M)$  stets folgt  $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ ). Dann ist  $M$  darstellbar.

Mit ihm folgt, daß im Falle  $\dim(R) \leq 1$  jeder radikalvolle  $R$ -Modul darstellbar ist, also in der obigen Aussage (1.5) nur mehr die Existenz des Ideales  $\mathfrak{b}$  gefordert werden muß. In diesem Falle ist auch die Klasse aller darstellbaren  $R$ -Moduln gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen (für ein Gegenbeispiel bei  $\dim(R) > 1$  siehe 3.5).

Jeder darstellbare  $R$ -Modul besitzt nach ([3] p. 34) eine Kompositionsreihe mit koprimären Faktoren, und für die Charakterisierung dieser (im Fall  $\dim(R) > 1$  schwächeren) Eigenschaft erinnern wir an folgende Begriffe: Für jeden  $R$ -Modul  $M$  ist  $\text{Koass}(M) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \text{ ist Annulator eines artinschen Faktormoduls von } M \}$  (siehe [7] p. 16), und für jede Gabriel-Topologie  $\mathfrak{G}$  auf  $R$  (siehe [5] p. 146) ist  $H_{\mathfrak{G}}(M) = \bigcap \{ \mathfrak{a} M \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{G} \}$ . Damit zeigen wir in

(4.2) Für einen  $R$ -Modul  $M \neq 0$  sind äquivalent:

- (i)  $M$  besitzt eine Folge von Untermoduln  $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$ , in der alle Faktoren  $M_i/M_{i-1}$  koprimär sind.
- (ii)  $\text{Koass}(M)$  ist endlich, und für jedes Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  ist die absteigende Folge  $M \supset \mathfrak{a} M \supset \mathfrak{a}^2 M \supset \mathfrak{a}^3 M \supset \dots$  stationär.
- (iii) Zu jeder Gabriel-Topologie  $\mathfrak{G}$  auf  $R$  gibt es ein  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$  mit  $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$ .

Die in (ii) auftretende absteigende Kettenbedingung spielt in der ganzen Arbeit eine zentrale Rolle, und abschließend beschreiben wir im Falle  $\dim(R) \leq 1$  alle  $R$ -Moduln, die ihr genügen.

$R$  ist stets ein kommutativer noetherscher Ring. Die modultheoretischen Bezeichnungen sind so, wie sie in ([7] p. 2-3) vereinbart wurden.

## 1. Grundtatsachen über koprämäre und darstellbare Moduln

Für jeden  $R$ -Modul  $M$  gilt  $\text{Koass}(M) \subset \text{Att}(M)$ , und wir zeigen in (1.4, a), daß bei darstellbaren Moduln beide Mengen übereinstimmen. Weil jeder Primdivisor des Ideales  $\text{Ann}_R(M)$  ein Element von  $\text{Att}(M)$  ist, gilt  $\bigcap \text{Att}(M) = \sqrt{\text{Ann}_R(M)}$ , während für  $a = \bigcap \text{Koass}(M)$  im allgemeinen nur  $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i M = 0$  ist. Mit Hilfe der Menge  $\text{Att}(M)$  lassen sich die koprämären  $R$ -Moduln sehr einfach beschreiben:

**Lemma 1.1.** *Für einen  $R$ -Modul  $M$  und ein Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $R$  sind äquivalent:*

- (i)  $M$  ist  $\mathfrak{p}$ -koprämär.
- (ii)  $\text{Att}(M) = \{\mathfrak{p}\}$ .
- (iii)  $\text{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$  und  $\mathfrak{p}^e M = 0$  für ein  $e \geq 1$ .

**Beweis.** (i  $\rightarrow$  ii) Für jeden koprämären Modul  $M$  ist  $\sqrt{\text{Ann}_R(M)}$  ein Primideal, sagen wir  $\mathfrak{p}$ , und  $M$  heißt dann  $\mathfrak{p}$ -koprämär. Ist nun  $\mathfrak{q} \in \text{Att}(M)$ ,  $\mathfrak{q} = \text{Ann}_R(M/U)$ , folgt  $\text{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{q}$  und  $xM \neq M$  für alle  $x \in \mathfrak{q}$ , also  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$  und  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ . (ii  $\rightarrow$  iii) Nur die zweite Aussage ist noch zu zeigen, und die folgt aus  $\mathfrak{p} = \sqrt{\text{Ann}_R(M)}$ . (iii  $\rightarrow$  i) Für jeden  $R$ -Modul  $N$  gilt  $\bigcup \text{Koass}(N) = \{x \in R \mid xN \neq N\}$ , so daß hier aus  $xM \neq M$  stets folgt  $x^e M = 0$ , also  $M$  koprämär ist und  $\sqrt{\text{Ann}_R(M)} = \mathfrak{p}$ .

**Folgerung 1.2.** *Sei  $M$  ein  $R$ -Modul und  $\mathfrak{p}$  ein Primideal von  $R$ . Dann gilt: (a) Ist  $\mathfrak{p}$  ein maximales Element von  $\text{Att}(M)$ , so sind die Faktormoduln  $M/\mathfrak{p}^i M$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) alle  $\mathfrak{p}$ -koprämär. (b) Ist  $U$  ein Untermodul von  $M$ , so daß  $U$  und  $M/U$   $\mathfrak{p}$ -koprämär sind, so ist auch  $M$   $\mathfrak{p}$ -koprämär. (c) Ist  $M$  die injektive Hülle von  $R/\mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{a}$  ein Ideal von  $R$ , so gilt für  $U = M[\mathfrak{a}] = \text{Ann}_M(\mathfrak{a})$ : Genau dann ist  $U$   $\mathfrak{p}$ -koprämär, wenn  $\mathfrak{p}$  ein minimaler Primdivisor von  $\mathfrak{a}$  ist.*

**Beweis.** (a) folgt sofort mit (ii), ebenso (b) wegen  $\text{Att}(M) \subset \text{Att}(U) \cup \text{Att}(M/U)$ . Bei (c) ist  $U \cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M)$ , also nach dem Beweis von ([7] Folgerung 3.3)  $\text{Att}(U) = \{\mathfrak{q} \in \text{Ass}(R/\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$ , so daß  $\text{Att}(U) = \{\mathfrak{p}\}$  äquivalent ist mit  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$  und  $h(\mathfrak{p}/\mathfrak{a}) = 0$ .

Die nächste Folgerung wurde für den Spezialfall  $A = R$  von Sharp in ([4] Theorem 2.3) bewiesen:

**Folgerung 1.3.** *Ist  $M$  ein injektiver und  $A$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul, so ist  $\text{Hom}_R(A, M)$  darstellbar.*

**Beweis.** Bei  $A \neq 0$  kann man irreduzible Faktoren  $A/A_i$  wählen, so daß  $\bigcap_{i=1}^n A_i = 0$  ist, und der Monomorphismus  $A \rightarrow \prod_{i=1}^n (A/A_i)$  induziert einen Epimorphismus  $\prod_{i=1}^n \text{Hom}_R(A/A_i, M) \rightarrow \text{Hom}_R(A, M)$ . Für jedes  $H_i = \text{Hom}_R(A/A_i, M)$  ist wieder nach ([7] Folgerung 3.3)  $\text{Att}(H_i) = \{q \in \text{Ass}(A/A_i) \mid M[q] \neq 0\}$ , wegen  $|\text{Ass}(A/A_i)| = 1$  also  $|\text{Att}(H_i)| \leq 1$ , d. h. nach dem Lemma  $H_i$  Null oder koprimär. Damit ist  $\prod_{i=1}^n H_i$  darstellbar, also auch der Faktormodul  $\text{Hom}_R(A, M)$ .

**Lemma 1.4.** *Für jeden darstellbaren  $R$ -Modul  $M$  gilt:*

- (a) *Koass( $M$ ) ist endlich und stimmt mit  $\text{Att}(M)$  überein.*
- (b) *Zu jeder Zerlegung  $\text{Koass}(M) = X \cup Y$  gibt es einen darstellbaren Untermodul  $U$  von  $M$  mit  $\text{Koass}(U) = X$  und  $\text{Koass}(M/U) = Y$ .*
- (c) *Zu jedem Ideal  $a$  von  $R$  gibt es ein  $e \geq 1$  mit  $M[a^e] + aM = M$ .*
- (d) *Der radikalvolle Anteil  $P(M)$  ist wieder darstellbar und der reduzierte Anteil  $M/P(M)$  ist koatomar und halbartinisch. Außerdem ist  $P(M)$  koabgeschlossen in  $M$ .*

**Beweis.** Für  $M = 0$  sind alle Aussagen klar, so daß gleich  $M \neq 0$  sei und  $M = U_1 + \dots + U_n$  eine Koprimärzerlegung von  $M$ , in der kein  $U_i$  überflüssig ist.

(a) Mit  $p_i = \sqrt{\text{Ann}_R(U_i)}$  behaupten wir, daß  $\text{Koass}(M) = \text{Att}(M) = \{p_1, \dots, p_n\}$  ist. Der Epimorphismus  $U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow M$  liefert für jedes  $q \in \text{Att}(M)$ , daß  $q \in \text{Att}(U_j) = \{p_j\}$  ist für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$ , also  $\text{Koass}(M) \subset \text{Att}(M) \subset \{p_1, \dots, p_n\}$ . Bei  $n = 1$  ist man fertig. Bei  $n \geq 2$  gilt für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $A_i = U_1 + \dots + \widehat{U_i} + \dots + U_n$ , daß  $M/A_i \neq 0$ , also als Faktormodul von  $U_i$  ebenfalls  $p_i$ -koprimär ist, und es folgt  $\{p_i\} = \text{Koass}(M/A_i) \subset \text{Koass}(M)$ .

(b) Schreibt man  $\text{Koass}(M) = \{q_1, \dots, q_k\}$  mit paarweise verschiedenen  $q_i$ , so ist für jedes  $j \in \{1, \dots, k\}$  der Untermodul  $V_j = \sum \{U_i \mid i \in \{1, \dots, n\} \text{ und } p_i = q_j\}$  ebenfalls  $q_j$ -koprimär und  $M = V_1 + \dots + V_k$ . Bei der angegebenen Zerlegung von  $\text{Koass}(M)$  können wir gleich  $X = \{q_1, \dots, q_s\}$  und  $Y = \{q_{s+1}, \dots, q_k\}$  annehmen, und dann leistet  $U = V_1 + \dots + V_s$  das Gewünschte: Die Epimorphismen  $V_1 \times \dots \times V_s \rightarrow U$  und  $V_{s+1} \times \dots \times V_k \rightarrow M/U$  zeigen, daß  $\text{Koass}(U) \subset X$  und  $\text{Koass}(M/U) \subset Y$  ist, und darin gilt beide Male Gleichheit (wegen  $\text{Koass}(M) \subset \text{Koass}(U) \cup \text{Koass}(M/U)$ ).

(c) Man kann gleich  $a \neq M$  annehmen und dann die  $U_i$  so numerieren, daß  $a \neq U_i$  ist für  $i \in \{1, \dots, s\}$  und  $a = U_i$  für die restlichen  $i$ . Es folgt  $a \subset \sqrt{\text{Ann}_R(U_i)}$ , also  $U_i \subset M[a^e]$  für ein gemeinsames  $e \geq 1$  und alle  $i \leq s$ , und daraus  $M[a^e] + a = M$ .

(d) Sei gleich  $P(M) \neq M$  und  $U_1, \dots, U_s$  nicht radikalvoll,  $U_i$  radikalvoll für alle  $i > s$ . Zu jedem  $i \leq s$  gibt es dann ein maximales Ideal  $\mathfrak{m}_i$  und ein  $e_i \geq 1$  mit  $\mathfrak{m}_i^{e_i} \cdot U_i = 0$ , mit  $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}_1^{e_1} \dots \mathfrak{m}_s^{e_s}$  folgt  $U_i \subset M[\mathfrak{b}]$  für alle  $i \leq s$ , mit  $B = \sum_{i>s} U_i$  also  $M[\mathfrak{b}] + B = M$ . Weil  $R/\mathfrak{b}$  artinsch ist und  $P(M)/B$  durch  $\mathfrak{b}$  annulliert wird, folgt bereits  $B = P(M)$ , also die erste Behauptung, und als Faktormodul von  $M[\mathfrak{b}]$  ist auch  $M/P(M)$  koatomar und halbartinisch. Ist schließlich  $A$  ein Untermodul von  $P(M)$  und  $P(M)/A$  klein in  $M/A$ , wird  $M/A$  als wesentliche Überdeckung von  $M/P(M)$  ebenfalls koatomar, hat also nach ([6] Lemma 1.1) keine radikalvollen Untermoduln, und es folgt  $P(M)/A = 0$ , d. h.  $P(M)$  ist koabgeschlossen in  $M$ .

**Folgerung 1.5.** *Ein  $R$ -Modul  $M$  ist genau dann darstellbar, wenn  $P(M)$  darstellbar ist und wenn es ein Ideal  $\mathfrak{b}$  von  $R$  gibt, so daß  $R/\mathfrak{b}$  artinsch ist und  $M[\mathfrak{b}] + P(M) = M$ .*

**Beweis.** Ist  $M$  darstellbar, so haben wir bei  $P(M) \neq M$  im letzten Teil (d) ein solches Ideal  $\mathfrak{b}$  konstruiert, und bei  $P(M) = M$  setze man  $\mathfrak{b} = R$ . Bei der Umkehrung bleibt zu zeigen, daß  $N = M[\mathfrak{b}]$  darstellbar ist: Für jedes  $\mathfrak{m} \in \Omega$  ist  $L_{\mathfrak{m}}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} N[\mathfrak{m}^i]$  höchstens dann ungleich Null, wenn  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{m}$  ist, und mit  $\mathfrak{m}^e + \mathfrak{b} = \mathfrak{m}^{e+1} + \mathfrak{b}$  folgt, daß  $\mathfrak{m}^e \cdot L_{\mathfrak{m}}(N)$  radikalvoll, also Null ist. In der Zerlegung  $N = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} L_{\mathfrak{m}}(N)$  sind also fast alle Summanden Null und die restlichen koprämar.

In dem Spezialfall, daß  $M$  reduziert, d. h.  $P(M) = 0$  ist, erhält man:

**Folgerung 1.6.** *Ein reduzierter  $R$ -Modul  $M$  ist genau dann darstellbar, wenn  $R/\text{Ann}_R(M)$  artinsch ist.*

**Bemerkungen zum Lemma.** 1) Aus Punkt (b) folgt für einen beliebigen  $R$ -Modul  $M$ : Ist  $Y$  eine endliche Teilmenge von  $\text{Koass}(M)$ , so gibt es einen Untermodul  $U$  von  $M$  mit  $\text{Koass}(M/U) = Y$ . (Zum Beweis wähle man einen artinschen Faktormodul  $M/M_0$  mit  $Y \subset \text{Koass}(M/M_0)$  und wende auf ihn (b) an.) Aber für unendliche  $Y$  gilt das nicht mehr. Ist z. B.  $(R, \mathfrak{m})$  ein lokaler Integritätsring mit  $\dim(R) > 1$  und  $M = \prod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{m}^i$ , so gibt es unendlich viele, paarweise verschie-

dene Primideale  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots$  der Höhe 1,  $Y = \{ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \dots \}$  ist eine Teilmenge von  $\text{Koass}(M) = \text{Spec}(R)$ , aber nach ([8] Folgerung 1.6) existiert überhaupt kein  $R$ -Modul  $N$  mit  $\text{Koass}(N) = Y$ . Ist schließlich  $X$  eine nichtleere Teilmenge von  $\text{Koass}(M) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ , so gibt es, weil  $M$  reduziert ist, keinen Untermodul  $U$  von  $M$  mit  $\text{Koass}(U) = X$ .

2) Definiert man die zwei folgenden Klassen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}'$  von  $R$ -Moduln durch  $M \in \mathcal{A} \iff$  Zu jedem Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  gibt es ein  $e \geq 1$  mit  $M[\mathfrak{a}^e] + \mathfrak{a}M = M$ ,  $M \in \mathcal{A}' \iff$  Zu jedem Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  gibt es ein  $e \geq 1$  mit  $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$ , so gehört nach Punkt (c) jeder darstellbare  $R$ -Modul zu  $\mathcal{A}$ , und natürlich ist  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ . Der Hauptvorteil der Klasse  $\mathcal{A}'$  ist, daß sie gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist (nicht aber  $\mathcal{A}$ , siehe Beispiel 3.5). Genauer zeigen wir in Abschnitt 4, daß für den Ring  $R$  äquivalent sind: (i)  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ . (ii)  $\mathcal{A}$  ist gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen. (iii)  $\dim(R) \leq 1$ . – Ist  $M \in \mathcal{A}'$ , folgt aus  $M[x] = 0$  auch  $xM = M$ , d. h. auf  $M$  operiert jeder Nichtnullteiler bijektiv.

**Lemma 1.7.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul und  $S$  eine multiplikative Teilmenge von  $R$ , so daß alle Elemente von  $S$  bijektiv auf  $M$  operieren. Genau dann ist  $M$  als  $R$ -Modul koprimär (darstellbar), wenn  $M_S$  als  $R_S$ -Modul koprimär (darstellbar) ist.

Beweis. Bei beliebigem  $S$  ist die Abbildung  $\text{Att}_{R_S}(M_S) \ni \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P} \cap R \in \text{Att}_R(M)$  wohldefiniert und injektiv. Falls also  $M_S \neq 0$  und  $M$   $\mathfrak{p}$ -koprimär ist, muß nach (1.1)  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$  und  $M_S$  als  $R_S$ -Modul  $\mathfrak{p}$   $R_S$ -koprimär sein (siehe auch [3] p. 27). Falls aber  $M$  eine Darstellung  $M = U_1 + \dots + U_n$  mit koprimären  $U_i$  besitzt, sind in  $M_S = U_{1S} + \dots + U_{nS}$  wie eben alle  $U_{iS}$  Null oder koprimär, so daß  $M_S$  auch als  $R_S$ -Modul darstellbar ist.

Operieren nun alle  $s \in S$  bijektiv auf  $M$ , wird die obige Abbildung  $\text{Att}_{R_S}(M_S) \rightarrow \text{Att}_R(M)$  auch surjektiv, und wieder mit (1.1) folgt die Behauptung über „koprimär“. Hat aber  $M_S$  eine Darstellung  $M_S = X_1 + \dots + X_n$  mit koprimären  $R_S$ -Untermoduln  $X_i$ , folgt mit  $U_i = \{ a \in M \mid \frac{a}{1} \in X_i \}$ , daß  $M = U_1 + \dots + U_n$  ist, daß jedes  $U_i$  ein S-teilbarer Untermodul von  $M$  mit  $U_{iS} \cong X_i$  ist, also wie eben  $U_i$  als  $R$ -Modul koprimär und damit  $M$  darstellbar ist.

**Folgerung 1.8.** Jeder radikalvolle unzerlegbare  $R$ -Modul ist koprimär.

Beweis. Ein Modul  $M$  heißt bekanntlich *unzerlegbar*, wenn  $M \neq 0$  ist und aus  $M = U_1 + U_2$  stets folgt  $U_1 = M$  oder  $U_2 = M$ . In diesem Fall ist  $\mathfrak{p} = \{x \in R \mid xM \neq M\}$  ein Primideal und  $\text{Koass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$ , außerdem gibt es ein  $m \in \Omega$  derart, daß für alle  $0 \neq a \in M$  der Ring  $R/\text{Ann}_R(a)$  lokal mit dem einzigen maximalen Ideal  $\overline{m}$  ist (siehe [7] p. 3). Damit erfüllt  $S = R \setminus m$  die Voraussetzungen im Lemma, denn zu jedem  $a \in M$  und  $s \in S$  ist  $(s) + \text{Ann}_R(a) = R$ , d. h.  $a = r s a$  für ein  $r \in R$ . Ist  $M$  zusätzlich radikalvoll, zeigt die letzte Formel, daß auch  $M_S$  als  $R_S$ -Modul radikalvoll und unzerlegbar ist, mit  $\text{Koass}_{R_S}(M_S) = \{\mathcal{P}\}$  folgt jetzt, weil  $R_S$  lokal ist, nach ([8] Folgerung 1.3)  $\mathcal{P}^e \cdot M_S = 0$ , so daß  $M_S$  als  $R_S$ -Modul koprimär ist, also auch  $M$  als  $R$ -Modul.

**Folgerung 1.9.** *Sei  $M$  ein  $R$ -Modul von endlicher Goldie-Dimension, sei  $\text{Ass}(M)$  diskret und operiere auf  $M$  jeder Nichtnullteiler bijektiv. Dann gilt für jeden endlich erzeugten  $R$ -Modul  $A$ , daß  $\text{Hom}_R(A, M)$  darstellbar ist.*

Beweis. Jedes Element von  $S = R \setminus \cup \text{Ass}(M)$  operiert auf  $M$  bijektiv, also auch auf  $H = \text{Hom}_R(A, M)$ . Nach dem Lemma genügt es zu zeigen, daß  $H_S$  als  $R_S$ -Modul artinsch ist: Klar ist auch  $M_S$  als  $R_S$ -Modul endlich-dimensional, und weil  $\text{Ass}(M)$  endlich und diskret ist, ist jedes  $\mathcal{P} \in \text{Ass}_{R_S}(M_S)$  ein maximales Ideal im Ring  $R_S$ , d. h.  $M_S$  halbartinisch. Nach Matlis ist deshalb  $M_S$  sogar artinsch, also auch  $\text{Hom}_{R_S}(A_S, M_S) \cong H_S$ .

**Folgerung 1.10.** *Sei  $\mathfrak{p}$  ein Primideal von  $R$ ,  $M$  die injektive Hülle von  $R/\mathfrak{p}$  und  $S = R \setminus \mathfrak{p}$ . Ein Untermodul  $U$  von  $M$  ist genau dann darstellbar, wenn  $U$   $S$ -gesättigt in  $M$  ist.*

Beweis. Weil jedes  $s \in S$  auf  $M$  bijektiv operiert, ist nach dem Schlangenlemma  $(M/U)[s] \cong U/sU$ . Allein aus  $U \in \mathcal{A}'$  folgt daher, daß  $M/U$   $S$ -torsionsfrei, d. h.  $U$   $S$ -gesättigt in  $M$  ist, und aus dem letzteren folgt mit  $A = R$  und  $U$  statt  $M$  in (1.9), daß  $U$  darstellbar ist. (Es entsprechen also die darstellbaren Untermoduln von  $M$  gerade den  $R_{\mathfrak{p}}$ -Untermoduln von  $M_{\mathfrak{p}}$ , und mit Hilfe von (1.1) sieht man jetzt sofort, daß die  $\mathfrak{p}$ -koprimären Untermoduln von  $M$  gerade den endlich erzeugten  $R_{\mathfrak{p}}$ -Untermoduln  $\neq 0$  von  $M_{\mathfrak{p}}$  entsprechen.)



## 2. Darstellbare Moduln von endlicher Goldie-Dimension

Auf jedem darstellbaren  $R$ -Modul  $M$  operieren die Nichtnullteiler bijektiv, und in Spezialfällen (siehe 1.9) ist diese Eigenschaft sogar charakteristisch. Im allgemeinen ist sie aber viel schwächer, z. B. besitzt sie über einem lokalen Ring  $(R, \mathfrak{m})$  jeder  $R$ -Modul  $M$  mit  $L_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ . Definiert man die folgende Klasse  $\mathcal{A}''$  von  $R$ -Moduln durch  $M \in \mathcal{A}'' \iff$  Auf jedem Faktormodul von  $M$  operieren die Nichtnullteiler bijektiv, so gilt nach der Bemerkung 2 zu (1.4)  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$ , und das Hauptergebnis von Abschnitt 2 lautet, daß jeder Modul  $M \in \mathcal{A}''$  von endlicher Goldie-Dimension bereits darstellbar ist. Zusätzlich wollen wir in (2.4) die Darstellbarkeit von  $M$  durch die Lage von  $M$  in seiner injektiven Hülle  $Q$  beschreiben. – Mit  $L_x(M) = \sum_{i=1}^{\infty} M[x^i]$  gehört  $M$  genau dann zu  $\mathcal{A}''$ , wenn  $L_x(M) + xM = M$  ist für alle  $x \in R$ , d. h. wenn es zu jedem  $x \in R$  und  $a \in M$  eine Gleichung  $x^n(a - x b) = 0$  gibt mit  $b \in M$ ,  $n \geq 1$ . Aus dieser elementweisen Beschreibung folgt sofort, daß die Klasse  $\mathcal{A}''$  gegenüber Gruppen-erweiterungen und beliebigen direkten Summen abgeschlossen ist und jeder halbartinische Modul (als Summe seiner artinschen Untermoduln) zu ihr gehört. – Auch für nichtzyklische Ideale  $\mathfrak{a}$  definieren wir  $L_{\mathfrak{a}}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} M[\mathfrak{a}^i]$ , und bekanntlich heißt  $M$   $\mathfrak{a}$ -torsion (bzw.  $\mathfrak{a}$ -torsionsfrei), wenn  $L_{\mathfrak{a}}(M) = M$  (bzw.  $L_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ ) ist.

**Lemma 2.1.** Für jeden  $R$ -Modul  $M \in \mathcal{A}''$  gilt:

- (a)  $\cap \text{Koass}(M) \subset \cap \text{Ass}(M)$ .
- (b) Jeder koatomare Faktormodul von  $M$  ist halbartinisch.
- (c) Für jede Erweiterung  $M \subset N$  und jedes zyklische Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  gilt  $L_{\mathfrak{a}}(N/M) = (L_{\mathfrak{a}}(N) + M)/M$ .
- (d) Ein Untermodul  $U$  von  $M$  gehört genau dann zu  $\mathcal{A}''$ , wenn für jedes zyklische Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  gilt  $L_{\mathfrak{a}}(M/U) = (L_{\mathfrak{a}}(M) + U)/U$ .

**Beweis.** (a) Zu  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$ , also  $R/\mathfrak{p} \cong U \subset M$ , wähle man in der Menge  $\{V \subset M \mid V \cap U = 0\}$  ein maximales Element  $V_0$ , und aus  $\text{Ass}(M/V_0) = \{\mathfrak{p}\}$  folgt für jedes  $s \in R \setminus \mathfrak{p}$  nach Voraussetzung  $s \cdot M/V_0 = M/V_0$ , für jedes  $\mathfrak{q} \in \text{Koass}(M/V_0)$  also  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ , insbesondere  $\cap \text{Koass}(M) \subset \mathfrak{p}$ .

(b) Man kann gleich  $M$  als koatomar annehmen, und wählt man

zu  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$  die Untermoduln  $U$  und  $V_0$  wie in (a), folgt aus Koass  $(M/V_0) \subset \bar{\Omega}$  speziell  $\mathfrak{p} \in \bar{\Omega}$ .

(c) zu  $\bar{a} \in L_x(N/M)$ , d.h.  $x^e a \in M$  für ein  $e \geq 1$ , gibt es nach Voraussetzung eine Gleichung  $x^n(x^e a - x^e b) = 0$  mit  $b \in M$ ,  $n \geq 1$ , und damit ist  $a - b \in L_x(N)$ , also  $\bar{a} \in (L_x(N) + M)/M$ .

(d) Gelte  $L_a(M/U) = (L_a(M) + U)/U$  für alle zyklischen Ideale  $a$ . Um  $U \in \mathcal{A}''$  zu zeigen, sei  $x \in R$  und  $a \in U$ : Nach Voraussetzung gibt es eine Gleichung  $x^n(a - x b) = 0$  mit  $b \in M$ ,  $n \geq 1$ , aus  $\bar{b} \in L_x(M/U) = (L_x(M) + U)/U$  folgt  $x^m(b - b_1) = 0$  mit  $b_1 \in U$ ,  $m \geq n$ , und daraus wie gewünscht  $x^m(a - x b_1) = 0$ . Die Umkehrung folgt sofort mit (c).

Die „Rechtsexaktheit“ von  $L_a$  in Punkt (c) kann man nicht für alle Ideale  $a$  von  $R$  zeigen: In Beispiel (3.5) wird ein lokaler Integritätsring  $(R, \mathfrak{m})$  und eine Erweiterung  $M \subset N$  angegeben, in der  $M$  teilbar (also gewiß aus  $\mathcal{A}''$ ) ist und  $L_{\mathfrak{m}}(N) = 0$ ,  $L_{\mathfrak{m}}(N/M) \neq 0$ . Unter folgender Zusatzbedingung an  $\text{Ass}(M)$  erhält man aber:

**Lemma 2.2.** *Ist  $M \in \mathcal{A}''$  und  $\text{Ass}(M) \setminus \bar{\Omega}$  endlich, so gilt für jedes Ideal  $a$  von  $R$ :*

- (a)  $L_a(M) + aM = M$ .
- (b)  $L_a(N/M) = (L_a(N) + M)/M$  für jede Erweiterung  $M \subset N$ .

Beweis. (a) folgt unmittelbar aus (b), denn mit  $M_0 = aM$  ist auch  $M_0 \in \mathcal{A}''$  (als Faktormodul von  $M^m$ ) und  $\text{Ass}(M_0) \setminus \bar{\Omega}$  endlich, also  $(L_a(M) + M_0)/M_0 = L_a(M/M_0) = M/M_0$ .

Beim Beweis von (b) sei im 1. Schritt sogar  $\text{Ass}(M) \setminus \bar{\Omega} = \emptyset$ , d.h.  $M$  halbartinisch. Dann gilt für jeden Untermodul  $U$  von  $M$ , daß  $\text{Ass}(M/L_a(M) + U) \subset \text{Ass}(M/L_a(M))$ , also  $M/L_a(M) + U$   $a$ -torsionsfrei ist, d.h.  $L_a(M/U) = (L_a(M) + U)/U$ . Um die entsprechende Formel für  $M \subset N$  zu zeigen, sei  $N_1/M = L_a(N/M)$  und  $V_0$  ein maximales Element in der Menge  $\{V \subset N_1 \mid V \cap M = 0\}$ .  $\text{Ass}(N_1/V_0) = \text{Ass}(M) \subset \bar{\Omega}$  zeigt, daß auch  $N_1/V_0$  halbartinisch, also nach dem vorhergehenden  $L_a(N_1/V_0) + (M + V_0)/V_0 = N_1/V_0$  ist. Mit  $N_2/V_0 = L_a(N_1/V_0)$  heißt das  $N_2 + M = N_1$ , und weil die kanonische Abbildung  $N_2 \rightarrow N_2/V_0 \times N_1/M$  injektiv ist, ist auch  $N_2$   $a$ -torsion, also  $L_a(N_1) + M = N_1$ .

Sei im 2. Schritt nur  $M \in \mathcal{A}''$  und  $\text{Ass}(M) \setminus \bar{\Omega}$  endlich. Für jedes  $e \geq 1$  sei  $N_e/M = (N/M)[a^e]$ , und könnten wir  $L_a(N_e) + M = N_e$

zeigen, folgte aus  $L_a(N) + M \supset N_e$  für alle  $e \geq 1$  auch  $(L_a(N) + M)/M \supset \sum_{e=1}^{\infty} (N_e/M) = L_a(N/M)$  wie gewünscht. Statt  $N_e$  schreiben wir ab jetzt wieder  $N$  und wollen zusätzlich  $a^e \cdot N/M = 0$  annehmen. Mit dem größten halbartinischen Untermodul  $L(M) = \bigoplus L_m(M)$  von  $M$  ist nach Voraussetzung  $\text{Ass}(M/L(M))$  endlich, mit  $M_1/L(M) = L_a(M/L(M))$  also auch  $\text{Ass}(M/M_1)$  endlich, und weil  $M/M_1$   $a$ -torsionsfrei ist, gibt es ein  $x \in a$ , das kein Nullteiler auf  $M/M_1$  ist. Wegen  $M \in \mathcal{A}''$  operiert  $x$ , also auch  $x^e$  bijektiv auf  $M/M_1$ , es folgt  $\text{Ext}_R^1(N/M, M/M_1) = 0$ , und in  $V/M_1 \oplus M/M_1 = N/M_1$  ist  $a^e \cdot V/M_1 = 0$ , also auch  $V/L(M)$   $a$ -torsion. Nach dem ersten Schritt ist  $L_a(V) + L(M) = V$ , also  $L_a(V) + M = N$  wie gewünscht.

**Bemerkung.** Im Fall  $\dim(R) \leq 1$  ist die Zusatzbedingung an  $\text{Ass}(M)$  automatisch erfüllt, so daß für jeden  $R$ -Modul  $M \in \mathcal{A}''$  die Punkte (a) und (b) gelten (siehe auch 3.9).

**Lemma 2.3.** *Ist  $U$  ein artinscher Untermodul von  $M$  und  $M/U$  darstellbar, so ist auch  $M$  darstellbar.*

**Beweis.** Sei zuerst  $M/U$   $q$ -koprämär. Für ein Komplement  $V_o$  von  $U$  in  $M$ , d. h. ein minimales Element in der Menge  $\{V \subset M \mid V + U = M\}$ , gilt dann  $\text{Koass}(V_o) = \text{Koass}(M/U) = \{q\}$ , insbesondere  $\bigcap_{i=1}^{\infty} q^i V_o = 0$ . Aus  $q^e \cdot M/U = 0$  folgt aber auch  $q^e V_o \subset U$ , daraus  $q^f V_o = 0$  für ein  $f \geq e$ , und nach (1.1) bedeutet das, daß  $V_o$   $q$ -koprämär ist, also mit  $U$  auch  $V_o + U = M$  darstellbar ist.

Ist  $M/U$  nur darstellbar, folgt mit einer Koprämärerlegung  $M/U = M_1/U + \dots + M_n/U$ , daß nach dem ersten Schritt alle  $M_i$  darstellbar sind, also auch  $M = M_1 + \dots + M_n$ .

**Satz 2.4.** *Für einen  $R$ -Modul  $M$  von endlicher Goldie-Dimension sind äquivalent:*

- (i)  $M$  ist darstellbar.
- (ii)  $M \in \mathcal{A}''$ .
- (iii) Ist  $Q$  die injektive Hülle von  $M$ , so gilt  $L_a(Q/M) = (L_a(Q) + M)/M$  für alle Ideale  $a$  von  $R$ .

**Beweis.** (i  $\rightarrow$  ii) ist klar, ebenso (ii  $\rightarrow$  iii) nach (2.2, b), denn  $\text{Ass}(M)$  ist endlich. Weil  $Q$  als injektiver Modul zu  $\mathcal{A}''$  gehört, folgt (iii  $\rightarrow$  ii) nach (2.1, d), und es bleibt (ii  $\rightarrow$  i) zu beweisen:

Wegen  $M \in \mathcal{A}''$  operieren alle Elemente von  $S = R \setminus \text{Ass}(M)$  auf  $M$  bijektiv, so daß es nach (1.7) genügt zu zeigen, daß  $M_S$  als  $R_S$ -Modul darstellbar ist. Klar ist  $M_S$  als  $R_S$ -Modul wieder aus  $\mathcal{A}''$  und endlich-dimensional, außerdem der Ring  $R_S$  semilokal, so daß wir statt  $R_S$  wieder  $R$  schreiben und einen Induktionsbeweis über  $n = \dim(R)$  führen können. Bei  $n = 0$  ist  $M$  sogar artinsch. Bei  $n \geq 1$  betrachten wir zuerst  $N = M/L(M)$  und  $T = R \setminus \text{Ass}(N)$ : Weil eine Primidealkette  $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n$  mit  $\mathfrak{p}_n \cap T = \emptyset$  unmöglich ist (sonst wäre  $\mathfrak{p}_n$  ein maximales Ideal in  $R$  und  $\mathfrak{p}_n \in \text{Ass}(N)$ ), ist  $\dim(R_T) < n$ , also nach Induktion  $N_T$  als  $R_T$ -Modul darstellbar, so daß nach (1.7) auch  $N = M/L(M)$  als  $R$ -Modul darstellbar ist. Weil aber  $L(M)$  artinsch ist, folgt mit (2.3) die Darstellbarkeit von  $M$ .

**Folgerung 2.5.** *Sei  $M$  ein radikalvoller  $R$ -Modul, der der Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln genügt. Dann ist  $M$  darstellbar.*

Beweis. Nach ([7] Satz 2.3) ist  $M$  von endlicher Goldie-Dimension, und für jedes  $x \in R$  ist die absteigende Folge  $M \supset xM \supset x^2M \supset \dots$  stationär, d.h.  $M[x^e] + xM = M$  für ein  $e \geq 1$ . Also ist  $M \in \mathcal{A}''$ , und (ii  $\rightarrow$  i) liefert die Behauptung.

Ein Modul  $M$  heißt bekanntlich *Minimax-Modul*, wenn  $M$  einen endlich erzeugten Untermodul  $B$  besitzt, so daß  $M/B$  artinsch ist. Dann sind in jeder absteigenden Folge  $M \supset U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$  von Untermoduln fast alle Faktoren  $U_i/U_{i+1}$  endlich erzeugt, so daß  $M$  insbesondere die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln erfüllt. Als Spezialfall von (2.5) erhält man also:

**Folgerung 2.6.** *Jeder radikalvolle Minimax-Modul ist darstellbar.*

### 3. Moduln, für die $\text{Att}(M)$ diskret ist

Das Hauptergebnis dieses Abschnittes lautet, daß die in der Überschrift angegebenen Moduln darstellbar sind. Mit seiner Hilfe wird dann die Klasse aller darstellbaren  $R$ -Moduln im Falle  $\dim(R) \leq 1$  näher beschrieben.

**Lemma 3.1.** *Sei  $M$  ein  $R$ -Modul und  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$  gleichzeitig minimales und maximales Element von  $\text{Att}(M)$ . Dann gilt für  $V = \bigcap \{ sM \mid s \in R \setminus \mathfrak{p} \}$ :*

- (a)  $V$  ist der größte  $\mathfrak{p}$ -koprime Untermodul von  $M$ .  
 (b)  $V$  ist das einzige Komplement von  $\mathfrak{p}M$  in  $M$ .  
 (c) Es gibt ein  $e \geq 1$  mit  $\mathfrak{p}^e M = \mathfrak{p}^{e+1} M$ , und damit ist  $V = \text{Ann}_R(\mathfrak{p}^e M) \cdot M$ .

Beweis. Weil  $R$  noethersch ist, gibt es ein  $e \geq 1$  mit  $\text{Ann}_R(\mathfrak{p}^e M) = \text{Ann}_R(\mathfrak{p}^{e+1} M)$ , und wir behaupten, daß  $\mathfrak{p}$  kein Primdivisor von  $\mathfrak{c} = \text{Ann}_R(\mathfrak{p}^e M)$  sein kann: Andernfalls hätte man  $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(\bar{r})$  für ein  $\bar{r} \in R/\mathfrak{c}$ , aus  $\bar{r} \neq 0$  folgte  $r \notin \text{Ann}_R(\mathfrak{p}^{e+1} M)$ , d. h.  $r t \notin \mathfrak{c}$  für ein  $t \in \mathfrak{p}$ , und das ist unmöglich.

Ist nun  $\mathfrak{p}$  minimales und maximales Element von  $\text{Att}(M)$ , folgt  $\mathfrak{c}M + \mathfrak{p}M = M$ : Andernfalls hätte man ein  $\mathfrak{q} \in \text{Att}(M)$  mit  $\mathfrak{c} + \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ , aus  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$  folgte  $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{p}$ , so daß  $\mathfrak{p}$  auch minimal über  $\mathfrak{c}$  wäre im Widerspruch zur Vorbemerkung. Insbesondere erhält man aus  $\mathfrak{c}^e M = 0$ , daß  $\mathfrak{p}^e M = \mathfrak{p}^{e+1} M$  ist.  $\mathfrak{c}M$  ist sogar ein Komplement von  $\mathfrak{p}M$ , denn aus  $X \subset \mathfrak{c}M$ ,  $X + \mathfrak{p}M = M$  folgt  $\mathfrak{c}X = \mathfrak{c}M$ , also  $X = \mathfrak{c}M$ , und derselbe Beweis zeigt, daß  $\mathfrak{c}M$  das einzige Komplement von  $\mathfrak{p}M$  ist. Wegen  $\text{Koass}(\mathfrak{c}M) = \text{Koass}(M/\mathfrak{p}M) = \{\mathfrak{p}\}$  ist  $\mathfrak{c}M$  nach (1.1)  $\mathfrak{p}$ -koprime, insbesondere  $\mathfrak{c}M \subset V$ , und wegen  $\mathfrak{c} \not\subset \mathfrak{p}$  hat man noch ein  $s_0 \in \mathfrak{c} \cap R \setminus \mathfrak{p}$ , so daß aus  $V \subset s_0 M \subset \mathfrak{c}M$  folgt  $V = \mathfrak{c}M$  und alle drei Punkte bewiesen sind.

**Satz 3.2.** *Ist  $\text{Att}(M)$  diskret, so ist  $M$  darstellbar. Genauer gilt bei  $M \neq 0$ : Sind  $q_1, \dots, q_k$  die paarweise verschiedenen Elemente von  $\text{Att}(M)$ , so ist  $V_i = \bigcap \{sM \mid s \in R \setminus q_i\}$  der größte  $q_i$ -koprime Untermodul von  $M$  ( $1 \leq i \leq k$ ) und es ist  $M = V_1 + \dots + V_k$ .*

Beweis. Nach (3.1, a) ist nur noch die letzte Behauptung zu zeigen, und dazu sei  $M' = V_1 + \dots + V_k$ . Nach (3.1, b) gilt  $V_i + q_i M = M$  für alle  $i$ , mit  $\alpha = q_1 \dots q_k$  also  $M' + \alpha M = M$ . Aus  $\alpha \subset \bigcap \text{Att}(M) = \sqrt{\text{Ann}_R(M)}$  folgt aber  $\alpha^n M = 0$  für ein  $n \geq 1$ , also  $M' = M$ .

**Zusatz.** *Ist  $\text{Att}(M)$  diskret und  $\alpha$  ein Ideal von  $R$ , so hat  $\alpha M$  genau ein Komplement  $V$  in  $M$ , nämlich  $V = \text{Ann}_R(\bigcap_{i=1}^{\infty} \alpha^i M) \cdot M$ . Speziell ist  $\text{Ann}_R(P(M)) \cdot M \oplus P(M) = M$ .*

Beweis. Weil  $M$  darstellbar ist, gibt es ein  $e \geq 1$  mit  $\alpha^e M = \alpha^{e+1} M$ , so daß  $\alpha M$  und  $U = \bigcap_{i=1}^{\infty} \alpha^i M = \alpha^e M$  dieselben Summanden in  $M$  haben. Mit  $V = \text{Ann}_R(U) \cdot M$  folgt  $V + U = M$ : Andernfalls hätte man ein  $\mathfrak{q} \in \text{Att}(M)$  mit  $\text{Ann}_R(U) + \alpha^e \subset \mathfrak{q}$ , es folgte  $\mathfrak{q} \in \text{Att}(U)$  (weil

$q$  minimal über  $\text{Ann}_R(U)$  ist) sowie  $q U = U$ , und das ist unmöglich. Für jeden weiteren Summanden  $X$  von  $U$  in  $M$  gilt aber  $\text{Ann}_R(U) \cdot X = \text{Ann}_R(U) \cdot M$ , also  $V \subset X$ , so daß  $V$  wie behauptet das einzige Komplement von  $U$  in  $M$  ist.

Speziell zu  $P(M)$  gibt es nach (1.5) ein Ideal  $\mathfrak{b}$  mit  $\mathfrak{b} M = \mathfrak{b}^2 M = \dots = P(M)$ , so daß nach dem vorhergehenden  $V = \text{Ann}_R(P(M)) \cdot M$  das einzige Komplement von  $P(M)$  in  $M$  ist. Bleibt  $V \cap P(M) = 0$  zu zeigen: Bei  $P(M) = 0$  oder  $P(M) = M$  ist das klar, im nichttrivialen Fall aber wähle man die Numerierung der  $q_i$  in (3.2) so, daß die  $q_1, \dots, q_s \in \Omega$  sind und die  $q_{s+1}, \dots, q_k \notin \Omega$ . Mit  $A = V_1 + \dots + V_s$  und  $B = V_{s+1} + \dots + V_k$  gilt dann  $A + B = M$  und  $\text{Ann}_R(A) + \text{Ann}_R(B) = R$ , also sogar  $A \oplus B = M$ . Es folgt  $B = P(M)$  und  $\text{Ann}_R(P(M)) \cdot A = V$ , also auch  $A = V$  wie gewünscht.

**Lemma 3.3.** *Sei  $U$  ein Untermodul von  $M$ , so daß  $U$  und  $M/U$  darstellbar sind. Gelte zusätzlich, daß aus  $\mathfrak{p} \in \text{Koass}(U)$ ,  $q \in \text{Koass}(M/U)$  und  $\mathfrak{p} \subset q$  stets folgt  $\mathfrak{p} = q$ . Dann ist auch  $M$  darstellbar.*

**Beweis.** Sei zuerst  $M/U$   $q$ -koprämär. Falls  $q \notin \text{Koass}(U)$ , folgt mit  $V = \text{Ann}_R(U) \cdot M$ , daß  $V + U = M$  ist: Andernfalls hätte man  $\text{Ann}_R(U) \subset q$ , dazu einen minimalen Primdivisor  $\mathfrak{p}$  von  $\text{Ann}_R(U)$  mit  $\mathfrak{p} \subset q$ , und  $\mathfrak{p} \in \text{Att}(U) = \text{Koass}(U)$  lieferte nach Voraussetzung  $\mathfrak{p} = q$ , entgegen der Annahme. Nun gibt es aber einen Epimorphismus  $(M/U)^m \rightarrow \text{Ann}_R(U) \cdot M$ , so daß mit  $M/U$  auch  $V$   $q$ -koprämär ist, also  $V + U = M$  wie behauptet darstellbar. Falls  $q \in \text{Koass}(U)$ , gibt es nach (1.4, b) einen darstellbaren Untermodul  $U_1$  von  $U$  mit  $\text{Koass}(U_1) = \text{Koass}(U) \setminus \{q\}$ ,  $\text{Koass}(U/U_1) = \{q\}$ . Nach (1.2, b) ist dann  $M/M_1$   $q$ -koprämär, aus  $\mathfrak{p} \in \text{Koass}(U_1)$ ,  $\mathfrak{p} \subset q$  folgt stets  $\mathfrak{p} = q$ , so daß wegen  $q \notin \text{Koass}(U_1)$  nach dem ersten Fall  $M$  wieder darstellbar ist.

Ist nun  $M/U$  darstellbar  $\neq 0$ , wähle man eine Koprämärzerlegung  $M/U = M_1/U + \dots + M_n/U$ , in der kein  $M_i/U$  überflüssig ist. Für  $\text{Koass}(M_i/U) = \{q_i\}$  gilt dann  $q_i \in \text{Koass}(M/U)$  nach dem Beweis von (1.4, a), so daß aus  $\mathfrak{p} \in \text{Koass}(U)$ ,  $\mathfrak{p} \subset q_i$  stets folgt  $\mathfrak{p} = q_i$ . Nach dem ersten Teil sind daher alle  $M_i$  darstellbar, also auch  $M = M_1 + \dots + M_n$ .

Die Zusatzbedingung im Lemma ist z. B. dann erfüllt, wenn  $\text{Koass}(U)$  nur aus maximalen Idealen besteht, d. h. man erhält als Spezialfall:

**Folgerung 3.4.** Sei  $U$  ein Untermodul von  $M$ , so daß  $R/\text{Ann}_R(U)$  artinsch und  $M/U$  darstellbar ist. Dann ist auch  $M$  darstellbar.

Daß man ohne die Zusatzbedingung in (3.3) nicht auskommt, zeigt das folgende Beispiel 3.5. Sei  $R$  ein lokaler Integritätsring mit  $\dim(R) = 2$ , sei  $k = R/\mathfrak{m}$  der Restklassenkörper,  $K$  der Quotientenkörper und  $T$  die globale Transformation von  $R$ , d. h.  $T/R = L_{\mathfrak{m}}(K/R)$ . Dann ist  $\text{Ext}_R^i(k, T) = 0$  für  $i = 0, 1$  und  $\text{Ext}_R^2(k, T) \neq 0$ , also auch  $\text{Ext}_R^1(k, K/T) \neq 0$ , d. h. es gibt eine nicht-zerfallende exakte Folge

$$0 \rightarrow K/T \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} k \rightarrow 0,$$

in der dann  $U = \text{Bi} \alpha$  0-koprimär und  $M/U$  m-koprimär ist. Weil aber  $U$  nicht direkter Summand, also groß in  $M$  ist, folgt aus  $L_{\mathfrak{m}}(K/T) = 0$  auch  $L_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ , insbesondere  $M[\mathfrak{m}^e] + \mathfrak{m}M \neq M$  für alle  $e \geq 1$ , so daß  $M$  nicht darstellbar ist. (Genauer ist  $M \notin \mathcal{A}$ , aber natürlich  $M \in \mathcal{A}'$ . Die Ungleichung  $L_{\mathfrak{m}}(M) + \mathfrak{m}M \neq M$  und (2.2, a) zeigen überdies, daß  $\text{Ass}(M)$  unendlich sein muß. Tatsächlich gehört jedes Primideal der Höhe 1 zu  $\text{Ass}(K/T)$ , und davon gibt es nach dem Krull'schen Hauptidealsatz unendlich viele).

**Satz 3.6.** Ist  $\dim(R) \leq 1$ , so gilt:

- (a) Jeder radikalvolle  $R$ -Modul ist darstellbar.
- (b) Ist  $M$  darstellbar und  $U$  ein Untermodul von  $M$  mit  $\text{So}(M/U) = 0$ , so ist auch  $U$  darstellbar.
- (c) Ist  $U$  ein Untermodul von  $M$ , so daß  $U$  und  $M/U$  darstellbar sind, so ist auch  $M$  darstellbar.

**Beweis.** (a) Ist  $M$  radikalvoll, hat jedes  $\mathfrak{p} \in \text{Att}(M)$  die Höhe Null, so daß  $M$  nach (3.2) darstellbar ist.

(b) Sei zuerst  $M$  radikalvoll und  $\text{So}(M/U) = 0$ . Dann ist auch  $U$  radikalvoll, denn zu jedem  $\mathfrak{m} \in \Omega$  gibt es ein  $r \in \mathfrak{m}$  derart, daß  $R/(r)$  artinsch ist, und aus  $rM = M$ ,  $(M/U)[r] = 0$  folgt dann  $rU = U$ , also erst recht  $\mathfrak{m}U = U$ . Ist aber  $M$  nur darstellbar, also  $M[\mathfrak{b}] + P(M) = M$  wie in (1.5), folgt wegen  $M[\mathfrak{b}] \subset U$  auch  $U[\mathfrak{b}] + P(M) \cap U = U$ , darin ist  $P(M) \cap U$  nach dem ersten Schritt radikalvoll (also gleich  $P(U)$ ), und mit (a) folgt die Behauptung.

(c) Wie in den Beweisen von (2.3) und (3.3) kann man gleich  $M/U$  als  $\mathfrak{q}$ -koprimär annehmen. Falls  $\mathfrak{q} \notin \Omega$ , ist die Zusatzbedingung in (3.3) erfüllt, also  $M$  darstellbar. Falls  $\mathfrak{q} \in \Omega$ , gibt es ein Ideal  $\mathfrak{b}$ , so daß  $R/\mathfrak{b}$  artinsch und  $P(M) = \mathfrak{b}M$  ist (weil das nach (1.5) für  $U$  gilt und

$q^e \cdot M/U = 0$  ist), dazu ein  $r \in \mathfrak{b}$ , so daß auch  $R/(r)$  artinsch ist, und es folgt  $P(M) = rM = r^2M$ ,  $M[r] + P(M) = M$ , also wieder mit (a) die Behauptung.

**Zusatz.** Jede der drei Aussagen im Satz ist charakteristisch für  $\dim(R) \leq 1$ . Betrachten wir zum Beweis etwas allgemeiner die folgenden drei Ringeigenschaften: ( $\alpha$ ) Jeder radikalvolle  $R$ -Modul gehört zu  $\mathcal{A}''$ . ( $\beta$ ) Ist  $M$  ein injektiver  $R$ -Modul und  $U$  ein Untermodul von  $M$  mit  $\text{So}(M/U) = 0$ , so folgt  $U \in \mathcal{A}''$ . ( $\gamma$ ) Ist  $M$  ein  $R$ -Modul,  $U$  ein maximaler Untermodul von  $M$  und  $U$  darstellbar, so folgt  $M \in \mathcal{A}$ . Dann behaupten wir, daß aus jeder von ihnen  $\dim(R) \leq 1$  folgt.

**Beweis.** ( $\alpha$ ) Sei  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \setminus \Omega$  und  $M$  die injektive Hülle von  $R/\mathfrak{p}$ . Mit  $S = R \setminus \mathfrak{p}$  ist dann  $M_S$  als  $R_S$ -Modul artinsch, d. h.  $M$  erfüllt die Minimalbedingung für  $S$ -gesättigte Untermoduln. Nach Voraussetzung ist nun jeder radikalvolle Untermodul  $U$  von  $M$   $S$ -teilbar, d. h.  $S$ -gesättigt in  $M$ , und die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln impliziert nach ([7] Satz 2.3)  $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$ .

( $\beta$ ) Sind  $\mathfrak{p}$ ,  $M$  und  $S$  wie in Teil ( $\alpha$ ), so ist jetzt jeder Untermodul  $U$  von  $M$ , mit  $\text{So}(M/U) = 0$ , nach Voraussetzung  $S$ -gesättigt in  $M$ . Aus der Minimalbedingung für Untermoduln  $U$  mit  $\text{So}(M/U) = 0$  folgt aber nach ([7] Satz 1.6)  $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$ .

( $\gamma$ ) Wir zeigen im 1. Schritt für jeden darstellbaren  $R$ -Modul  $A$ : Ist  $A[\mathfrak{m}] = 0$  für ein  $\mathfrak{m} \in \Omega$ , folgt  $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, A) = 0$  für alle  $i \geq 1$ . Bei  $i = 1$  gilt nämlich für jede Erweiterung  $A \subset B$  mit  $B/A \cong R/\mathfrak{m}$ , daß nach Voraussetzung  $B \in \mathcal{A}$ , insbesondere  $B[\mathfrak{m}^e] + \mathfrak{m}B = B$  ist für ein  $e \geq 1$ , und weil  $A$   $\mathfrak{m}$ -teilbar, also schon  $A = \mathfrak{m}B$  ist, folgt  $B[\mathfrak{m}^e] \oplus A = B$  wie verlangt. Bei  $i > 1$  wähle man eine injektive Hülle  $A \subset Q$ , für die ebenfalls  $Q[\mathfrak{m}] = 0$  ist, mit  $\text{Ext}_R^1(R/\mathfrak{m}, A) = 0$  folgt  $(Q/A)[\mathfrak{m}] = 0$ , so daß für den darstellbaren Modul  $Q/A$  nach Induktion  $\text{Ext}_R^{i-1}(R/\mathfrak{m}, Q/A) = 0$  ist, also  $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, A) = 0$  wie behauptet.

Sei im 2. Schritt  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \setminus \Omega$ ,  $M$  die injektive Hülle von  $M_0 = R/\mathfrak{p}$  und  $M_0 \subset U \subset M$  definiert durch  $U/M_0 = L(M/M_0)$ . Für jedes  $\mathfrak{m} \in \Omega$  ist dann  $(M/U)[\mathfrak{m}] = 0$ , also nach dem ersten Schritt  $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, M/U) = 0$  für alle  $i \geq 1$ . Aus  $\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, U) = 0$  für alle  $i \geq 0$  folgt aber nach Foxby ([1] Corollary 1.5)  $\mathfrak{m}U = U$ . Damit ist  $U$  radikalvoll, und weil  $U$  Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen halbartinschen Modul ist, folgt nach ([7] Lemma 1.1, e)  $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$ .



**Folgerung 3.7.** *Ist  $\dim(R) \leq 1$  und  $M$  ein radikalvoller, sockelfreier  $R$ -Modul  $\neq 0$ , so gilt mit den Bezeichnungen von (3.2)  $M = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ .*

*Beweis.* Auch ohne Bedingung an den Sockel gilt mit  $U_i = V_1 + \dots + \widehat{V_i} + \dots + V_k$ , daß  $V_i \cap U_i$  halbartinsch ist, denn aus  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(V_i \cap U_i)$  folgt  $q_i \subset \mathfrak{p}$  und  $q_j \subset \mathfrak{p}$  für ein  $j \neq i$ , also  $h(\mathfrak{p}) \neq 0$ ,  $\mathfrak{p} \in \Omega$ . Bei  $\text{So}(M) = 0$  ist also die Summe  $M = V_1 + \dots + V_k$  direkt.

Durch einfaches Zusammenfassen von (3.6, a) mit (3.4) und (2.2, a) erhält man schließlich die beiden folgenden Charakterisierungen:

**Folgerung 3.8.** *Ist  $\dim(R) \leq 1$ , so ist ein  $R$ -Modul  $M$  genau dann darstellbar, wenn  $M$  einen Untermodul  $U$  besitzt, so daß  $R/\text{Ann}_R(U)$  artinsch und  $M/U$  radikalvoll ist.*

**Folgerung 3.9.** *Ist  $\dim(R) \leq 1$ , so gehört ein  $R$ -Modul  $M$  genau dann zur Klasse  $\mathcal{A}''$ , wenn  $M/L(M)$  radikalvoll ist.*

#### 4. Die Klasse $\mathcal{A}'$

Wählt man in einem darstellbaren Modul  $M \neq 0$  eine Koprимärzerlegung  $M = U_1 + \dots + U_n$  derart, daß kein  $U_i$  überflüssig ist, so erhält man mit  $M_i = U_1 + \dots + U_i$  eine Folge von Untermoduln  $0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$ , in der alle Faktoren  $M_i/M_{i-1}$  koprimär sind. Es erhebt sich die Frage, wann ein  $R$ -Modul  $M$  solch eine Kompositionsreihe mit koprimären Faktoren besitzt. Nach dem Beispiel in (3.5) braucht  $M$  nicht darstellbar zu sein, aber es ist sofort zu sehen, daß  $\text{Koass}(M)$  endlich ist und daß es zu jedem Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  ein  $e \geq 1$  gibt mit  $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$ , d. h.  $M \in \mathcal{A}'$  ist. Wir zeigen in (4.2), daß diese beiden Bedingungen auch hinreichend sind und fügen eine weitere Charakterisierung durch die Untermoduln  $H_{\mathfrak{G}}(M) = \bigcap \{ \mathfrak{a}M \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{G} \}$  ( $\mathfrak{G}$  eine Gabriel-Topologie auf  $R$ ) hinzu. Im Rest dieses Abschnittes untersuchen wir die Klasse  $\mathcal{A}'$  speziell über 1-dimensionalen Ringen, zeigen, daß sie dort mit  $\mathcal{A}$  übereinstimmt und geben eine explizite Beschreibung ihrer Elemente an (4.7).

**Lemma 4.1.** *Für jeden  $R$ -Modul  $M \in \mathcal{A}'$  gilt:*

(a) *Jedes attachierte Primideal ist Durchschnitt von koassozierten.*

- (b) Ist  $\mathfrak{G}$  eine Gabriel-Topologie auf  $R$  und ist  $\text{Koass}(M) \cap \mathfrak{G}$  endlich, so gibt es ein  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$  mit  $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$ .
- (c) Ist  $M$  durch fast alle maximalen Ideale teilbar, so gibt es ein Ideal  $\mathfrak{b}$  von  $R$ , so daß  $R/\mathfrak{b}$  artinsch ist und  $P(M) = \mathfrak{b} M$ .

Beweis. (a) Sei  $\mathfrak{p} \in \text{Att}(M)$ , d. h.  $\mathfrak{p} = \text{Ann}_R(\overline{M})$  mit  $\overline{M} = M/U$ . Zu  $\mathfrak{a} = \bigcap \text{Koass}(\overline{M})$  gibt es ein  $e \geq 1$  mit  $\mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M$ , aus  $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i \overline{M} = 0$  folgt  $\mathfrak{a}^e \overline{M} = 0$ , und in  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$  gilt dann Gleichheit.

(b) Falls  $\text{Koass}(M) \cap \mathfrak{G} = \emptyset$ , gilt  $\mathfrak{a} M = M$  für alle  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ , und man kann  $\mathfrak{b} = R$  wählen. Falls  $\text{Koass}(M) \cap \mathfrak{G} = \{q_1, \dots, q_n\}$  (paarweise verschieden), gilt nach Voraussetzung  $q_i^e M = q_i^{e+1} M$  ( $1 \leq i \leq n$ ) für ein gemeinsames  $e \geq 1$ , und dann leistet  $\mathfrak{b} = (q_1 \dots q_n)^e \in \mathfrak{G}$  das Gewünschte: Klar ist  $H_{\mathfrak{G}}(M) \subset \mathfrak{b} M$ , und für die Inklusion  $\supset$  sei  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{a} M \neq M$ . Dann ist  $\text{Koass}(M/\mathfrak{a} M) = \{p_1, \dots, p_s\}$  mit paarweise verschiedenen  $p_j \in \{q_1, \dots, q_n\}$ , also  $q_1 \dots q_n \subset p_1 \dots p_s$ , außerdem  $\bigcap_{j=1}^s p_j = \sqrt{\text{Ann}_R(M/\mathfrak{a} M)}$  nach (a), also  $(p_1 \dots p_s)^{em} \subset \text{Ann}_R(M/\mathfrak{a} M)$  für ein  $m \geq 1$ , und zusammen folgt  $\mathfrak{b}^m M \subset \mathfrak{a} M$ . Nun ist aber  $q_i \mathfrak{b} M = \mathfrak{b} M$  für alle  $1 \leq i \leq n$ , also schließlich  $\mathfrak{b}^2 M = \mathfrak{b} M$ , und  $\mathfrak{b} M \subset \mathfrak{a} M$  war zu zeigen.

(c) Für die Gabriel-Topologie  $\mathfrak{G} = \{ \mathfrak{a} \subset R \mid R/\mathfrak{a} \text{ ist artinsch} \}$  gilt stets  $P(M) \subset H_{\mathfrak{G}}(M)$ . Nach Voraussetzung ist  $\text{Koass}(M) \cap \mathfrak{G}$  endlich, also nach (b)  $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$  für ein  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$ , und weil dann  $\mathfrak{b} M$  radikalvoll ist, folgt  $P(M) = \mathfrak{b} M$ .

**Satz 4.2.** Für einen  $R$ -Modul  $M \neq 0$  sind äquivalent:

- (i)  $M$  besitzt eine Folge von Untermoduln  $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$ , in der alle Faktoren  $M_i/M_{i-1}$  koprämär sind.
- (ii)  $M \in \mathcal{A}'$  und  $\text{Koass}(M)$  ist endlich.
- (iii) Zu jeder Gabriel-Topologie  $\mathfrak{G}$  auf  $R$  gibt es ein  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$  mit  $H_{\mathfrak{G}}(M) = \mathfrak{b} M$ .

Erfüllt  $M$  diese äquivalenten Bedingungen, so ist  $\text{Koass}(M) = \text{Att}(M)$ , und für jedes minimale Element  $\mathfrak{p}$  von  $\text{Att}(M)$  gilt, daß  $V = \bigcap \{ s M \mid s \in R \setminus \mathfrak{p} \}$  der größte  $\mathfrak{p}$ -koprämäre Untermodul von  $M$  ist.

Beweis. (i  $\rightarrow$  ii) Jeder koprämäre Modul gehört zu  $\mathcal{A}'$ , und weil  $\mathcal{A}'$  gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist, folgt  $M \in \mathcal{A}'$ . Mit  $\text{Koass}(M_i/M_{i-1}) = \{ p_i \}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) gilt auch  $\text{Koass}(M) \subset \{ p_1, \dots, p_n \}$ . (ii  $\rightarrow$  i) Nach (4.1, a) ist  $\text{Att}(M) = \text{Koass}(M)$ , so daß wir einen Induktionsbeweis über  $d = |\text{Att}(M)|$  führen können. Bei

$d = 1$  ist  $M$  nach (1.1) selbst koprimär. Bei  $d > 1$  wähle man ein maximales Element  $q$  in  $\text{Att}(M)$ , und mit  $M' = \bigcap_{i=1}^{\infty} q^i M = q^e M$  ist dann  $M/M'$  nach (1.2, a) koprimär, während  $M'$  als Faktormodul von  $M^n$  wieder aus  $\mathcal{A}'$  ist mit  $\text{Att}(M') \subset \text{Att}(M)$ . Wegen  $q \notin \text{Att}(M')$  ist diese Inklusion echt, so daß es nach Induktion eine Folge  $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_{n-1} = M'$  gibt mit koprimären  $M_i/M_{i-1}$ .

(ii  $\rightarrow$  iii) Das ist ein Spezialfall von (4.1, b). (iii  $\rightarrow$  ii) Es ist  $M \in \mathcal{A}'$ , denn für jedes Ideal  $a$  enthält die von  $a$  erzeugte Gabriel-Topologie  $\mathfrak{G}$  (siehe [5] p. 150) nach Voraussetzung ein Ideal  $b$  mit  $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i M = b M$ , und mit  $a^e \subset b$  folgt  $a^e M = a^{e+1} M$ . Mittels der Abbildung  $\text{Spec}(R) \ni p \mapsto h(p) \in N$  sieht man, daß eine Teilmenge  $Y$  von  $\text{Spec}(R)$  genau dann endlich ist, wenn jede diskrete Teilmenge von  $Y$  endlich ist. Wäre also  $\text{Koass}(M)$  nicht endlich, gäbe es paarweise unvergleichbare  $p_1, p_2, p_3, \dots \in \text{Koass}(M)$ , und die von den  $p_i$  erzeugte Gabriel-Topologie  $\mathfrak{G}$  enthielte nach Voraussetzung ein Ideal  $b$  mit  $H_{\mathfrak{G}}(M) = b M$ . Mit  $(p_1 \dots p_m)^e \subset b$  folgte  $p_{m+1} b M = b M$ , also  $p_{m+1} \notin \text{Koass}(b M)$ ,  $p_{m+1} \in \text{Koass}(M/b M)$ , daraus  $b \subset p_{m+1}$ ,  $p_i \subset p_{m+1}$  für ein  $i \in \{1, \dots, m\}$ , und das ist der gewünschte Widerspruch.

Im Zusatz haben wir  $\text{Koass}(M) = \text{Att}(M)$  bereits bewiesen. Ist aber  $p$  ein minimales Element von  $\text{Att}(M)$  und  $S = R \setminus p$ , folgt für die Gabriel-Topologie  $\mathfrak{G} = \{a \subset R \mid a \cap S \neq \emptyset\}$  und  $V = H_{\mathfrak{G}}(M)$ , daß es ein  $s_0 \in S$  gibt mit  $V = s_0 M$ . Damit ist  $V$   $S$ -teilbar  $\neq 0$ , für jedes  $q \in \text{Att}(V)$  ist  $q \cap S = \emptyset$  und  $q \in \text{Att}(M)$ , so daß in  $q \subset p$  Gleichheit gilt, und  $\text{Att}(V) = \{p\}$  bedeutet nach (1.1), daß  $V$   $p$ -koprimär ist. Weil schließlich jeder  $p$ -koprimäre Untermodul von  $M$   $S$ -teilbar ist, also in  $V$  liegt, ist alles gezeigt. (Unter der stärkeren Voraussetzung, daß  $M$  darstellbar ist, wurde die letzte Aussage über  $V = \bigcap s M$  auch in ([2] p. 574 und [3] p. 31) bewiesen.)

**Folgerung 4.3.** *Besitzt ein  $R$ -Modul  $M$  die Minimalbedingung für alle Untermoduln der Form  $U = a M$ , so erfüllt  $M$  die äquivalenten Bedingungen in (4.2).*

**Beweis.** Um (iii) zu zeigen, wähle man in der Menge  $\{a M \mid a \in \mathfrak{G}\}$  ein minimales Element  $a_0 M$ , und dafür folgt  $H_{\mathfrak{G}}(M) = a_0 M$ .

Um die Klasse  $\mathcal{A}'$  näher zu beschreiben, müssen wir als erstes zeigen, daß die Bedingung  $a^e M = a^{e+1} M$  nicht für alle Ideale  $a$  zu testen ist:

**Lemma 4.4.** Für einen  $R$ -Modul  $M$  sind äquivalent:

- (i)  $M \in \mathcal{A}'$ .
- (ii) Zu jedem  $x \in R$  gibt es ein  $e \geq 1$  mit  $x^e M = x^{e+1} M$ .
- (iii) Zu jedem  $\mathfrak{p} \in \text{Att}(M)$  gibt es ein  $e \geq 1$  mit  $\mathfrak{p}^e M = \mathfrak{p}^{e+1} M$ .

Beweis. Klar ist (i  $\rightarrow$  ii) und (i  $\rightarrow$  iii), und zur Umkehrung betrachten wir für einen beliebigen  $R$ -Modul  $M$  die Idealmenge  $\Delta(M) = \{ \mathfrak{a} \subset R \mid \text{es gibt ein } e \geq 1 \text{ mit } \mathfrak{a}^e M = \mathfrak{a}^{e+1} M \}$ . Für sie gelten folgende Rechenregeln, deren Beweis dem Leser überlassen sei: ①  $\mathfrak{a} \in \Delta(M) \iff \sqrt{\mathfrak{a}} \in \Delta(M) \iff \mathfrak{a} + \text{Ann}_R(M) \in \Delta(M)$ . ②  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \Delta(M) \Rightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \in \Delta(M)$ . Bei (ii  $\rightarrow$  i) ist also  $\mathfrak{a} \in \Delta(M)$  für alle Ideale  $\mathfrak{a}$  von  $R$  zu zeigen, und das geht durch Induktion über die Erzeugendenanzahl sofort mit ②. Bei (iii  $\rightarrow$  i) nehmen wir  $M \notin \mathcal{A}'$  an, und dann hat die Menge aller Ideale  $\mathfrak{a} \notin \Delta(M)$  ein maximales Element  $\mathfrak{a}_0$ . Nach ① ist  $\mathfrak{a}_0 \not\subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_0}$  unmöglich, in  $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_n$  muß dann nach ② ein  $\mathfrak{p}_j$  mit  $\mathfrak{a}_0$  übereinstimmen, d. h.  $\mathfrak{a}_0$  ist ein Primideal. Für  $\mathfrak{b}_0 = \text{Ann}_R(M/\mathfrak{a}_0 M)$  gilt nun  $\mathfrak{a}_0 M = \mathfrak{b}_0 M$ , also auch  $\mathfrak{b}_0 \notin \Delta(M)$ , so daß in  $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{b}_0$  Gleichheit folgt, und  $\mathfrak{a}_0 \in \text{Att}(M) \setminus \Delta(M)$  steht im Widerspruch zur Voraussetzung (iii).

**Zusatz.** In (iii) genügt es, alle  $\mathfrak{p} \in \text{Att}(M)$  zu testen, die nicht minimal über  $\text{Ann}_R(M)$  sind.

Beweis. Ist  $M \neq 0$ , so zeigen wir zuerst für jeden minimalen Primdivisor  $\mathfrak{q}$  von  $\text{Ann}_R(M)$ , daß  $\overline{M} = M/\mathfrak{q}M$  aus  $\mathcal{A}'$  ist: Nach (4.4) ist nur  $\mathfrak{p} \in \Delta(\overline{M})$  für alle  $\mathfrak{p} \in \text{Att}(\overline{M})$  zu zeigen, und bei  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$  ist sogar  $\mathfrak{p}\overline{M} = 0$ , bei  $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}$  gilt nach Voraussetzung  $\mathfrak{p}^e M = \mathfrak{p}^{e+1} M$  für ein  $e \geq 1$ , also auch  $\mathfrak{p}^e \overline{M} = \mathfrak{p}^{e+1} \overline{M}$ .

Seien nun  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$  alle minimalen Primdivisoren von  $\text{Ann}_R(M)$ . Dann gibt es ein  $m \geq 1$  mit  $(\mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_n)^m \subset \text{Ann}_R(M)$ , und weil alle  $M/\mathfrak{q}_i M$  aus  $\mathcal{A}'$  sind, gilt das auch für  $M/(\mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_n)^m M$ , d. h. für  $M$ .

**Folgerung 4.5.** Sei  $\dim(R) \leq 1$ ,  $M$  ein  $R$ -Modul und  $U$  ein Untermodul von  $M$ .

- (a) Genau dann ist  $M \in \mathcal{A}'$ , wenn es zu jedem maximalen Ideal  $\mathfrak{m}$  von  $R$  ein  $e \geq 1$  gibt mit  $\mathfrak{m}^e M = \mathfrak{m}^{e+1} M$ .
- (b) Ist  $M \in \mathcal{A}'$  und  $\text{So}(M/U) = 0$ , so ist auch  $U \in \mathcal{A}'$ .

Beweis. (a) folgt unmittelbar aus dem Zusatz, und auch in (b) ist nur jedes  $\mathfrak{m} \in \Omega$  zu testen: Es gibt ein  $r \in \mathfrak{m}$ , so daß  $R/(r)$  artinsch ist,

dazu ein  $n \geq 1$  mit  $r^n M = r^{n+1} M$ , und wegen  $(M/U)[r^{n+1}] = 0$  folgt  $r^n U = r^{n+1} U$ . Weil aber  $U_1 = U[r^n]$  darstellbar ist, gibt es ein  $e \geq 1$  mit  $U_1[m^e] + m U_1 = U_1$ , und aus  $U_1 + r U = U$  folgt  $U[m^e] + m U = U$ ,  $m^e U = m^{e+1} U$  wie gewünscht. (Beide Aussagen sind charakteristisch für  $\dim(R) \leq 1$ , wie die Zusätze ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ) nach (3.6) zeigen.)

**Lemma 4.6.** *Sei  $U$  ein koatomarer Untermodul von  $M$  und sei  $U \in \mathcal{A}'$ ,  $M/U \in \mathcal{A}$ . Dann folgt  $M \in \mathcal{A}$ .*

**Beweis.** Wir zeigen im 1. Schritt für einen beliebigen  $R$ -Modul  $M$ : Ist  $\alpha^e M = \alpha^{e+1} M$  koatomar, so folgt bereits  $M[\alpha^e] \oplus \alpha^e M = M$ . Zum Beweis sei  $\mathfrak{b} = \alpha^e = (x_1, \dots, x_m)$ . Dann gibt es einen Monomorphismus  $M/M[\mathfrak{b}] \rightarrow (\mathfrak{b} M)^m$ , und weil das Ziel koatomar und  $\mathfrak{b}$ -teilbar ist, sind auch alle Untermoduln  $\mathfrak{b}$ -teilbar ([6] Lemma 1.1), insbesondere  $M/M[\mathfrak{b}]$ , d. h. es ist  $M[\mathfrak{b}] + \mathfrak{b} M = M$ . Auch  $M[\mathfrak{b}] \cap \mathfrak{b} M$  ist  $\mathfrak{b}$ -teilbar, außerdem durch  $\mathfrak{b}$  annulliert, also wie behauptet Null.

Sei im 2. Schritt  $U \subset M$  wie angegeben. Zu jedem Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  hat man ein  $e \geq 1$  mit  $\alpha^e U = \alpha^{e+1} U$ , weiter ein  $f \geq 1$  mit  $(M/U)[\alpha^f] + \mathfrak{a} \cdot M/U = M/U$ , und mit  $(M/U)[\alpha^f] = M_1/U$  folgt  $\alpha^f M_1 \subset U$ ,  $\alpha^{e+f} M_1 = \alpha^{e+f+1} M_1$ . Nach dem ersten Schritt bedeutet das  $M_1[\alpha^{e+f}] \oplus \alpha^{e+f} M_1 = M_1$ , und Addition von  $\mathfrak{a} M$  liefert  $M_1[\alpha^{e+f}] + \mathfrak{a} M = M$ .

**Satz 4.7.** *Ist  $\dim(R) \leq 1$ , so sind für einen  $R$ -Modul äquivalent:*

- (i)  $M \in \mathcal{A}'$ .
- (ii)  $M \in \mathcal{A}$ .
- (iii)  $M$  besitzt einen koatomaren, halbartinischen Untermodul  $U$ , so daß  $M/U$  radikalvoll ist.

**Beweis.** Klar ist (ii  $\rightarrow$  i), und bei (i  $\rightarrow$  iii) ist nach (4.5, b) auch  $L(M) \in \mathcal{A}'$ . Mit  $\Omega = \{m_i \mid i \in I\}$ ,  $X_i = L_{m_i}(M)$  folgt aus  $L(M) = \bigoplus_{i \in I} X_i$ , daß jedes  $X_i \in \mathcal{A}'$  ist, und der Beweis von (4.5, b) zeigte genauer, daß es zu jedem  $i \in I$  ein  $e_i \geq 1$  gibt mit  $X_i[m_i^{e_i}] + P(X_i) = X_i$ . Damit ist  $U = \bigoplus_{i \in I} X_i[m_i^{e_i}]$  koatomar und  $L(M)/U$  radikalvoll, und weil nach (2.2, a)  $M/L(M)$  radikalvoll ist, gilt das auch für  $M/U$ .

(iii  $\rightarrow$  ii) Ist  $U \subset M$  wie angegeben, so hat man für jedes  $m \in \Omega$  eine Zerlegung  $U = L_m(U) \oplus U'$  und ein  $e \geq 1$  mit  $m^e \cdot L_m(U) = 0$  ([6] Lemma 1.2), so daß wegen  $m U' = U'$  folgt  $m^e U = m^{e+1} U$ . Nach (4.5, a) ist deshalb  $U \in \mathcal{A}'$ , nach (3.6, a) aber  $M/U$  sogar darstellbar, also nach (4.6)  $M \in \mathcal{A}$  wie behauptet.

Bemerkung. Aus der Äquivalenz (i  $\leftrightarrow$  ii) folgt insbesondere, daß im Falle  $\dim(R) \leq 1$  die Klasse  $\mathcal{A}$  gegenüber Gruppenerweiterungen abgeschlossen ist. Nach dem Zusatz ( $\gamma$ ) bei (3.6) ist diese Eigenschaft sogar charakteristisch für  $\dim(R) \leq 1$ .

### Literatur

- [1] H.-B. Foxby: On the  $\mu^i$  in a minimal injective resolution II: Math. Scand. 41 (1977) 19–44.
- [2] D. Kirby: Coprimary decomposition of artinian modules: J. London Math. Soc. 6 (1973) 571–576.
- [3] I. G. MacDonald: Secondary representation of modules over a commutative ring: Symp. Math. 11 (1973) 23–43.
- [4] R. Y. Sharp: Secondary representations for injective modules over commutative noetherian rings: Proc. Edinb. Math. Soc. 20 (1976) 143–151.
- [5] B. Stenström: Rings of quotients: Springer, Berlin (1975).
- [6] H. Zöschinger: Koatomare Moduln: Math. Zeitschrift 170 (1980) 221–232.
- [7] – : Minimax-Moduln: J. Algebra 102 (1986) 1–32.
- [8] – : Über koassozierte Primideale: Math. Scand. 63 (1988) 196–211.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1991

Band/Volume: [1990](#)

Autor(en)/Author(s): Zöschinger Helmut

Artikel/Article: [Moduln mit Koprämärzerlegung 5-25](#)